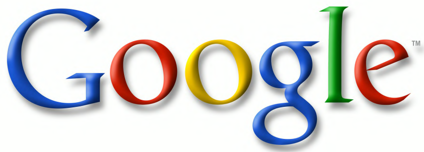

Google

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

ZEVENTIENDE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1882.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER-KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

ZEVENTIENDE DEEL

TWEEDE REEKS.



VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

OVER DE DENSITEIT

EN DEN

UITZETTINGS-COËFFICIËNT VAN DIAETHYLAMINE.

DOOR

A. C. OUDEMANS Jr.

Het onderzoek, waarvan de uitkomsten hier zullen worden medegedeeld, heeft zijn ontstaan te danken aan eene verhandeling van den Hoogleeraar J. D. VAN DER WAALS: »Over de coëfficiënten van uitzetting en van samentrekking in overeenstemmende toestanden van verschillende vloeistoffen," opgenomen in de natuurkundige verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Deel XX (1880).

De schrijver geeft daarin als vrucht van zekere theoretische beschouwingen een regel, volgens welken uit de kritische temperatuur en den uitzettings-coëfficiënt van ééne stof, de uitzettings-coëfficiënt van eene andere stof kan worden berekend, waarvan mede de kritische temperatuur bekend is en komt aan het eind van zijne verhandeling tot een anderen regel, volgens welken de densiteit van eene stof, wier kritische temperatuur en kritische druk, wier uitzettings-coëfficiënt en moleculairgewicht bekend is, met benadering kan worden berekend uit die van eene andere stof, waarvan insgelijks de laatstgenoemde gegevens en bovendien nog de densiteit bekend zijn.

Zoo wordt bepaaldelijk ten aanzien van diaethylamine aangegeven, dat de densiteit daarvan bij eene temperatuur, die met 0° bij aether overeenstemt, ongeveer gelijk zal zijn aan die van aether. Want overeenstemmende temperaturen wor-

den die genoemd, welke gelijke gedeelten zijn van de absolute kritische temperatuur.

Daar nu omtrent de densiteit en den uitzettings-coëfficiënt van diaethylamine niets met zekerheid bekend is, heb ik het van belang geacht, daaromtrent een onderzoek in het werk te stellen, ten einde gelegenheid te geven, den door VAN DER WAALS à priori gegeven regel aan de ervaring te toetsen.

De stof, die tot het onderzoek heeft gediend, was afkomstig uit de bekende fabriek van C. A. F. KAHLBAUM te Berlijn en was bereid uit nitroso-diaethyline, zoodat daardoor een voldoende waarborg was geleverd tegen eene verontreiniging met aethylamine en triaethylamine.

Ongeveer 70 C.C. van dit praeparaat werden aan gefractioneerde destillatie blootgesteld. De vloeistof begon onder een barometerstand van 762^{mm} bij 55^0.3 (gecorr.) te koken. Gedurende geruimen tijd steeg de thermometer nauwlijks merkbaar. Toen ongeveer 40 C.C. waren overgegaan, stond hij in den damp der vloeistof op 57^0 C.; daarop steeg de temperatuur sneller tot 61^0 C. en daarboven. Ten laatste bleef er in de retort bij 70^0 C. eene kleine hoeveelheid (nauwelijks 1 C.C.) van eene vloeistof over, die door water troebel werd, en hoogst waarschijnlijk uit een mengsel van nitrosodiaethyline, diaethylamine en water bestond. Zij verried duidelijk den reuk der beide eerstgenoemde stoffen en een stuk kali vervloeide daarin na eenigen tijd.

Door herhaalde gefractioneerde destillatie van het tusschen 55^0.3 en 61^0 C. overgekomen vocht, verkreeg ik een product, dat tusschen 55^0.3 en 57^0 C. kookte en, naar de uitkomsten van een onderzoek naar de samenstelling en het verzadigingsvermogen, inderdaad met de formule $C_4H_{11}N$ overeenkwam. In de meening, dat dit werkelijk nagenoeg zuivere diaethylamine was, (te meer omdat voor het kookpunt daarvan door HOFMANN 57^0 C. opgegeven wordt), deed ik twee reeksen van bepalingen van densiteiten, de eerste van 0^0—40^0 C. met behulp van een uitstekenden pyknometer van GEISSLER met uitzettingsreservoir en met een in vijfde graden verdeelden thermometer als stop en

de tweede van 0^0—54^0 C. met behulp van een zoogenaamd GAY-LUSSAC'sch fleschje van ongeveer 10 C.C. inhoud. Bij het gebruik van dit laatste werktuigje kon ik tot 41^0 C. een in vijfde graden verdeelden thermometer van GEISSLER bezigen, maar moest, daar deze geene hoogere temperaturen aangaf, voor temperaturen van 41^0—54^0 aanvankelijk mijn toevlucht nemen tot een anderen thermometer, waarvan mij wel is waar de gang nauwkeurig bekend was, doch waarvan elke graadverdeeling slechts $1^1/_2$ millimeter besloeg en de onderdeelen moesten geschat worden. De boven 40^0 C. bij deze tweede reeks gedane bepalingen, die ook om andere redenen minder betrouwbaar zijn, meen ik gerustelijk te kunnen verwerpen.

De inhoud van beide werktuigen was door waterweging, onder inachtneming van de noodige voorzorgen, bepaald.

Voor den inhoud, in C.C. uitgedrukt, van den pyknometer van GEISSLER vond ik tusschen 0^0—40^0 C. het volgende:

$$V^t = 22.8488 + (0.0005)\,t$$

en wel uit een 25tal wegingen, waarvan er 5 bij 0^0, 5 bij $\pm$ 20, 5 bij $\pm$ 40^0 C. en de overige bij tusschenliggende temperaturen waren uitgevoerd. (Het grootste verschil tusschen de waargenomene en berekende volumina bedroeg $\pm$ 0.0023 C.C., het gemiddelde verschil $\pm$ 0.0015 C.C.)

De inhoud in C.C. van het GAY-LUSSAC'sche fleschje, afgeleid uit een twintigtal waarnemingen tusschen 0^0 en 55^0 C. kon worden voorgesteld door de formule:

$$V^t = 9.9470 + 0.000233\,t.$$

(Het grootste verschil tusschen de waargenomene en berekende volumina bedroeg hierbij $\pm$ 0.0021 C.C., het gemiddelde verschil $\pm$ 0.0012 C.C.).

De uitkomsten van de twee eerste reeksen van densiteitsbepalingen van diaethylamine, die later uitvoeriger zullen worden vermeld, stemden van 0^0 tot 40^0 zeer goed overeen. Voor verder onderzoek ben ik evenwel van het gebruik van een pyknometer afgestapt, vooreerst omdat ik daarbij geene hoogere temperatuur dan 40^0 C. kon bereiken, en ten tweede

omdat het mij voorkwam, dat een pyknometer met ingeslepen stop voor het onderzoek van zulke vluchtige vloeistoffen als diaethylamine, aether, enz., wegens het capillair optrekken van het vocht tusschen hals en stop en het verdampen tengevolge daarvan, minder doelmatig was. Ik bepaalde mij daarom bij mijne volgende bepalingen tot het gebruik van het boven beschrevene Gay-Lussac'sche fleschje.

Nadat de eerste twee reeksen van onderzoekingen waren afgeloopen, wilde ik mij van de homogeneïteit der gebezigde vloeistof overtuigen, door deze nogmaals aan gefractioneerde destillatie bloot te stellen en op die wijze in twee ongeveer gelijke deelen te scheiden en van elk gedeelte op nieuw de densiteit te bepalen. Ik vond toen verschillen, verscheidene eenheden in de 4e decimaal bedragende, die mij, vooral in verband met de steeds toenemende densiteit van de boven 57° C. *) overgekomen gedeelten van het oorspronkelijke praeparaat tot het vermoeden leidden, dat de onderzochte diaethylamine niet geheel zuiver was geweest en geringe hoeveelheden van een of meer bestanddeelen bevatten moest.

Ten einde omtrent den aard van deze in geringe hoeveelheid aanwezige verontreinigingen tot eenige zekerheid te geraken, en in elk geval in het bezit te komen van een zuiverder praeparaat, bereidde ik uit de vereenigde hoeveelheid van de tusschen 55° en 60° C. overgekomen vloeistoffen een neutraal oxalaat, scheidde de kristallen, die zich na het uitdampen en bekoelen van de geconcentreerde waterige oplossing afscheidden, en die ongeveer $^3/_4$ van de basis bevatten, door middel van de Bunsen'sche filtreerpomp van de moederloog. Uit de gedroogde kristallen en uit de verder uitgedampte moederloog, ieder afzonderlijk, werd nu door kali de basis weder afgescheiden en deze na lang staan op kali en kalk, gedestilleerd. Het bleek nu, dat de beide aldus verkregene vloeistoffen in densiteit op 1 tot 2 eenheden in de 4e decimaal na overeenkwamen en daaruit trek ik het besluit,

*) N°. 1 : 0.7291.
N°. 2 : 0.7304.
N°. 3 : 0.7319.

dat de verontreiniging, die bij de aanvankelijk gedane bepalingen de densiteit van mijne diaethylamine had verhoogd, niets anders kon geweest zijn, dan een weinig water.

De door lang staan op kali gedroogde vloeistof werd nu weder aan gefractioneerde distillatie blootgesteld; het grootste deel van het vocht ging nu bij een barometerstand van 789^{mm}. over tusschen 55^{0}.3 en 55^{0}.6. Dit vocht diende tot het uitvoeren van de later te vermelden 3^{e} reeks van densiteitsbepalingen.

Eerst later, toen ik meer en meer de ervaring had opgedaan, dat diaethylamine zeer hygroscopisch is, heb ik dit product nog eens langzaam en in een waterbad van 55^{0} C. gerectificeerd over eene groote hoeveelheid versch gesmolten natron, dat voor een deel buiten de vloeistof uitstak. Met het $^{7}/_{8}$ eerst overgekomen deel van dit praeparaat zijn de bepalingen der 4^{e} reeks verricht.

De 5^{e} en 6^{e} reeks, die meer bepaald als controle van de 4^{e} reeks werden ondernomen, zijn met hetzelfde vocht uitgevoerd.

Ten aanzien van het kookpunt van zuivere diaethylamine meen ik de opmerking te moeten maken, dat Hofmann dit zonder twijfel iets te hoog heeft aangegeven (57^{0}.7 C.). Zijn praparaat is waarschijnlijk waterhoudend geweest.

Ik bepaalde het kookpunt verscheidene malen bij versch gedroogde diaethylamine met behulp van een thermometer van Alvergniat met even beneden 50^{0} C. liggend kwikreservoir, zoodat de geheele kwikkolom in de damp der vloeistof was gedompeld. Na correctie voor de fouten van den thermometer vond ik zoodoende voor het kookpunt bij 759^{mm}. barometerstand 55^{0}.5 C.

Zooals boven reeds is vermeld, heb ik ter bepaling van de densiteit bij verschillende temperaturen gebruik gemaakt van een zoogenaamd Gay-Lussac'sch fleschje. Dit kleine toestelletje bestond uit een nagenoeg cilindervormig, van onder eenigzins rond toeloopend vat, van ongeveer 10 C.C. inhoud, van boven eindigende in eene nauwe buis van ongeveer 2

cent. lengte, die zich van boven tot een trechtervormig reservoir verwijdde, dienende om de bij verhooging van temperatuur zich uitzettende vloeistof op te nemen. Op het midden der nauwe buis was als merk voor het volumen een fijn kringetje in het glas geëtst; het toestelletje kon door een goed ingeslepen stop worden gesloten.

Bij gebruik van dit werktuig heeft men, in vergelijking met een GEISSLER'schen pyknometer het nadeel, dat men zich niet onmiddellijk van de gelijkheid van temperatuur in en buiten het vat overtuigen kan, maar aan den anderen kant heeft men geene vrees te koesteren voor merkbare verdamping van vloeistof gedurende den tijd, benoodigd om den toestel te verwarmen of af te koelen tot de temperatuur van het lokaal, waarin de wegingen zullen worden uitgevoerd.

Volgens mijne ervaring is het eerstgenoemde bezwaar niet zoo groot als men zou vermoeden en is het bij eenige zorg zeer goed mogelijk, zich door den stand van de vloeistof in den hals van het fleschje te overtuigen, of zij de standvastige temperatuur van het waterbad, waarin het zich bevindt, reeds heeft aangenomen.

Dat ik deze wijze van doen heb verkozen boven het gebruik van dilatometers, zooals die door PIERRE en KOPP bij hunne onderzoekingen over de uitzetting van vloeistoffen zijn gebezigd, ligt daaraan, dat ik sedert lang de stellige overtuiging heb verkregen, dat men bij de noodige zorg voor het nauwkeurig calibreeren der toestellen met water, vooral wanneer dit niet behoeft te geschieden voor temperaturen, ver boven 50° C. gelegen, zeer nauwkeurige waarnemingen kan verrichten en ontheven is van het blootstellen der toestellen aan eene zeer hooge temperatuur (zooals bij het uitkoken der dilatometers met kwik), dat mij uit de ervaringen omtrent de allengs tot stand komende volumen-veranderingen van glazen toestellen steeds bedenkelijk voorkomt.

Ik ben het alzoo in dit opzicht niet eens met ISIDORE PIERRE, waar hij zegt (*Ann. de Ch. et de Phys.* IV, T. XV, p. 330):

»Cette methode offrirait cependant de grandes difficultés »pour les observations courantes, parce qu'il serait très-dif-

»ficile de maintenir la température ambiante suffisamment »longtemps constante, pour que la température du liquide, »contenu dans l'appareil fût parfaitement uniforme. Cette »méthode présente néanmoins de grands avantages pour les »températures, que l'on peut maintenir constantes aussi long- »temps que l'on veut, comme la température de la glace »fondante, celle de l'eau bouillante, etc."

Naar mijne ervaring zijn bij den langwerpigen vorm der fleschjes van Gay-Lussac de bezwaren van Pierre overdreven, vooral bij het onderzoek van vloeistoffen, die de warmte gemakkelijk geleiden; en daartoe behooren, in vergelijking met water, de meeste organische verbindingen. Binnen den tijd van weinige minuten heeft het fleschje met vloeistof de temperatuur van het omringende waterbad aangenomen.

Omtrent de wijze, waarop, zoowel bij het calibreeren van het Gay-Lussac'sche fleschje, als bij het bepalen van de densiteit van diaethylamine werd te werk gegaan, veroorloof ik mij, het volgende op te merken:

Ter bereiking van eene temperatuur van 0° C. werd het fleschje tot over het merk met vloeistof gevuld, in eene diepe porceleinen met fijngestooten ijs gevulde zeef geplaatst en wel zoo dat het ijs, nagenoeg tot aan het merk reikte; het door smelting verkregen water kon door de openingen der zeef in een onderstaand vat afloopen. Wanneer het fleschje een kwartier in deze omgeving had verkeerd, werd de overmaat van vloeistof die boven het merk stond, eerst door eene pipet met fijne spits en voorts door haarbuisjes weggezogen, tot dat het vocht op het merk kwam; daarna werd nu nog een kwartier gewacht en nagegaan of de stand van de vloeistof intusschen niet was veranderd. Dit was in den regel het geval niet; bij uitzondering moest door toevoegen van een weinig vloeistof uit een gevuld haarbuisje het niveau op de juiste hoogte worden gebracht.

Voor densiteits-bepalingen bij temperaturen, gelegen tusschen 0° en 20° C. werd gebruik gemaakt van een waterbad, dat gedurende geruimen tijd in een lokaal had gestaan, waarvan de temperatuur gedurende den wintertijd door harder of zachter stoken nagenoeg op de verlangde hoogte werd ge-

houden; kleine wisselingen van temperatuur in het waterbad konden worden ontgaan door toevoegen van kouder of warmer water onder gestadig roeren. Overigens werd, ook bij de densiteits-bepalingen op hoogere temperatuur gehandeld, zooals hierboven ten aanzien van de waarnemingen bij 0° C. is beschreven.

Moeilijker was het, eene standvastige temperatuur te verkrijgen, gelegen tusschen 20° en 55° C. Het best slaagde ik daarin op de volgende wijze.

Op een waterbad met standvastig niveau, bedekt met een stel van porceleinen ringen werd een laag cilindrisch vat geplaatst van ongeveer 500 C.C. inhoud. Hierin werd een hooger bekerglas gezet van veel geringeren diameter, hebbende een inhoud van ongeveer 400 C.C. doch slechts tot $^3/_4$ met water gevuld. Hierin stond het fleschje, juist tot aan het merk ondergedompeld. In het buitenste vat, dat onmiddellijk op het waterbad stond, werd nu zooveel water gegoten, dat dit ongeveer tot de helft aan de hoogte der waterkolom in het bekerglas reikte. Door het aanbrengen van eene kleinere of grootere gasvlam onder het waterbad kon nu na eenig tasten en zoeken eene temperatuur van het water in het binnenste vat verkregen worden, die bij gestadig roeren vrij lang (15 minuten en langer) standvastig bleef.

In enkele gevallen, waarin nog kleine wisselingen van temperatuur konden worden waargenomen, werd door toevoeging van koud of warm water daaraan tegemoet gekomen. Het was niet moeielijk op die wijze de temperatuur binnen het verloop van $^1/_{20}{}^0$ C. standvastig te houden.

Ter bepaling van de temperatuur werd bij de 3e en volgende reeksen van proeven gebruik gemaakt van een gecalibreerden thermometer van H. W. Geissler te Berlijn, in vijfde graden verdeeld, en waarin de kwikzuil voor eene rijzing van 1° temperatuur een afstand doorliep van $3^1/_2$ mil-

limeter, zoodat het gemakkelijk was, de temperatuur der waterbaden tot op $^1/_{20}{}^0$ C. (de grens van nauwkeurigheid, die ik bij mijne proeven heb trachten te bereiken) te bepalen. Deze thermometer was vergeleken met een uitstekenden thermometer van Baudin (N°. 4582) te Parijs, waarvan het beloop door mijn geachten ambtgenoot Snijders zorgvuldig was nagegaan, en binnen de grenzen van hoogstens ± 0.02° volkomen juist was bevonden. Het spreekt van zelf, dat de hierna volgende opgaven omtrent temperatuur voor de fouten van den thermometer (na bepaling van de punten 0° en 100°) zijn verbeterd.

Ten aanzien van het calibreeren van het door mij gebezigde fleschje mag worden vermeld, dat als densiteiten van water tusschen 0° en 100° C. zijn gebezigd de cijfers, waarvan vroeger door mijn vriend Hoek en mij is gebruik gemaakt bij onze onderzoekingen omtrent den brekings-aanwijzer van vloeistoffen bij verschillende temperaturen (*Recherches zur la quantité d'éther, contenu dans les liquides*, la Haye. Nijhoff 1864) en die uit de gezamenlijke waarnemingen der meest betrouwbare waarnemers zijn afgeleid.

Eindelijk acht ik mij verplicht, ten aanzien van de door mij gevolgde wijze van werken nog het volgende op te merken.

Het is duidelijk, dat men den pyknometer met vloeistof, nadat hij de temperatuur van de omgeving heeft aangenomen en door het wegnemen van de overmaat van vloeistof juist tot het merk is gevuld, in de meeste gevallen niet dadelijk kan wegen; immers heeft hij eene temperatuur lager dan die van de om de balans aanwezige lucht, zoo verdicht zich allicht waterdamp tegen zijn buitenoppervlak; en is hij daarentegen warmer, dan kunnen de wegingen onjuist worden door de verlenging van den eenen arm der balans ten gevolge van uitstraling van het glas en het opstijgen van warme lucht.

Om aan deze bezwaren te gemoet te komen en zooveel mogelijk verdamping te vermijden, heb ik getracht, het onmiddellijk na de waarneming met den stop gesloten fleschje door het plaatsen in een grooten voorraad water van de tem-

peratuur der kamer, zoo snel mogelijk deze laatste te laten aannemen. Verlies door verdamping heeft men hierbij bij vloeistoffen zooals diaethylamine, die minder vluchtig zijn dan aether niet te vreezen, maar men heeft somtijds te kampen met een ander bezwaar, vooral wanneer de toestel eensklaps van eene vrij hooge temperatuur op eene betrekkelijk lage wordt gebracht; namelijk, dat het volumen van het fleschje en zijn dilatatie-coëfficiënt kunnen veranderen; zoodat het noodzakelijk is, zich na elke reeks van bepalingen te overtuigen, of dit inderdaad heeft plaats gehad of niet, door den pyknometer op nieuw door weging met water bij verschillende temperaturen te calibreeren.

Bij het GAY-LUSSAC'sche fleschje, dat ik heb gebezigd, deed zich dit verschijnsel aanvankelijk voor, maar later, nadat het bij eene reeks van bepalingen was gebezigd en daarbij allerlei, soms plotselinge afwisselingen van temperaturen had doorstaan, bleef het volumen standvastig voor dezelfde temperatuur. Dezelfde ervaring heb ik vroeger bij gelegenheid van densiteitsbepalingen van aether bij andere pyknometers opgedaan.

Merkwaardig is het daarbij, dat de uitzetting van vele door mij in dit opzicht onderzochte toestellen, evenredig is aan de temperatuursverhooging, van andere daarentegen niet, zoodat men om het volumen van deze laatste voor te stellen zijne toevlucht moet nemen tot eene formule van den vorm: $V^t = V^0 + a\,t + b\,t^2$; voorts dat sommige pyknometers blijken, dadelijk onveranderlijk te wezen, andere daarentegen zeer gevoelig te zijn voor tijdelijke temperatuursveranderingen. Trouwens hetgeen ik hier vermeld, strookt geheel met de ervaring, die men omtrent de uiteenloopende en somtijds grillige gedragingen van thermometers heeft opgedaan *).

---

*) Waarschijnlijk zal deze tijdelijke verandering van volumen bij dilatometers eveneens moeten voorkomen en des te meer, naarmate ze aan hooger temperaturen (zooals bij het uitkoken met kwik) zijn blootgesteld geweest. Het komt mij voor, dat deze bron van fouten bij densiteitsbepalingen niet altijd genoeg is in het oog gehouden.

Ik ga thans over tot de vermelding van de uitkomsten bij het door mij verrichte onderzoek verkregen.

Het gemakkelijkst zijn deze te overzien uit eene tabel, waarvan de 1e kolom de gecorrigeerde temperaturen, de 2e de onmiddellijk uit de waarneming afgeleide densiteiten, de 3e de uit de formule voor het volumen afgeleide densiteiten en de 4e de verschillen tusschen de waargenomen waarden in eenheden van de 5e decimaal bevatten.

De formule voor het volumen werd bij de 3e en 4e reeks, waaraan ik zelf, wegens de meerdere daaraan bestede zorg, de meeste waarde toeken, opgemaakt uit eenige densiteitsbepalingen bij 0°, ± 18° C., ± 36° en ± 54° (in de navolgende tabellen door een texthaakje aangeduid). De gemiddelden uit de vier verkregen reeksen van cijfers werden op 0°, 18°, 36° en 54° gereduceerd en uit deze vier waarden de coëfficiënten a, b en c uit de formule $V^t = V^0 (1 + a t + b t^2 + c t^3)$ berekend.

Bij de berekening van de uitkomsten der 1e en 2e reeks heb ik ondersteld, dat de densiteit binnen de grenzen van temperatuur, waarbij ik waarnam, gelijkmatig afnam. Uit het later te geven overzicht zal blijken, dat men in deze onderstelling geene zeer groote afwijkingen vindt met de densiteiten, die uit de 3e en 4e reeks voortgevloeide formule zijn berekend.

EERSTE REEKS.

FORMULE VOOR HET VOLUMEN

$$V^t = 0^0 (1 + 0.001511\, t)$$

berekend uit de waarnemingen bij 0^0 en bij $34^0.2$, 36^0 en $39^0.7$

T.	D waargenomen.	D berekend.	W—B.
0^0 C.	0.72774	0.72776	— 2
0^0 »	0.72778	0.72776	+ 2
$9^0.6$ »	0.71769	0.71774	+ 5
$11^0.0$ »	0.71592	0.71630	— 38
$12^0.0$ »	0.71561	0.71525	+ 36
$16^0.0$ »	0.71123	0.71108	+ 15
$16^0.8$ »	0.71050	0.71025	+ 25
$17^0.2$ »	0.71006	0.70983	+ 23
$18^0.0$ »	0.70934	0.70900	+ 34
$23^0.4$ »	0.70338	0.70337	+ 1
$27^0.2$ »	0.69951	0.69941	+ 10
$29^0.4$ »	0.69714	0.69712	+ 2
$34^0.2$ »	0,69222	0.69212	+ 10
$34^0.2$ »	0.69204	0.69212	— 8
$34^0.3$ »	0.69199	0.69201	— 2
$36^0.0$ »	0.69034	0.69024	+ 10
$36^0.0$ »	0.69026	0.69024	+ 2
$39^0.7$ »	0.68629	0.68638	— 9

Uit de berekende formule worden de volgende waarden voor de volumina en densiteiten bij temperaturen tusschen 0^0 en 40^0 C. afgeleid:

T.	V.	Δ
0^0 C.	1.00000	756
5^0 »	1.00756	755
10^0 »	1.01511	756
15^0 »	1.02267	755
20^0 »	1.03022	756
25^0 »	1.03778	755
30^0 »	1.04533	756
35^0 »	1.05289	755
40^0 »	1.06044	

T.	D.	Δ
0^0 C.	0.72776	521
5^0 »	0.72255	521
10^0 »	0.71734	521
15^0 »	0.71213	521
20^0 »	0.70692	521
25^0 »	0.70171	521
30^0 »	0.69640	521
35^0 »	0.69129	522
40^0 »	0.68607	

TWEEDE REEKS.

FORMULE VOOR HET VOLUMEN

$$V^t = V^0 (1 + 0.0015195\, t)$$

berekend uit de waarnemingen bij 0° C. en 36°.4 en 36°.5

T.	D waargenomen.	D berekend.	W—B.
0° C.	0.72804	0.72809	— 5
0° »	0.72804	0.72809	— 5
0° »	0.72814	0.72809	+ 5
0° »	0.72814	0.72809	+ 5
5°.7 »	0.72202	0.72212	— 10
6°.0 »	0.72197	0.72180	+ 17
10°.0 »	0.71790	0.71761	+ 29
12°.3 »	0.71523	0.71520	+ 3
13°.8 »	0.71391	0.71362	+ 29
14°.9 »	0.71232	0.71247	— 15
19°.8 »	0.70754	0.70733	+ 21
36°.4 »	0.68982	0.68988	— 6
36°.5 »	0.68993	0.68987	+ 6

Uit de berekende formule worden de volgende waarden voor de volumina en de densiteiten bij temperaturen tusschen 0° en 40 C. afgeleid:

T.	V.	Δ
0° C.	1.00000	760
5° »	1.00760	760
10° »	1.01520	759
15° »	1.02279	760
20° »	1.03039	760
25° »	1.03799	760
30° »	1.04559	759
35° »	1.05318	760
40° »	1.06078	

T.	D.	Δ
0° C.	0.72809	524
5° »	0.72285	524
10° »	0.71761	524
15° »	0.71237	524
20° »	0.70712	524
25° »	0.70188	524
30° »	0.69664	524
35° »	0.69140	524
40° »	0.68616	

DERDE REEKS *).

FORMULE VOOR HET VOLUMEN:

$$V^t = V^0(1 + 0.0014013\,t + 0.00000341\,t^2 - 0.00000000311\,t^3)$$

berekend uit de waarnemingen bij ± 0⁰, ± 18⁰, ± 36 en ± 54.

T.		D waargenomen.	D berekend	W—B.
0⁰	C.	0.72741	0.72740	+ 1
0⁰	»	0.72744	0.72740	+ 4
0⁰	»	0.72754	0.72740	+ 14
0⁰	»	0.72741	0.72740	+ 1
0⁰	»	0.72733	0.72740	— 7
0⁰	»	0.72724	0.72740	— 16
6⁰.9	»	0.72021	0.72031	— 10
7⁰.3	»	0.71985	0.71990	— 5
13⁰.6	»	0.71335	0.71332	+ 3
14⁰.2	»	0.71295	0.71271	+ 24
18⁰.0	»	0.70863	0.70874	— 9
18⁰.0	»	0.70879	0.70874	+ 5
18⁰.4	»	0.70841	0.70832	+ 9
18⁰.5	»	0.70805	0.70822	— 17
19⁰.0	»	0.70772	0.70770	+ 2
23⁰.0	»	0.70342	0.70353	— 11
27⁰.5	»	0.69823	0.69869	— 46
29⁰.3	»	0.69617	0.69618	— 1
30⁰.4	»	0.69562	0.69559	+ 3
35⁰.3	»	0.69023	0.69039	— 16
35⁰.75	»	0.68972	0.68992	— 20
35⁰.8	»	0.69003	0.68985	+ 18
36⁰.3	»	0.68942	0.68933	+ 9
36⁰.4	»	0.68918	0.68923	— 5
37⁰.0	»	0.68880	0.68857	+ 23
42⁰.4	»	0.68294	0.68279	+ 15
43⁰.6	»	0.68138	0.68151	— 13
45⁰.3	»	0.67966	0.67968	— 2
46⁰.7	»	0.67845	0.67821	+ 24
53⁰.2	»	0.67127	0.67118	+ 9
54⁰.0	»	0.67034	0.67032	+ 2
54⁰.0	»	0.67022	0.67032	— 10
54⁰.8	»	0.66944	0.66946	— 2

*) Bij het begin van deze reeks van bepalingen werden het volumen en

Uit de berekende formule worden de volgende waarden voor de volumina en densiteiten bij temperaturen tusschen 0^0 en 55^0 C. afgeleid.

T.	V.	Δ
0^0 C.	1.00000	709
5^0 »	1.00709	726
10^0 »	1.01435	743
15^0 »	1.02178	759
20^0 »	1.02937	775
25^0 »	1.03712	791
30^0 »	1.04503	806
35^0 »	1.05309	822
40^0 »	1.06131	837
45^0 »	1.06968	851
50^0 »	1.07820	867
55^0 »	1.08687	

T.	V.	Δ
0^0 C.	0.72740	512
5^0 »	0.72228	517
10^0 »	0.71711	522
15^0 »	0.71189	524
20^0 »	0.70665	528
25^0 »	0.70137	531
30^0 »	0.69606	533
35^0 »	0.69073	535
40^0 »	0.68538	536
45^0 »	0.68002	538
50^0 »	0.67464	538
55^0 »	0.66926	

---

de uitzettings-coëfficiënt van het fleschje op nieuw bepaald en toen gevonden, dat deze veranderd waren. Ik vond nu voor het volumen van het fleschje $V^t = 9.9446 + 0.000158\,t$ als resultaat van 17 bepalingen, waarbij de grootste afwijking tusschen berekende en gevondene waarden 0.0024 C.C. en de gemiddelde afwijking 0.0005 C.C. bedroeg.

Om allen twijfel omtrent deze verandering van volumen weg te nemen, merk ik op, dat het volumen 9.9525, zooals het bij het begin van de 3e reeks voor eene temperatuur van 50° C. werd gevonden, aanvankelijk overeenkwam met een temp. van 25° C. —, voorts dat bij herhaald onderzoek na het voltooien van de 3e, 4e, 5e en 6e reeks mijner bepalingen dit verschijnsel zich *niet meer* heeft voorgedaan; aan fouten van de proef valt hier derhalve in geen geval te denken.

VIERDE REEKS.

BEREKENDE FORMULE VOOR HET VOLUMEN:

$$V^t = V^0(1 + 0.001398t + 0.000002702\,t^2 + 0.00000001226\,t^3)$$

T.	D waargenomen.	D berekend.	W—B.
0° C.	0.72624	0.72628	— 4
0° »	0 72631	0.72628	+ 3
0° »	0.72627	0.72628	— 1
0° »	0.72628	0.72628	0
14°.4 »	0.71141	0.71153	— 12
16°.8 »	0 70910	0.70904	+ 6
17°.75 »	0.70802	0.70805	— 3
17°.85 »	0.70796	0.70794	+ 2
17°.9 »	0.70789	0.70790	— 1
18°.0 »	0.70772	0.70780	— 8
18°.8 »	0 70702	0 70697	+ 5
24° 0 »	0.70135	0.70153	— 18
29°.3 »	0.69600	0.69594	+ 6
33°.8 »	0.69124	0.69115	+ 9
35°.55 »	0.68921	0.68930	— 9
35°.85 »	0.68885	0 68897	— 12
36°.2 »	0.68875	0.68859	+ 16
37°.9 »	0.68675	0.68677	— 2
42°.0 »	0.68239	0.68235	+ 4
47°.4 »	0.67649	0.67637	+ 12
48°.8 »	0.67503	0.67493	+ 10
53°.0 »	0.67058	0.67030	+ 28
53°.6 »	0.66950	0.66964	— 14
53°.8 »	0.66914	0.66941	— 27
54°.4 »	0.66880	0.66875	+ 5
54°.4 »	0.66881	0.66875	+ 6

Uit de formule voor het volumen worden de volgende waarden voor de volumina en de densiteiten tusschen 0° en 55° afgeleid:

T.	V.	Δ
0° C.	1.00000	706
5° »	1.00706	720
10° »	1.01426	736
15° »	1.02162	752
20° »	1.02914	769
25° »	1.03683	788
30° »	1.04471	806
35° »	1.05277	826
40° »	1.06103	847
45° »	1.06950	869
50° »	1.07819	892
55° »	1.08711	

T.	D.	Δ
0° C.	0.72628	510
5° »	0.72118	511
10° »	0.71607	516
15° »	0 71091	519
20° »	0.70572	524
25° »	0.70048	528
30° »	0.69520	532
35° »	0.68988	537
40° »	0.68451	542
45° »	0.67909	548
50° »	0.67361	552
55° »	0.66809	

VIJFDE EN ZESDE REEKS.

De ervaring door mij opgedaan ten aanzien van de hygroscopiciteit van diaethylamine, boezemde mij eenige vrees in, dat bij de voorgaande bepalingen niettegenstaande de genomen voorzorgen, toch nog fouten waren begaan, doordien de diaethylamine gedurende den loop van het onderzoek door het telkens openen en sluiten van het Gay-Lussac'sche fleschje, waterdamp uit de lucht had opgenomen.

Ten einde te beslissen, in hoeverre deze vrees gegrond was, deed ik nog twee reeksen van slechts 4 bepalingen, bij temperaturen liggende nabij 0°, 18°, 36° en 54° en wel de eene bij stijgende de andere bij dalende temperaturen. Deze beide reeksen konden ieder op één dag worden uitgevoerd en voor

opname van waterdamp was weinig te vreezen, omdat slechts enkelen malen de stop van het fleschje behoefde te worden afgelicht.

De uitkomsten waren de volgende:

5e Reeks. Bij opgaande temperaturen.		6e Reeks. Bij dalende temperaturen.	
T.	D.	T.	D.
0° C.	0.72648	0° C.	0.72659
19°.2 »	0.70675	18°.0 »	0.70813
34°.2 »	0.69097	36° »	0.68916
53°.8 »	0.66962	54°.4 »	0.66908

Reduceert men de laatste drie waarnemingen op 18°, 36° en 54° met behulp van de vroeger gevondene verschillen voor 1° C. zoo verkrijgt men:

5e Reeks.		6e Reeks.	
0° C.	0.72648	0° C.	0 72659
18° »	0.70800	18° »	0.70813
36° »	0.68906	36° »	0.60916
54° »	0.66940	54° »	0.66952

Vergelijkt men deze uitkomsten met die, welke bij de vierde reeks waren verkregen, zoo ontwaart men, dat de ververschillen tusschen de densiteiten bij de vier aangegeven temperaturen nagenoeg gelijk zijn. Er is tusschen de cijfers van de 5e en 4e reeks een verschil van ongeveer 2 eenheden

en tusschen die van de 6e en 4e reeks van 3 eenheden in de vierde decimaal, hetgeen zonder twijfel moet toegeschreven worden aan opname van waterdamp gedurende den tijd (ongeveer 17 uur) dat het ter onderzoeking dienende vocht in het GAY-LUSSAC'sche fleschje aan zichzelf was overgelaten.

Ten slotte meen ik dus de bij de 4e reeks verkregen cijfers als de meest betrouwbare te mogen aannemen.

Eenige densiteits-bepalingen, later bij 0° C. door mij met over versch gesmolten natrium-hydroxyd gedestilleerd diaethylamine verricht, gaven de volgende uitkomsten:

	0.72619
	0.72624
	0.72625
Midden	0.72623

een cijfer dat met het vroeger door mij gevondene zeer na overeenstemt. Nemen wij, slechts 4 decimalen bij de opgave der densiteiten bezigende, het cijfer 0.7262 voor de densiteit bij 0° C. aan, reduceeren wij de vroeger gevondene cijfers voor de densiteit bij 0° C. tot dit getal, zoo verkrijgen wij het volgende overzicht van de bij de onderscheidene reeksen verkregen uitkomsten:

T.	1e Reeks.	2e Reeks.	3e Reeks.	4e Reeks.	5e Reeks.	6e Reeks.
0° C.	0.7262	0.7262	0.7262	0.7262	0.7262	0.7262
5° "	0.7210	0.7210	0.7210	0.7211		
10° "	0.7158	0.7158	0.7159	0.7160		
15° "	0.7106	0.7106	0.7107	0.7108		
18° "	0.7074	0.7074	0.7076	0.7077	0.7077	0.7077
20° "	0.7054	0.7053	0.7055	0.7056		
25° "	0.7002	0.7001	0.7002	0.7004		
30 "	0.6949	0.6948	0.6948	0.6951		
35° "	0.6896	0.6895	0.6895	0.6898		
36° "	0.6887	0.6884	0.6884	0.6887	0.6888	0.6888
40° "	0.6845	0.6843	0.6842	0.6844		
45° "			0.6788	0.6790		
50° "			0.6734	0.6735		
54° "			0.6690	0.6691	0.6691	0.6692
			0,6681	0,6680		

waaruit als waarschijnlijkste waarde voor de densiteit van diaethylamine bij temperaturen van 0°—55° C. het volgende mag worden afgeleid:

T.	D.	Δ
0° C.	0.7262	51
5° »	0.7211	52
10° »	0.7159	52
15° »	0 7107	52
20° »	0.7055	53
25° »	0.7002	53
30° »	0.6949	52
35° »	0.6897	53
40° »	0 6844	54
45° »	0.6790	55
50° »	0.6735	55
55° »	0.6680	

IETS OVER HET VERBAND

TUSSCHEN

PHANEROGAMEN EN CRYPTOGAMEN.

DOOR

M. TREUB.

Toen Hofmeister in 1851 zijne beroemde *Vergleichende Untersuchungen* in het licht gaf, bleek het dat door hem overgangen waren gevonden tusschen de beide hoofdgroepen van het plantenrijk: de Cryptogamen en de Phanerogamen. Dat onder de laatsten de Gymnospermen het eenvoudigst en laagst georganiseerd zijn, wist men; doch dat de kiemzak der Gymnospermen niets anders is dan eene macrospore, welke een prothallium en archegoniën voortbrengt, had niemand vermoed.

Met weinige woorden zij het gewicht van Hofmeister's ontdekking in herinnering gebracht.

De hoogere- of Vaatcryptogamen vertoonen allen eene duidelijke generatie-wisseling. De eene wissel-generatie, de grootste, draagt geene geslachtswerktuigen, doch brengt, op ongeslachtlijken weg, voortplantings-organen, »sporen", voort. De andere wissel-generatie, het »prothallium", uit de kieming eener spore ontstaan, draagt de geslachts-organen. Bij een groot deel der Vaatcryptogamen komen zoowel de mannelijke geslachtsorganen, de »antheridiën", als de vrouwelijke, de »archegoniën", aan een zelfde prothallium voor. Bij anderen worden zij voortgebracht aan verschillende prothalliën, gesproten uit, voor het oog, gelijke sporen. Bij eene derde groep van Vaatcryptogamen eindelijk, is de arbeids-

verdeeling nog een stap verder gegaan, en openbaart zij zich aan de sporen zelven. In »microsporangiën" ontstaan dan, in grooten getale, »microsporen", die de mannelijke prothalliën leveren. In »macrosporangiën" komen slechts weinige, soms ééne, der vele aangelegde »macrosporen" tot ontwikkeling; »macrosporen", welke vrouwelijke prothalliën voortbrengen, die veelal zoo weinig ontwikkeld zijn, dat zij, aan de afgevallen macrospore, ter nauwernood uit eene spleet te voorschijn komen, niet meer dan juist noodig is om hunne archegoniën aan den invloed van spermatozoïden bloot te stellen.

Bij de Gymnospermen nu, de laagsten der Phanerogamen, scheiden de beide wissel-generatiën zich niet meer van elkander; de macrospore, dáár »kiemzak" genoemd, valt niet af; zij blijft met de geslachtlooze generatie verbonden, ontwikkelt dáár haar prothallium en doet hare archegoniën rijpen, nadat zij bevrucht zijn geworden. Dit feit te hebben aangetoond en er de beteekenis van te hebben begrepen, is de groote verdienste van Hofmeister.

Nadat eene zoo belangrijke overeenkomst tusschen Cryptogamen en Phanerogamen ontdekt was, trachtte men andere punten van overeenkomst, welke daaruit schenen te moeten volgen, op te sporen, ten einde zich eene voorstelling te vormen van de wijze, waarop de Phanerogamen uit Cryptogamen ontstaan zouden kunnen zijn. Deze pogingen zijn, tot nog toe, vruchteloos gebleven. Wel heeft men vrij aannemelijke hypothesen opgesteld ter verklaring van dien belangrijksten aller ontwikkelingstrappen uit het Plantenrijk; nieuwe positieve gegevens echter zijn niet met zekerheid gevonden.

Terwijl de sporangiën der Vaatcryptogamen aan bladeren worden voortgebracht, óf als vrije gesteelde zakken, óf wel als celgroepen in het inwendige eener bladslip, ontstaat de macrospore (kiemzak) der Phanerogamen in een orgaan, waaraan men vroeger den weinig gelukkigen naam van »ovulum" heeft gegeven. Zulke »ovula", welke aan afzonderlijke bladeren, »vruchtbladen", worden voortgebracht, bestaan hoofdzakelijk uit een centraal gedeelte, »nucellus"

genoemd, en uit één of twee, zelden drie, mantels: de »integumenten", welke den nucellus omgeven en met hem in het onderste gedeelte van het ovulum samensmelten. De kiemzak biedt in zijne ontwikkeling, in de tot nog toe goed bekende gevallen, zoo weinig overeenstemming aan met de ontwikkelingswijze van de macrosporen der Cryptogamen, dat men er tot heden zelfs niet eenstemmig over denkt, wat bij de Phanerogamen als homologon van een sporangium behoort te gelden. Sommigen beschouwen als zoodanig het geheele ovulum, anderen weder alleen zijn nucellus. Of organen, met de integumenten homoloog, bij de Vaatcryptogamen voorkomen, wordt evenzeer verschillend beoordeeld.

Kortom, dat de Phanerogamen, en meer in het bijzonder hare lagere klasse: de Gymnospermen, *moeten* zijn afgestamd uit planten, welke in de belangrijkste punten veel op tegenwoordig levende Vaatcryptogamen geleken, blijkt duidelijk uit de overeenkomst van macrospore en kiemzak; *hoe* echter die afstamming geschiedt kan zijn, en *welke* de mogelijke tusschen-stadiën waren, weet men zich niet voor te stellen.

Slechts één nieuw feit, hetwelk eenig licht over die vragen scheen te zullen verspreiden, is vier jaar geleden bekend geworden. De Deensche botanist Warming merkte namelijk in jonge ovula van Cycadeeën op, dat de kortelings gevormde kiemzak er omgeven is door een aantal cellen, welke hem deden denken aan de moedercellen van sporen in een sporangium. Warming neemt dan ook aan, dat bij de Cycadeeën, behalve de éene zich ontwikkelende macrospore, nog andere, zich *niet* deelende, macrosporen-moedercellen aanwezig zijn. Hoe die groep van moedercellen zou ontstaan en op welke wijze de eenige macrospore zich begint te ontwikkelen, werd door hem niet aangegeven.

Warming's beschouwing had niet dien invloed, welke men er van zoude hebben mogen verwachten. De oorzaak daarvan lag hierin, dat de waarnemingen, waarop zij zich grondde, gering in aantal en niet geheel volledig waren, zoodat de vereischte waarborgen voor zekerheid ten deele ontbraken. Van die onvolledigheid mag allerminst den onderzoeker een verwijt worden gemaakt; zij vindt hare ver-

klaring geheel in de groote moeielijkheid, welke men in Europa heeft om zich de noodige voorwerpen voor zulk een onderzoek te verschaffen.

Zelf was ik in de gelegenheid, jonge vruchtbladen eener Cycadee: *Ceratozamia longifolia*, in alle gewenschte stadiën nauwkeurig te onderzoeken. Met het oog op de mededeeling van WARMING, kwam mij dit onderzoek belangrijk voor; vooral daar a priori te zeggen is, dat, zoo er nog onbekende punten van overeenkomst met Cryptogamen te vinden zijn, deze zeker gezocht moeten worden bij de Cycadeeën, eene afdeeling der Gymnospermen, welke de laagsten van alle Phanerogamen bevat *).

Mijn onderzoek leerde mij het volgende: Aan elk jong schubvormig vruchtblad van *Ceratozamia longifolia*, ontstaan twee zijdelingsche lobben, welke uitgroeien in de richting van de as, welke het vruchtblad draagt. *Vóórdat er eenige uitwendige differentieering zichtbaar is*, scheidt zich *in* het weefsel van elk dier lobben, dicht onder de opperhuid, eene groep van cellen af, door eene scheidings-laag begrensd. Hoewel deze laag niet altijd even goed te volgen is, is de differentieering der celgroep, in haar geheel, in goed geslaagde praeparaten, niet twijfelachtig. *Die celgroep draagt, bij verdere ontwikkeling, alle kenmerken van een macrosporangium*. Groote cellen in het midden zijn de moedercellen van macrosporen. Eene dier moedercellen slechts levert eene macrospore. Daartoe deelt zij zich in drie boven elkander liggende cellen, van welke de onderste macrospore (kiemzak) wordt †). Die eenige zich ontwikkelende macrospore verbreedt zich en dringt de haar omringende macrosporenmoedercellen, welke platgedrukt en ten deele geresorbeerd worden, op zijde. Gedurende het grooter worden van de macrospore, blijft de groep van moedercellen, wier midden

*) Dat wil zeggen: die Phanerogamen, welke de meeste overeenkomst met Vaatcryptogamen vertoonen.

†) De kiemzak der Cycadeeën ontstaat dus uit zijne moedercel, op dezelfde wijze als bij de Phanerogamen in het algemeen. De eigenaardige deelingswijze van de macrosporen-moedercel der Cryptogamen is dus bij de Cycadeeën reeds verloren gegaan.

zij inneemt, scherp van het omringend weefsel gescheiden. Als de macrospore haar prothallium begint te ontwikkelen, is zij nog omringd door één of twee lagen cellen: het overblijfsel der groep van onontwikkelde macrosporen-moedercellen.

WARMING's zienswijze, aan een gering aantal waarnemingen ontleend, blijkt juist te zijn. Het volledige materiaal, waarover ik te beschikken had, stelde mij in staat, alle gewenschte stadiën, van de jongsten af, te onderzoeken en alle bijzonderheden der ontwikkeling van het macrosporangium waar te nemen.

Kort *nadat* het macrosporangium zich, in eersten aanleg, heeft vertoond, ontstaat er op de slip van het vruchtblad, onmiddellijk boven het sporangium, eene kleine verhevenheid. Deze verhevenheid, welke zich later kegelvormig verheft, blijkt de »nucellus" te zijn. Tegelijkertijd groeit het weefsel van de vruchtbladslip, rondom den nucellus, tot een hem omhullenden mantel: het »integument", uit.

Dat nucellus en integument eerst beginnen te ontstaan *nadat* het macrosporangium is aangelegd, komt mij vooral belangrijk voor.

Als men aanneemt dat de door mij onderzochte *Ceratozamia*, wat de punten in quaestie betreft, als type der Cycadeeën kan gelden, hetgeen zeer waarschijnlijk of liever zoo goed als zeker is, dan kan dus het volgende worden gezegd:

Bij de Cycadeeën ontstaat IN *eene slip van het vruchtblad een macrosporangium, geheel op dezelfde wijze als een sporangium bij het Cryptogamen-geslacht Ophioglossum wordt gevormd.*

NA *den aanleg van het macrosporangium ontstaan twee nieuwvormingen op de vruchtblad-slip: eene kegelvormige — de nucellus — en eene mantelvormige — het integument.*

Het zoogenoemde ovulum bij de Cycadeeën bestaat dus eensdeels uit de sporangium-vormende slip van het vruchtblad, anderdeels uit de beide nieuwvormingen: nucellus en integument. Met een vrij, gesteeld, sporangium heeft dus dit ovulum geen enkel punt van overeenkomst.

Voor nucellus en integument bestaan bij de Cryptogamen

geen homologe organen; deze nieuwvormingen zijn te beschouwen als nieuwe adaptatie aan de veranderde wijze van bevruchting, bij welke stuifmeelbuizen in de plaats van spermatozoïden zijn getreden. De cryptogamische voorouders der Cycadeeën hadden macrosporangiën, welke zich *in* het bladweefsel ontwikkelden, en zich *niet* als vrije, gesteelde, zakken voordeden; in dat opzicht moeten die voorouders eenige gelijkenis met *Ophioglossum* hebben gehad.

De uitvoerige uiteenzetting mijner resultaten en bijbehoorende figuren maakt deel uit van een artikel, hetwelk, onder den titel van »Recherches sur les Cycadées", in het tweede deel der *Annales du Jardin Botanique de Buitenzorg*, het licht zal zien. Tegelijk met deze kortere mededeeling, is het bedoelde artikel naar Europa ter perse gezonden.

In hoeverre de gemaakte gevolgtrekkingen ook voor de andere Gymnospermen geldig zijn; of zij ook op de opvatting van het ovulum der Angiospermen van invloed kunnen wezen; dit zijn vragen, voor wier bespreking ik de vrijheid neem naar mijne uitgewerkte verhandeling te verwijzen.

Buitenzorg, einde Maart 1881.

MIKROCHEMISCHE METHODEN

ZUR

MINERAL-ANALYSE

VON

Th. H. BEHRENS.

Einleitung.

1.

Wenn die Anzahl der mikrochemischen Reactionen, welche dem Mikroskopiker auf dem Gebiete der Petrographie zu Gebote stehen viel geringer und ihre Anwendung viel beschränkter ist als auf dem Felde der mikroskopischen Anatomie der Pflanzen und Thiergewebe, so ist die Ursache sicherlich nicht, dass für die Untersuchung der Gesteine von derartigen Methoden weniger Vortheil zu erwarten wäre. Könnte in Feldspath das Kalium und Calcium mit derselben Leichtigkeit und Schärfe nachgewiesen und die Quantität dieser Bestandtheile annähernd geschätzt werden wie dies für das Amylum mittelst Jod, für Cellulose mittelst Jod und Schwefelsäure möglich ist — wie sehr die Petrographie durch eine solche Untersuchungsmethode müsste gefördert werden, wird den meisten Mikroskopikern auf den ersten Blick einleuchten.

2.

Sehr früh ist man bemüht gewesen, die mikroskopischen Hülfsmittel zur Bestimmung von Gesteinsgemengtheilen zu

erweitern. Seine ersten Untersuchungen hat Zirkel in gewöhnlichem Licht ausgeführt; ein Jahr darnach sehen wir ihn von polarisirtem Licht Gebrauch machen, wieder einige Jahre später, 1868—1870 bringt er für seine mustergültigen Untersuchungen über die Basaltgesteine wiederholt Salzsäure in Anwendung um durch die zersetzende und auflösende Wirkung derselben Labrador von Oligoklas, Magnetit von Titaneisen zu unterscheiden.

Seitdem ist die Salzsäure das bevorzugte Reagens der Mikropetrographen, in den letzten Jahren allerdings ein wenig in Misscredit gekommen, weil man zu viel von ihr verlangte, ohne sich viel um die Concentration der Säure, die Temperatur, Dauer der Einwirkung und Controleversuche zu bemühen.

Im Wesentlichen hat man sich auf die Benutzung ihrer auflösenden und zersetzenden Wirkung beschränkt; nur ausnahmsweise wurde einem der Zersetzungsprodukte Beachtung gegönnt, so der Kohlensäure als Anzeichen von Calcit, dem Chlornatrium behufs Auffindung von Nephelin, der in gelatinöser Form färbungsfähigen Kieselsäure zur bequemen Auffindung von zersetzbaren Silikaten, wie Olivin, Chlorit u. dgl.

Von anderen mikrochemischen Reactionen sind aus den nächstfolgenden Jahren zu verzeichnen: die von Streng angegebene Anwendung des Fresenius'schen Reagens (Ammonium-Molybdat in Salpetersäure) auf Präparate in denen man Apatit vermuthet, die Färbung von Mineralien der Hauyngruppe durch Schwefeldampf nach der Methode von Knopp und Tinctionsversuche mit Fuchsinlösung an Opalen.

3.

Indessen die Anwendung chemischer Reactionen so geringe Fortschritte machte wurde eifrig an der Erweiterung optischer methoden gearbeitet. Aus der mikroskopischen Technik der Zoologen und Botaniker konnte die Verwendung farbengebender Gips- und Quarzplatten für Steigerung der Doppelbrechung, Orientirung der optischen Axen und Unterscheidung positiver und negativer Doppelbrechung fertig aus-

gebildet herübergenommen werden; dazu kam durch Tschermak (1869) die mikroskopische Untersuchung auf Dichroismus, anfangs mittelst der Haidinger'schen dichroskopischen Loupe, alsbald mittelst eines der beiden Nicols (am sichersten mittelst des unteren) und durch Descloizeaux' schöne Untersuchungen *) über die optischen Constanten der Feldspathe die Anpassung des Kobell'schen Stauroskops für mikroskopische Beobachtung. Den nunmehr ziemlich umfangreich gewordenen Beobachtungs-apparat brachte Rosenbusch in bequeme Form (1876) und verschaffte ihm durch sein mikrographisches Lehrbuch schnelle Verbreitung.

Optiker und Mechaniker kamen diesen Bestrebungen bereitwillig entgegen durch Construction von Schneide- und Schleifmaschinen, welche die Anfertigung durchscheinender Gesteinsplättchen zu einer weniger unangenehmen und zeitraubenden Arbeit machten und Durchschnitte nach bestimmten Richtungen zu nehmen erlaubten, sowie durch zweckmässige Einrichtung der Mikroskope und mikroskopischen Hülfsapparate. Hier sind vor allen zu nennen die Werkstätten von R. Fuess in Berlin, dessen Thätigkeit auf diesem Felde bahnbrechend gewesen ist, und der Gebrüder Seibert in Wetzlar.

4.

Für die Untersuchung nach optischen Methoden sind die Präparate geschickt, sobald sie vom überflüssigen Canadabalsam befreit sind und bleiben dafür geeignet, so lange man sie nur bewahren will. Alle Abänderungen der Untersuchung laufen auf leicht zu bewerkstelligende Abänderungen des optischen Apparats hinaus; an dem Object sind, ein zweckmässig construirtes Mikroskop vorausgesetzt, keine anderen Manipulationen, als Verschiebungen auf dem Objecttisch erforderlich.

Nimmt man hinzu, dass die mikroskopische Besichtigung,

*) Mehrere Memoiren in Comptes rendus und in Annales de chimie et de physique 1875 und 1876.

wie sie durch Sorby, Zirkel und Vogelsang ausgebildet war, in vielen Fällen binnen wenigen Minuten entscheidenden Aufschluss gab über Fragen, die an dem Handstück unmöglich gelöst werden konnten und dass die mikroskopischen Bilder von Gesteinspräparaten an Schärfe und Farbenpracht die von organischen Objecten vielfach übertreffen, so wird die Vorliebe, womit die optischen Methoden ausgebildet wurden, begreiflich. Es war reinliche Arbeit mit compendiösem Apparat, die ihr Object untersuchte und bestimmte, ohne etwas daran zu verderben, obendrein schnell und verhältnissmässig einfach auszuführen.

5.

Durch die Chemie war die Bestimmung der Mineralien nach formellen und physischen Eigenschaften, wie sie von Werner und Mohs zum System ausgebildet war aus ihrer gebietenden Stellung verdrängt worden; in der modernen Mikromineralogie und Mikropetrographie ist sie noch einmal zur Herrschaft gekommen mit mancherlei Eigenthümlichkeiten, theils vortheilhaften, theils auch nachtheiligen, die sich aus den Bedingungen ergeben, unter denen dünne Mineraldurchschnitte von zufälliger Richtung der Betrachtung unterliegen.

Völlig undurchsichtige Substanzen gehören für den Mikroskopiker zu den Ausnahmen; von häufiger vorkommenden sind nur drei zu nennen: Magneteisen, Titaneisen und Pyrit. Unebenheit der Flächen und Trübungen, die der Anwendung des Goniometers, des Polarisationsapparats und des Kobell'schen Stauroskops so oft im Wege stehen, werden im Dünnschliff beseitigt oder doch sehr vermindert. Spaltungsrichtungen, die sonst mit Hammer und Meissel aufgesucht werden mussten verrathen sich hier meistens auf den ersten Blick durch parallele Sprünge. Die »Einschlüsse" sind erst seit der Verbreitung des Mikroskops unter den Mineralogen Gegenstand eingehenden Studiums geworden. In gewissen Mineralien treten sie so constant auf, dass sie neue Species-Kennzeichen geliefert haben (Hauyn, Nosean, Leucit, Quarz, Granat).

Wo die optischen Hülfsmittel nicht dienen können befindet der Mikroskopiker sich der älteren Methode gegenüber im Nachtheil: den Mangel der schwierig oder gar nicht zu bestimmenden Kennzeichen der Härte und des specifischen Gewichts, die mangelhafte Beurtheilung von Glanz und Farbe, die unsichere Ableitung der Krystallformen aus zufälligen Durchschnitten, die unvollständige Kenntniss der chemischen Reactionen hat man durch die oben erwähnten Verfeinerungen und Erweiterungen der optischen Hülfsmittel auszugleichen gesucht.

Welche Erfolge die skizzirte Methode in den Händen geübter und scharfsinniger Beobachter geliefert hat, kann eine flüchtige Musterung der petrographischen Arbeiten der letzten fünfzehn Jahre lehren: sie haben nicht weniger als eine völlige Neugestaltung der Gesteinslehre herbeigeführt. Wie viel Uebung andererseits erforderlich ist, um zu einiger Sicherheit zu gelangen und wie viele Unsicherheiten, selbst bei sorgfältigster Arbeit, übrigbleiben, zumal wenn man mit älteren, von der Verwitterung bereits stark angegriffenen Gesteinen zu thun hat, weiss jeder, der sich einige Zeit mit Untersuchung von Dünnschliffen beschäftigt hat.

6.

Die Polarisationsapparate lassen sich nur in den Fällen für die Bestimmung des Krystallsystems verwenden, wo Spaltungsrichtungen oder scharf ausgeprägte Krystallumrisse die Orientirung der krystallographischen Hauptaxe ermöglichen. Bisweilen muss man lange suchen, bis dies gelingt. Bei der Untersuchung regulär krystallisirter und amorpher Substanzen lassen sie uns gänzlich im Stich; hier sind allein Unterschiede der Structur, der Durchsichtigkeit, der Färbung und im günstigsten Falle charakteristische Einschlüsse massgebend. Zu diesen misslichen Objecten gehört die »Grundmasse" sämmtlicher Gesteine von porphyrischer Structur. Nicht besser geht es mit den Verwitterungsproducten der älteren Feldspathe und Augite, die man als Saussurit und als Viridit aufgeführt findet und mit undurchsichtigen Massen

unbestimmter Form, wovon man die schwärzlichen als »Opacit", die röthlichen und bräunlichen als »Ferrit" bezeichnet hat, lauter Namen, die nur den Vortheil der Kürze vor vielen anderen Umschreibungen von »Weis ich nicht" voraus haben.

Mikrochemische Methoden.

7.

Gewiss ist schon manches mal der Wunsch aufgekommen, bei der Chemie Hülfe zu suchen, die in den Händen von Klaproth, Berzelius, Rammelsberg unschätzbare Dienste für die Unterscheidung und Classification der Mineralien geleistet hat, und ebenso gewiss wären wir bereits im Besitz eines Systems mikrochemischer Methoden für die Bestimmung der häufiger vorkommenden Mineralien, wenn dieselben für die Einwirkung von Reagentien nur annähernd so zugänglich wären wie die festesten organischen Gewebe. Morphologische Reagentien, welche durch Abänderung der Dichtigkeit wirken (Essigsäure für Zellkerne, Kali für Cuticularsubstanzen), sind hier, wegen fehlender Quellungsfähigkeit, gänzlich ausgeschlossen.

Tinctionsmethoden können nur in vereinzelten Fällen Anwendung finden, weil nur eine kleine Zahl von Mineralien die Fähigkeit besitzt, Farbstoffe aufzunehmen, und noch weniger dieselben festzuhalten vermögen. Maceration mit Säuren und Salzlösungen scheint mehr Erfolg zu versprechen, doch ist zur Zeit viel zu wenig von Versuchen in dieser Richtung bekannt, als dass sich darauf Trennungsmethoden gründen liessen. Die oben (1) erwähnten Aetzproben mit Salzsäure gehören hierher. Gewöhnlich wird die Probe an Gesteinspulver gemacht; dann sind ihre Ergebnisse schwierig zu beurtheilen und viele von den widersprechenden Angaben, durch welche dies Verfahren in Misscredit gekommen ist, dürften auf die Unklarheit und Ver-

worrenheit der mikroskopischen Bilder zurückzuführen sein, welche man bei seiner Anwendung erhält. In der bis jetzt gebräuchlichen Weise (als tropfbare Flüssigkeit) auf Schliffpräparate angewendet führt die Säure oft genug zu völliger Zerstörung derselben.

Es bleibt vor der Hand kaum etwas anderes übrig, als nach vollständiger Zersetzung einer Portion der Silikate, sei es auf begrenzten Partien der Schliffflächen, oder in ausgelesenen Splittern, die elementaren Bestandtheile nach den Regeln der qualitativen Analyse unorganischer Körper aufzusuchen.

8.

H. Rosenbusch, der sich mehrmals chemiseher Hülfsmittel bedient hat, räth in seiner mikroskopischen Physiographie (Bd. I, S. 108) mit der optischen Untersuchung allemal die chemische zu verbinden und giebt (S. 107—111) einige Anweisungen über mikrochemische Manipulationen.

Er will mittelst Säuren und Alkalien Gesteinspulver, resp. Dünnschliffe zur partiellen Lösung bringen, den ungelösten Rückstand, in Canadabalsam vertheilt, der mikroskopischen Betrachtung, die Lösung der gewöhnlichen qualitativen Analyse, mit gelegentlicher Beihülfe des Mikroskops, unterwerfen. Dabei sind Filtrationen unvermeidlich: Der Filtrirapparat, den Rosenbusch beschreibt, wird den fatalen Zeitverlust und den für kleine Mengen von Material noch fataleren Substanzverlust bei dieser Operation erheblich beschränken — besser wäre es, Methoden zu haben, die eine qualitative Mineralanalyse ohne Filtration auszuführen gestatten.

Bořicky's Methode

9.

E. Bořicky, dem das Verdienst zukommt, zuerst ein zusammenhängendes System mikrochemischer Reactionen für Gesteinsuntersuchung bekannt gemacht zu haben, sucht die

Filtration überall auszuschliessen. Dieser Vortheil, sowie die Eleganz seiner Methode, die nur *ein* Hauptreagens verwendet, gereichen ihr sehr zur Empfehlung.

Bořicky hat seine »Universalmethode" auf die beiden Eigenschaften der Kieselflussäure gegründet, während des Verdunstens Fluorwasserstoff abzugeben und mit Alkalien schwer lösliche krystallinische Verbindungen zu bilden, von gut unterscheidbaren Formen. Er lässt $3^1/_2$ procentige Kieselflussäure in Berührung mit Mineralfragmenten oder aufgeschliffenen Gesteinsflächen verdunsten *) und unterscheidet die entstandenen Fluosilikate nach ihrer Form †). Das Kalium liefert cubische Krystalle, das Natrium hexagonale Säulen mit stumpfer Pyramide. Das Calcium giebt spindelförmige Gebilde, die Metalle der Magnesiumgruppe Rhomboëder. Die Strontiumverbindung gleicht der des Calciums. Barium giebt kleine zugespitzte Nadeln, Lithium winzige sechsseitige Pyramiden. Die Beobachtung wird bei 200 facher bis 400 facher Vergrösserung vorgenommen.

Calcium und Strontium werden mittelst Schwefelsäure unterschieden, die mit dem gleichen Volumen Wasser verdünnt ist §). Hierdurch werden die Krystalle des Calciumfluosilikats in Aggregate von Gipsnadeln verwandelt, während Strontiumfluosilikat zu einer feinkörnigen Masse wird. Natriumfluosilikat wird durch die verdünnte Schwefelsäure nicht angegriffen.

Eisen und Mangan werden von Magnesium mittelst Chlor unterschieden, welches den Krystallen des Eisenfluosilikats eine citrongelbe, denen des Manganfluosilikats eine röthliche Färbung ertheilt, oder mittelst Schwefelammonium, wodurch das Eisensalz schwarz gefärbt wird, das Mangansalz röthlichgrau mit körniger Structur, während das

---

*) E. Bořicky, Elemente einer neuen chemisch-mikroskop. Mineral- und Gesteinsanalyse, S. 15 u. f., in *Archiv der naturw. Landesdurchforsch. v. Böhmen,* 3 Bd. 5 Abth,

†) a. a. O. S. 17—22.

§) a. a. O. S. 22.

Magnesiumsalz von beiden Reagentien wenig angegriffen wird *).

In Betreff der übrigen Reactionen, welche der Verfasser mittheilt (Aetzungen, Glühversuche u. dgl.) muss ich auf die Original-Abhandlung verweisen; ich will nur noch darauf aufmerksam machen, dass mehrere der Wirkungen, welche er dem Chlor zuschreibt, auf Rechnung der begleitenden Salzsäuredämpfe kommen dürften.

10.

Bořicky hat durch zahlreiche Probeversuche an Mineralien bewiesen, dass mit seiner Methode gute Resultate zu erzielen sind, und meine eigenen Erfahrungen haben mich zu derselben Überzeugung geführt. Wenn ich gleichwohl von derselben abgegangen bin, so ist dies veranlasst worden durch Mängel der Methode und durch technische Schwierigkeiten bei ihrer Ausführung, die sich während des Arbeitens mit derselben fühlbar machten und zu eingehender Prüfung, weiter, im Verlauf derselben zu Ergänzungen und stetig um sich greifenden Abänderungen führten.

11.

Die Probe auf Alkalimetalle lässt an Schärfe kaum etwas zu wünschen übrig, wohl aber an Bequemlichkeit. Das einfachste Verfahren ist: einen Tropfen Kieselflussäure auf dem Schliffpräparat eintrocknen zu lassen. Dabei entstehen indessen wenig durchscheinende weisse Krusten †), auf denen die kleinen, ebenfalls weissen Krystalle, namentlich die sehr

---

*) ebend. S. 23.

†) Bořicky, a. a. O. S. 15, 16. Der Verf. spricht auf S. 16 von Kieselerde, die durch starke Kieselflussäure in reichlicher Menge ausgeschieden werde. Dann müsste die Kruste durch Kali beseitigt werden, was nur theilweise geschieht, leicht und vollständig nach Behandlung mit starker Schwefelsäure. Es handelt sich also um schnelle Bildung von Fluosilikaten und in den meisten Fällen auch von schwer zu zersetzenden Fluoaluminaten.

durchscheinenden des Kaliumfluosilikats nicht gut hervortreten. Weit bessere Bilder erhält man von Mineralfragmenten, die ganz von dem Säuretropfen bedeckt sind (S. 15), weil bei diesem Verfahren ein Theil der Fluosilikate sich auf farbloser, vollkommen durchsichtiger Unterlage präsentirt. Die besten Krystallisationen hat mir das Auskochen der Fluosilikate mit Wasser und Uebertragung der Lösung auf ein Objectglas geliefert; ein Verfahren, das Bořický (S. 31) für Proben mit Fluorwasserstoff benutzt.

12.

Fluorwasserstoff wendet Bořický für diejenigen Silikate an, die von Kieselflussäure schwierig angegriffen werden; im Allgemeinen bevorzugt er die Kieselflussäure, die nach ihm (auf Schliffpräparaten) deutlichere Krystalle giebt (der schwächeren und langsameren Einwirkung entsprechend) und das Mengenverhältniss der Bestandtheile zu schätzen gestattet, gleiche Löslichkeit vorausgesetzt (S. 14). Will man im Platinschälchen auskochen, so fallen auch mit Flussäure die Krystallisationen nach Wunsch aus, und was die quantitative Schätzung angeht, so wird diese vom Verfasser selbst (S. 15) auf ein bescheidenes Maass eingeschränkt, mit Rücksicht auf die ungleiche Löslichkeit der Fluosilikate *) und den ungleichen Widerstand, den verschiedene Minerale der Säure entgegensetzen. Diese ungleiche Angreifbarkeit, die mit dem Siliciumgehalt abnimmt, kann zu Partialanalysen benutzt werden: aus einem Feldspath-Augitgestein wird z. B. bei reichlichem Feldspathgehalt anfangs fast nur dieser, kein Augit ausgezogen, allein die Trennung ist nicht scharf, und das schwerlösliche Mineral (Augit, Glimmer) erleidet seinerseits auch eine partielle Zersetzung, so dass es wiederholter Behandlung mit Kieselflussäure bedarf, um alle Bestandtheile in die Form von Fluosilikaten überzuführen. Wo der Zeit-

*) Kaliumfluosilikat löst sich in 833 Th. Wasser von 17.5 C. Natriumfluosilikat in 153 Th., Lithiumfluosilikat in 1.9 Th., das Calcium- und Magnesiumsalz gehören ebenfalls zu den leicht löslichen.

aufwand nicht störend ist, kann das Verfahren vortheilhaft sein.

Etwa 4 Stunden sind ausreichend um mit 3 procentiger Kieselflussäure kräftige Einwirkung auf Feldspath zu erhalten, für Augit und Amphibol sind 6—7 Stunden genügend, für Glimmer ist ein Zusatz von Fluorwasserstoff wünschenswerth.

Sieht man von der Arbeit auf Schliffflächen ab, so kann man starke Flussäure nehmen, mit welcher man die feingeriebene Mineralprobe im Platinschälchen digerirt. Binnen wenigen Minuten ist völlige Zersetzung eingetreten, worauf man, Sicherheits halber ein wenig Kieselflussäure zufügt, abdampft, die trockne Masse mit Wasser aufkocht und auf dem Objectglase zur Krystallisation bringt.

Es liegt auf der Hand, dass die Mineralprobe viel kleiner genommen werden kann, als Bořicky sie anräth; er muss stecknadelkopfgrosse Körner verwenden, da er sich mit partieller Aufschliessung begnügt.

13.

Die Glasplatten, welche zu Versuchen mit Flussäure, Kieselflussäure oder Lösungen von Fluoriden dienen sollen, müssen durch einen Aetzgrund geschützt werden, wozu Bořicky Canadabalsam benutzt. Derselbe liefert eine glatte, bei vorsichtigem Abdampfen recht ebene und farblose Kruste, die der Einwirkung von Kieselflussäure und selbst schwacher Flussäure gut widersteht. Das Schutzmittel wäre tadellos, wenn sich die Krystallchen demselben nicht so fest anhängten, dass Abspülen zur Reinigung nicht ausreicht. Abwaschen ist ebenso wenig statthaft, der Ueberzug erhält dadurch Schrammen. Man bedarf also für jeden Versuch eines besonderen präparirten Glases, und hierin liegt für mich eine grosse Unbequemlichkeit der Bořicky'schen Methode.

14.

Wendet man sich von den Feldspathen, für deren Untersuchung es vor Allem auf die Alkalimetalle ankommt, zu

den Augiten und Amphibolen, so treten principielle Mängel der Methode hervor. Hier handelt es sich zunächst um die Unterscheidung und quantitative Abschätzung von Calcium, Magnesium und Eisen, in zweiter Linie um den Nachweis des Aluminiums.

15.

Calciumfluosilikat gehört zu den leicht löslichen Salzen. Bořicky giebt an, dass man seine Krystalle durch Schwefelsäure in Gipsnadeln umwandeln könne und E. Fleischer (Titrirmethode, S. 34, 35) verwendet es gar als Reagens zur Fällung von Kalium und Natrium an Stelle der Kieselflussäure. Das Salz kommt denn auch viel später zur Krystallisation als die Kalium- und Natriumverbindung, und mehrmals ist mir der Nachweis von Calcium mittelst Schwefelsäure binnen weniger als zwei Minuten gelungen, wo mich die Kieselflussäure im Stich gelassen hatte. Nach Bořicky kann dass Natriumfluosilikat calciumhaltig ausfallen — die Beobachtung (S. 23) ist richtig, nur muss sie auch auf das Kaliumsalz ausgedehnt werden, das, aus kalkreichen Mischungen abgeschieden, mit Schwefelsäure Gips bildet, freilich weniger, als das Natriumsalz. Es handelt sich hier um Verunreinigung mit concentrirter Lösung (Mutterlauge) des schwierig krystallisirenden Calciumfluosilikats. zu dessen Aufnahme das Natriumsalz vermöge seiner mikrolithischen Structur besonders geeignet ist.

Magnesiumfluosilikat hat dieselbe Form, wie die entsprechende Eisen- und Manganverbindung. Nach Analogie der Carbonate sollte man aus gemischten Lösungen Krystalle erhalten, die alle genannten Metalle in sich aufgenommen hätten. Dies scheint indessen nur in beschränktem Maasse der Fall zu sein. Selbst bei Gegenwart von eben so viel Eisen giebt das Magnesium ein Fluosilikat, das durch Schwefelammonium nur wenig gefärbt wird. Schlimmer ist die Löslichkeit des Salzes. Es giebt spät und schwierig Krystalle, die in feuchter Luft zerfliessen, eine Eigenschaft, die es mit dem entsprechenden Eisensalz theilt. Das dringende Bedürf-

niss nach einer besseren Reaction auf Magnesium hat mir den ersten Anlass zum Suchen nach neuen mikrochemischen Methoden gegeben.

16.

Vom Aluminium sagt Bořicky (S. 15) dass es mit Kieselflussäure keine Neubildungsprodukte in Krystallform biete. Aluminiumfluosilikat ist nicht krystallisationsfähig, seine Lösung trocknet zu einer gummiähnlichen Masse ein. Allein, nach Deville's Versuchen *) wird nicht unter allen Umständen dies Salz gebildet. Kieselflussäure giebt mit einem Ueberschuss von Kaolin Aluminiumfluorid und diese Umsetzung wird noch leichter in Gegenwart von alkalischen Fluoriden vor sich gehen, die mit Aluminiumfluorid sehr feste, beinahe unlösliche Verbindungen bilden. Wenn ein Gemenge von Kieselflussäure und Fluorwasserstoff zur Aufschliessung, benutzt wurde, kann man, wofern genug Alkalimetall vorhanden war, darauf rechnen, alles Aluminium in Form dieser Fluorsalze zu erhalten.

Wahrscheinlich hat Bořicky die fraglichen Verbindungen übersehen, weil sie genau die Formen der entsprechenden Fluosilikate wiedergeben. Kaliumfluoaluminat gleicht dem Kaliumfluosilikat, das Natriumfluoaluminat giebt dieselben hexagonalen Krystalle (∞ p . p) wie das Natriumfluosilikat. Ich habe mich überzeugt, dass die zugespitzen Prismen doppeltbrechend sind, während die Hexagone zwischen gekreuzten Nicols dunkel werden und mit Rücksicht auf die, nach Descloizeaux, trikline Form des Kryoliths diesen Versuch mehrfach, an verschiedenen Präparaten, wiederholt. Von Kryolith, der nach drei, zu einander senkrechten Richtungen spaltete, vermochte ich keine Axenbilder zu erhalten; im polarisirenden Mikroskop zeigten die Platten Aggregatpolarisation.

---

*) Wurtz, *Dict. d. Chem.*, Art. Aluminium, Fluoride.

17.

Man könnte von der beschriebenen Reaction zwischen Alkalifluoriden und Aluminiumfluorid nach vorhergegangener Verjagung des Siliciums als Kieselfluorid vielleicht Nutzen ziehen für den Nachweis des Aluminiums, der nach dem gebräuchlichen Verfahren in der Mehrzahl der Fälle recht umständlich und für mikroskopische Beobachtung ganz ungeeignet ist. Von diesem Gesichtspunkt aus musste das Verhalten der übrigen dreiwerthigen Metalle geprüft werden; dabei stellte sich heraus, dass mit dem Natriumaluminiumfluorid isomorph sind die Natriumdoppelfluoride des Eisens, des Mangans, des Chroms und des Urans. Das alkalische Fluorid kann durch Chlorid ersetzt werden; wendet man Chlornatrium im Überschuss und in fester Form an, so entstehen an Stelle der hexagonalen Tafeln sechsblättrige Blumen, lebhaft an gewisse Formen der Schneesterne erinnerd. Übrigens geht die Übereinstimmung der Krystallform unter den Fluorsalzen noch viel weiter, ohne dass ich dabei von Isomorphie sprechen möchte.

Den soeben besprochenen schliessen sich an die Fluorsalze des Zinns, des Wolframs, des Molybdäns, des Tantals und des Niobs, während die des Bors, des Titans und des Zirkoniums sich davon entfernen.

Natriumfluoborat gleicht dem entsprechenden Fluosilikat; das Fluotitanat ist ebenfalls hexagonal, doch sind seine Kryställchen viel weniger scharf begrenzt. Es scheidet sich langsam in Gestalt rundlicher Klümpchen ab, die nach etwa 10 Minuten allmählich hexagonalen Umriss annehmen. Natriumfluozirkoniat kommt viel schneller zum Vorschein, seine Kryställchen sind quadratisch-pyramidal (sogen. Briefcouvertform).

Kaliumfluoborat hat gleiche Form wie Kaliumfluotitanat, beide krystallisiren in Rautenform, oft mit abgestumpften Ecken (6 oder 8 seitige Blättchen). Die Rauten der Titanverbindung haben besondere Neigung durch einseitige Ausbildung des einen Paars abstumpfender Flächen in Raphiden überzugehen. Kaliumfluozirkoniat verhält sich abweichend.

Diese Verbindung scheint sehr wenig löslich zu sein, sie konnte nur in Gestalt winziger Körnchen erhalten werden; dasselbe gilt von dem Calciumsalz, indessen das Calciumfluotitanat leicht löslich ist.

Ich habe diese Reactionen mit einiger Ausführlichkeit abgehandelt, weil sie mir ein Mittel zur Entscheidung der Frage zu bieten scheinen, ob gewisse rothgelbe Kryställchen in Gabbros und Eklogiten Rutil oder Zirkon sind.

Marignac *) gibt für einzelne der besprochenen Fluorsalze andere Formen an. Ich habe die Versuche an den betreffenden Verbindungen mit gleichbleibenden Resultaten wiederholt und glaube dass es sich um abweichende Ausbildung einzelner Flächenpaare handelt. Diesen Differenzen weiter nachzugehen musste ich mir versagen, da für mich die Untersuchung der Fluorsalze nur von nebensächlicher Bedeutung war, ein unvermeidlicher Umweg zu dem Ziel, das ich mir gesteckt hatte.

18.

Nachdem ich die Ueberzeugung gewonnen, dass bei Befolgung von Bořický's Methode nicht allein die Auffindung und Unterscheidung von Calcium und Magnesium mit Schwierigkeit und Unsicherheit behaftet ist, dass ausserdem Silicium mit Aluminium und dieses wieder mit Bor, Eisen, allenfalls auch mit Mangan und Chrom verwechselt werden kann, schien es mir geboten, die Methode zu verlassen und mich nach anderen umzusehen, die, vielleicht weniger einfach und elegant, einen höheren Grad von Zuverlässigkeit erreichen lassen und grössere Bequemlichkeit und Schnelligkeit der Ausführung bieten.

Neue mikrochemische Methode.

19.

Ein vollständiges System mikrochemischer Methoden für

*) Marignac, *Ann. d. ch. et de phys.*, LX, 301.

die Zwecke des Petrographen müsste ausreichende Mittel an die Hand geben:

1. für die qualitative Untersuchung kleiner Fragmente der häufiger vorkommenden Minerale, Fragmente deren Minimalgewicht ich zu 0.1 milligr. ansetzen möchte, entsprechend einem Durchmesser von etwa 0.3 millim.;

2. für qualitative Proben auf Schliffpräparaten, behufs localisirter Reactionen;

3. für die Scheidung von Fragmenten der häufigsten Mineralien, behufs Ergänzung der qualitativen durch quantitative Untersuchung.

Die unter 1) begriffenen Reactionen müssten ferner noch folgenden Anforderungen genügen:

a. Filtration ist, wegen Zeit- und Substanzverlust und leicht möglicher Verunreinigung der geringen Substanzmengen ausgeschlossen.

b. Als zweckmässige Reactionen können nur solche gelten, die entweder zu charakteristischen mikroskopischen Krystallen oder zu intensiv gefärbten Niederschlägen führen.

c. Krystallisationen, die langsames Verdunsten erfordern, sind im Interesse der Zeitersparniss zu vermeiden; die Untersuchung eines Minerals sollte höchstens zwei Stunden in Anspruch nehmen.

d. Alle Reactionen müssen so deutlich und sicher sein, alle Operationen so einfach in ihrer Ausführung, dass auch minder Geübte sich der Methode mit Erfolg bedienen können. Aus diesem Grunde werden Reagentien von hohem Aequivalent im Allgemeinen vorzuziehen, Reactionen, welche Doppelsalze liefern, vortheilhafter sein, als solche, die zu einfachen Verbindungen von gleicher Löslichkeit führen, wasserhaltige Verbindungen werden ein günstigeres Resultat erwarten lassen, als wasserfreie.

Vorbereitung der Mineralproben.

20.

1. Wenn grössere Quantitäten von Gestein zur Verfügung

stehen, Handstücke oder mehrere Scherben, so ist es oftmals vortheilhaft, davon dünne Splitter zu schlagen und aus diesen mittelst einer Beisszange Mineralfragmente auszubrechen. Ich wende dies Verfahren mit Vorliebe an, wenn die gesteinsbildenden Krystalle die Grösse von 1.5 Millim. erreichen. Man überzeugt sich unter der Lupe, dass man mit Körnchen von einerlei Structur, Farbe und Glanz zu thun hat und beseitigt nöthigenfalls anhängendes metallisches Eisen durch Königswasser.

2. Mikrokrystallinische Gesteine muss man wohl oder übel im Stahlmörser, weniger gut in Papier auf dem Ambos, zerkleinern, und nach Beseitigung des Staubes durch ein feines Drahtsieb (einfacher durch Abblasen) unter der Lupe, resp. schwacher Vergrösserung des zusammengesetzten Mikroskops mit der Präparirnadel oder einer feinen Pincette die gewünschten Körner ausklauben. Die Nadel wird, um das Anhaften der Körnchen zu erleichtern, von Zeit zu Zeit mit ein wenig Glycerin befeuchtet und die Körnchen in einem Wassertropfen übertragen, worin sie sich von der Nadelspitze ablösen.

3. Sind die Gemengtheile eines Gesteins nicht mit Sicherheit im groben Pulver zu unterscheiden, so muss man zu einem Schliffpräparat greifen, das nicht dünner gemacht wird, als nöthig ist um ihm für die Besichtigung bei hundertfacher Vergrösserung genügende Durchscheinendheit zu geben. Da kein Deckglas angebracht werden kann, giebt man dem Präparat einige Politur, wozu es in den meisten Fällen weiter nichts bedarf, als mit dem Zufügen von Schmirgel aufzuhören, statt dessen in kurzen Zwischenräumen reichlich Wasser auf die Schleifplatte zu bringen und das Präparat in kleinen Kreisen zu bewegen, so dass es schliesslich fast nur noch mit Wasser und blankem Eisen in Berührung ist. Im Nothfall lässt sich übrigens auch auf matten Präparaten, die für mittelstarke Objective erforderliche Durchscheinendheit durch Bestreichen mit Glycerin oder Oel herstellen.

Ein weiteres Erforderniss ist noch eine gewisse Nachgiebigkeit des zwischen Gestein und Objectglas befindlichen

Canadabalsams, die nöthigenfalls durch mässiges Erwärmen erzielt wird.

Man kann nun unter dem Mikroskop (mit schwachem Objectiv und starkem Ocular) vermittelst eines schmalen Messerchens oder einer messerförmig geschliffenen starken Präparirnadel beliebige Stücke von dem Gesteinsblättchen abbröckeln, ohne dass die Sprünge viel weiter laufen, als beabsichtigt war. Man arbeitet vom Rande nach der Mitte zu und beseitigt zwischendurch, nach stärkerem Erwärmen, übermässig sich anhäufende Brocken durch Abkratzen. Schliesslich wird der gewünschte Mineraldurchschnitt in derselben Weise abgelöst; etwa anklebende fremde Körnchen können nach dem Ausglühen, das in jedem Fall vorzunehmen ist, entfernt werden, wie unter 20,2 gelehrt ist.

Die auf eine oder die andere Weise isolirten Mineralfragmente müssen, behufs schneller und vollständiger Aufschliessung zu feinem Pulver gerieben werden. Um Verlust zu vermeiden bedeckt man die Körnchen während des Zerdrückens im Achatmörser mit einem Streifen feinen Filtrirpapier, das mit dem Hornmesser abgekratzt wird. In vielen Fällen ist hierfür, sowie zum Sammeln des an Pistil und Reibschale haftenden feinen Pulvers ebensogut ein stählernes Messer brauchbar, nicht aber ein Messer oder Spatel von Glas, Porzellan oder Elfenbein.

Aufschliessung der Proben.

21.

Zur Auflösung des Mineralpulvers dient rauchende Flussäure (für 0.5 Mgr. Substanz 2—3 Centigr. Säure) oder Fluorammonium und starke Salzsäure. Von der Flussäure des Handels muss man etwa 1 C. C. mit einigen Centigrammen Schwefelsäure abdampfen und den Rückstand auf Natrium, Calcium und Aluminium untersuchen. Ist sie unrein, so kann sie doch sehr wohl zur Bereitung von Fluorammonium dienen. Einem Rückstand liefert die Verdampfung der käuf-

lichen Flussäure auch wenn dieselbe keine Metalle enthält; derselbe ist braun, wird durch Erhitzen mit Schwefelsäure kohlig, er stammt aus den Guttaperchaflaschen, worin man die Säure versendet und bewahrt.

Wem dieser Rückstand, der sich im mikroskopischen Bilde in Gestalt braunschwarzer Flocken zeigt, unangenehm ist, kann sich des Fluorammoniums bedienen, unter Zusatz von Salzsäure. Es wirkt nicht so kräftig, wie rauchende Flüssäure und man hat, wenn auf Kalium untersucht werden soll, dafür zu sorgen, dass nach dem Abdampfen die Temperatur bis zu dunkler Rothglut gesteigert werde.

Uebrigens bietet die Aufbewahrung beider Aufschliessungsmittel nahezu gleiche Unbequemlichkeit, beide müssen in Gefässen von Platina oder Guttapercha bewahrt werden. Die grossen Guttaperchaflaschen, in denen die Flussäure versendet wird, sind, wo es sich um die Anwendung von Centigrammen handelt, recht unbehülflich; am passendsten sind Fläschchen von ca. 30 C. C. Inhalt, in deren Guttaperchastöpsel ein Löffelchen von Guttapercha oder ein Platindraht eingeschmolzen ist, dessen freies Ende man zu einer Schraube von ca. 3 mm. Durchmesser windet, die als Tauchpipette dient. Ein solches Fläschchen ist nicht leicht zu erhalten, noch weniger leicht im Laboratorium anzufertigen. Conische Guttaperchagefässe für Fluorammonium lassen sich ohne Schwierigkeit aus kreisrunden Scheiben zwischen zwei in einander passenden Porzellantiegeln pressen. Man erweicht die Guttaperchascheiben in heissem Wasser und bestreicht die pressenden Flächen mit Oel. Der Deckel wird in derselben Weise zwischen zwei Tiegeldeckeln geformt, von deren einem man die Oese abgebrochen hat. Die Aufschliessung wird in halbkugeligen Platinschälchen von 1 Cm. Durchmesser vorgenommen *), wie sie für Löthrohrproben gebräuchlich sind. Um sie bequem reinigen zu können, lässt man in ein Stück hartes Holz (zweckmässig eine hölzerne

---

*) Von sehr guter Qualität zu beziehen von der Deutschen Gold- und Silberscheide-Anstalt in Frankfurt a.M. (vormals H. Rössler).

Dose) entsprechende Vertiefungen drehen, oder man formt sie in Gips ein, der nachträglich mit Schellackfirniss getränkt wird. Man kann sie alsdann, ohne Verbiegung fürchten zu müssen, gründlich putzen. Concave Deckel für Sublimationen kann man aus dünnem ausgeglühtem Platinblech schlagen. Man thut dies auf Blei mit Hülfe der zu den Plattnerschen Capellenformen gehörigen Stempel.

In die Schälchen kommen zunächst ein paar Tropfen Flussäure oder Fluorammonium und Sälzsaure, darauf das feingeriebene Silikat. Man dampft unter mässiger Erwärmung ab, fügt, wenn nöthig, noch einmal Flussäure zu und wiederholt das Abdampfen. Bei dieser und der folgenden Operation hat man sich vor den Dämpfen zu hüten, da selbst geringe Quantitäten Flussäure äusserst unangenehme Wirkungen hervorbringen können, wenn sie mit Wunden in Berührung kommen.

Die trockne Masse von Fluoriden wird nunmehr mit so viel verdünnter Schwefelsäure abgedampft, dass graue Dämpfe von Schwefelsäurehydrat in reichlicher Menge entweichen. Hierauf ist zu achten, damit nicht Fluorsalze des Siliciums und Aluminiums unzersetzt bleiben.

Die Schwefelsäure darf nicht bis auf die letzte Spur verdampft werden; ein kleiner Überschuss derselben ist der Lösung in Wasser und der Krystallbildung in mehreren Fällen sehr förderlich und verhütet ausserdem das lästige Eintrocknen flacher Tropfen während der mikroskopischen Beobachtung *). Man setze also nöthigenfalls vor dem Aufkochen mit Wasser ein Minimum von Schwefelsäure zu und erhitze nochmals bis zum Rauchen.

Wasser wird in reichlicher Menge angewendet: das Schälchen wird zur Hälfte gefüllt und der Inhalt unter gelindem

---

*) In Präparaten, die einige Zeit bewahrt werden sollen, kann der Verdunstung durch behutsames zusetzen von Glycerin ein Ende gemacht werden, worauf man mittelst dicken Asphaltlacks ein Deckglas darauf befestigt. Ist die Verdunstung einmal zu weit gegangen so hilft man sich mit Anhauchen, oder mit einem minimalen Wassertröpfchen, wie sie an den in 23 erwähnten Platinhäkchen hängen bleiben.

Sieden so weit verdampft, dass man von 0.1 Mgr. Substanz ein Centigr. Lösung erhält.

Nachweis des Calciums.

22.

Die Lösung von Sulfaten wird mittelst einer Capillarpipette aufgenommen und davon durch vorsichtiges Blasen ein Tröpfchen von 2—3 mm. Durchmesser auf eine reine Glasplatte gebracht. Als Pipette dient ein hohler Glasfaden von ca. 0.2 mm. im Lichten. Mit Hülfe von dergleichen Glasfäden kann man das in Arbeit genommene Quantum Substanz, wenn es auch nur 0.1 mgr. beträgt, auf mehrere Versuche vertheilen und darin die Lösungen geräume Zeit bewahren *).

Die Glasplatte mit dem Tropfen wird ohne Deckglas unter das Mikroskop gebracht, dem man 150 fache bis 250 fache Vergrösserung gegeben hat. Ich ziehe es vor, ohne Deckglas zu arbeiten und das Mikroskopobjectiv durch ein mit Glycerin untergeklebtes Glimmerblättchen zu Schützen, weil mir die Verdunstung des Probetropfens oftmals gute Dienste geleistet hat und weil die Wirkung der Reagentien in dem freiliegenden Tropfen eine viel schnellere und gleichmässigere ist, als unter einem Deckglas.

Enthielt das in Arbeit genommene Mineral Calcium in irgend erheblicher Menge so sieht man sofort oder doch binnen zwei Minuten Gipskrystalle von der gewöhnlichen Form ∞ p. p. ∞ p $\overset{\frown}{\infty}$, meist auf dem Klinopinakoïd liegend (Fig. 3). War viel Calcium zugegen, so ist das ganze Gesichtsfeld voll von kurzen rudimentären Prismen, die dem Gips angehören, zwischen diesen entstehen dünne, spiessige

---

*) Lässt man ein solches Röhrchen einige Stunden in verticaler Stellung, so klärt sich die Lösung darin. Man befestigt es zu dem Ende mit Klebwachs an ein Reagirglasgestell.

Krystalle, die oft zu unregelmässigen Rosetten verwachsen sind, noch dünner fallen sie aus in Lösungen, die viel Salzsäure enthalten. Später entstehen grössere Krystalle, hauptsächlich am Rande des Tropfens, an denen man Winkelmessungen vornehmen kann, unter denen man auch nicht selten die bekannten Schwalbenschwanz-Zwillinge findet. Die Gipskrystalle haben im Mittel 60 mikr. Länge bei 6 mikr. Breite.

Selten wird man in die Lage kommen, der Abscheidung des Gipses durch Alkohol nachhelfen zu müssen. Man lässt zu diesem Ende das Präparat einige Minuten uuter einem Pappkästchen verweilen, dessen Boden man mit ein paar Tropfen Alkohol befeuchtet hatte. Die Krystalle, welche man nach diesem Verfahren erhält, gleichen denen, welche in salzsauren Lösungen durch zusatz von Schwefelsäure entstehen. In den meisten Fällen führt die Verdunstung zum Ziel; mit einigem Abwarten wurden aus einer Lösung, die nicht mehr als 0.3 pro mille Ca O enthielt, ohne Hülfe von Alkohol Krystalle erhalten.

Die Empfindlichkeit der Reaction ist sehr befriedigend: 0.0005 Mgr. Ca O sind nachweisbar. Durch Alkoholdampf kann sie auf das Vierfache gesteigert werden, freilich, wie schon angedeutet wurde, auf Kosten von Grösse und Formvollendung der Krystalle. Versuche mit den üblichen Fällungsmitteln: Ammoniumoxalat, Oxalsäure und Ammoniumcarbonat führten nicht zu brauchbaren Resultaten. Die Kryställchen von Calciumoxalat und Calciumcarbonat fallen, wenn man nicht übermässig lange Zeit auf den Versuch verwenden will, zu klein und undeutlich aus.

Nachweis des Kaliums.

23.

Zu dem Tropfen, in welchem man nach Gipskrystallen gesucht hat, wird ein Tröpfchen Platinchlorid gefügt. Man bedient sich dazu eines in Glas eingeschmolzenen Häkchens

von Platindraht — Oesen sind weniger leicht und sicher zu reinigen — und setzt das daran hängende Tröpfchen der concentrirten Platinlösung in die Mitte des Probetropfens. Die Krystalle des Kaliumplatinchlorids bilden sich dann vorzugsweise am Rande, binnen einigen Minuten, die man benutzt um die Probe auf Natrium oder Aluminium vorzubereiten. Bleiben die Krystalle zu lange aus, so kann in der unter 22 beschriebenen Weise mit Alkohol nachgeholfen werden.

Das Salz bildet lichtgelbe, äusserst scharf ausgebildete Octaëder von auffallend starkem Brechungsvermögen. Ihre Grösse wechselt zwischen 10 und 30 Mikr. Aus concentrirten Lösungen erhält man viele kleine Krystalle, nicht selten zu kleeblattförmigen Drillingen und Vierlingen verwachsen (Fig. 4). In Chloridlösungen entstehen sie schneller und fallen sie kleiner aus, als in Sulfatlösungen. Grosser Überschuss von Schwefelsäure ist ihrer Entstehung hinderlich.

An dem Platinchlorid haben wir ein mikrochemisches Reagens auf Kalium, das nichts zu wünschen übrig lässt. Die Reaction ist sicher, leicht wahrzunehmen, sie ist, da Caesium und Rubidium zu den Seltenheiten gehören, charakteristisch und sehr empfindlich. Nachweisbar: 0.0006 Mgr. $K^2 O$. Kieselflussäure wirkt weniger schnell und die Kryställchen von Kaliumfluosilikat sind viel weniger gut wahrzunehmen, als die des Platindoppelsalzes.

Phosphormolybdänsäure und Natriumphosphomolybdat wirken noch langsamer als Kieselflussäure; die Abscheidung der Kaliumverbindung aus einer Lösung, die 2 p. C. Kaliumsulfat enthielt, begann erst als der Rand des Tropfens eintrocknete. Übrigens gleichen die Krystalle in Grösse und Farbe denen des Platindoppelsalzes; octaëdrische Krystalle der beiden Verbindungen sind einander zum Verwechseln ähnlich, auch kommen hier die oben beschriebenen Vierlinge vor. Die vorherschende Form ist die des Rhombendodekaëders.

Cerosulfat bewirkt eben so schnell, wie Platinchlorid die Abscheidung eines Doppelsalzes, das aber durch Form und

Farbe viel weniger gut gekennzeichnet ist als das Kaliumplatinchlorid. Es soll unter 24 näher besprochen werden.

Nachweis des Natriums.

24.

Der Nachweis des Natriums bietet die grössten Schwierigkeiten. Ich habe lange nach einem guten Reagens gesucht und bin schliesslich bei der Anwendung von Ceriumsulfat stehen geblieben. Dies Salz zeigt, wie die Kieselflussäure, beide Alkalimetalle an; während aber Bořicky's Reagens empfindlicher ist für das Kalium verhält sich hier die Sache umgekehrt: das Natrium-Cerosulfat kommt vor dem Kalium-Cerosulfat zum Vorschein. Die Doppelsalze des Lithiums und des Ammoniums sind viel weniger schwer löslich, in noch höherem Maasse gilt dies von Calcium und Magnesium, die überdies andere Krystallgebilde liefern. Das gelbe Cerisulfat gab kein brauchbares Resultat.

Das Cerosulfat verwendet man in gesättigter Lösung, von der man ein Tröpfchen neben den Probetropfen setzt, in ca. 5 Mm. Entfernung. Man verbindet beide, am sichersten durch einen Glasfaden und sieht nun in dem Ceriumtropfen desminähnliche Krystallbündel von Cerosulfat entstehen, am Rande, bei etwas reichlichem Natriumgehalt schnell den ganzen Ceriumtropfen erfüllend, eine stark getrübte braune Zone des Natriumdoppelsalzes und wenn auch Kalium zugegen ist innerhalb der eben beschriebenen eine mehr grobkörnige, grauliche Zone des Kaliumdoppelsalzes.

Starke Vergrösserungen (600 f. und darüber) zeigen, dass die fraglichen Trübungen aus winzigen, weisslich durchscheinenden Körnchen von kaum 2 Mikr. Durchm. (Natriumsalz) und grösseren Sphäroïden, von 5—8 Mikr. Durchm., bestehen (Kaliumsalz), welche letzteren mit Körnern von Kartoffelstärke Aehnlichkeit haben.

In neutralen Lösungen, die weniger als 1 p. Ct. Alkalisulfat enthalten, ebenso in sauren Lösungen treten die be-

schriebenen Erscheinungen viel weniger deutlich auf. Man setzt das Reagens unmittelbar neben den Probetropfen und erhält nach einigen Minuten, über den ganzen Tropfen verbreitet, Knollen des Kaliumdoppelsalzes, unter besonders günstigen Verhältnissen auch enteckte Rhomben, bald sechs- bald achtseitig, und kurze zugespitzte Prismen (Länge 3—5 Mikr.) des Natriumdoppelsalzes, die viel Aehnlichkeit mit kleinen Navicellen haben (Fig. 5 und 6).

Isolirte Krystalle des Cerosulfats besitzen denselben Habitus, wie das Natriumdoppelsalz, sind aber 5- bis 6-mal so gross.

Ein grosser Überschuss von Schwefelsäure kann in Lösungen, die wenig Kalium und Natrium enthalten, die Reaction gegen Ceriumsalz gänzlich verhindern; statt der Doppelsalze erscheinen viel grössere radialfaserige Knollen, wie es scheint, einem sauren Ceriumsulfat angehörig *). Zusatz von Magnesiumacetat oder Kupferacetat bringt in solchen Fällen die gewünschte Reaction zum Vorschein, doch ist es besser, bei der Aufschliessung dafür zu sorgen, dass die freie Schwefelsäure bis auf einen kleinen Rest verjagt wird. Man kann das Cerosulfat als erstes Reagens für beide Alkalimetalle benutzen und in zweifelhaften Fällen, allenfalls in demselben Tropfen, darnach zuerst Platinchlorid, später Kieselflussäure zusetzen.

Die Controle des Kaliums mit Platinchlorid mache ich sehr gern, die des Natriums mit Kieselflussäure ist für mich ein Nothbehelf, weil ich nur dann, wenn die Reaction schnell und reichlich eintritt, oder wenn ich auf gefirnissten Platten arbeite, überzeugt sein kann, dass kein Alkali aus dem Glase abgeschieden wurde, und die Reaction leider nicht zu den empfindlichen gehört. In einer Lösung die $^1/_2$ pCt. Natriumsulfat enthielt, zeigte sich die Reaction gegen Ce-

*) Säure Überschuss beeinträchtigt die Abscheidung des Kaliumdoppelsalzes weniger als die der Natriumverbindung; in sauren Lösungen kann daher das Kalium vor dem Natrium angezeigt werden, oder gar nur ersteres, wenn auch viel Natrium zugegen ist.

rosulfat nach zwei Minuten, in einer Lösung, die 1.2 p. Mille Natriumsulfat enthielt, nach 5 Minuten, während Kieselflussäure in einem anderen Tropfen derselben Lösung erst nach 20 Minuten spärliche Anzeichen von Natrium gab. In einer Lösung von $^1/_2$ p. M. gab Cerosulfat nach 10 Minuten Reaction, Kieselflussäure gab keine, auch nicht nach halbstündigem Abwarten. In stark verdünnten Lösungen kann die Reaction gegen Ceriumsalz durch mässiges Erwärmen beschleunigt werden. In vielen Fällen lässt sich das Resultat durch Flammenreaction controliren oder gar die Reaction auf nassem Wege gänzlich umgehen.

Lanthan- und Didymsulfat geben mit Alkalimetallen dieselben Reactionen, wie Ceriumsulfat, bei geringerer Empfindlichkeit. Aus diesem Grunde kann man sich an Stelle des reinen Ceriumsalzes des sogenannten »Ceritsulfats" bedienen *).

Versuche mit Oxalsäure, mit Ammoniumoxalat und mit Kaliumstibiat führten nicht zu dem gewünschten Resultat. Erstere sind zu wenig empfindlich, das letztere reagirt träge und giebt mit Calcium- und Magnesiumsalzen dicke pulverige Niederschläge, die den ganzen Tropfen trüben und die spät eintretende Reaction auf das Natrium verhüllen.

Nachweis des Lithiums.

25.

Das Lithium ist in schwefelsaurer Lösung leicht aufzufinden, wenn man den Gips soweit möglich nach 22, Anm. entfernt hat. Man präcipitirt es als Carbonat, das sehr gut ausgebildete Krystalle von monoklinem Habitus, mit recht-

*) Darzustellen aus Cerit durch Abdampfen mit gleichen Theilen Schwefelsäure und Wasser bis zu schwachem Glühen. Vertheilen der zerriebenen Masse in 4 Th. kaltem Wasser, Filtriren und Aufkochen der gesättigten Lösung, wobei ein wasserarmes Ceritsulfat niederfällt, das entwässert und zerrieben in kaltem Wasser gelöst wird.

eckigem Querschnitt bildet, wie sie in Fig. 7 dargestellt sind. Ihre Länge beträgt 50 bis 75 Mikr.

Verwechselung ist möglich mit Gips und mit Doppelsalzen von Magnesiumcarbonat mit alkalischen Carbonaten. Von Gips sind die Krystalle des Lithiumcarbonats zu unterscheiden durch die rectangulären Formen, die fast niemals fehlen und durch ihre Löslichkeit in verdünnter Schwefelsäure; von Magnesiumdoppelsalzen unterscheidet sie die Eigenschaft, bei jedem Verhältniss von Kaliumcarbonat und Lithiumsulfat zu entstehen, während Doppelsalze des Magnesiumcarbonats nur bei Überschuss von Alkalicarbonat sich bilden können.

In Magnesiumlösungen erhält man, wenn der Zusatz von Alkalicarbonat nicht übermässig gross ausgefallen ist, die prismatischen Krystalle des Doppelsalzes nur in nächster Umgebung des Reagens, und auch nur vorübergehend; sie zerfallen alsbald zu Körnchen von Magnesiumcarbonat.

Phosphorsäure ist dem Nachweis des Lithiums als Carbonat hinderlich: ein Zusatz von Phosphorsalz vermag selbst fertig ausgebildete Krystalle von Lithiumcarbonat zu zerstören.

Nachweis des Bariums und Strontiums.

26.

Barium und Strontium finden sich, nebst Gips, wenn viel Calcium vorhanden war, in dem Sediment, das nach Abziehen der wässerigen Sulfatlösung im Platinschälchen zurückbleibt. Sie lassen sich durch Erhitzen mit concentrirter Schwefelsäure in Lösung bringen, und diese Lösung lässt bei'm Erkalten und weiter durch Wasseraufnahme das Bariumsulfat in Form kleiner linsenförmiger, gekreuzter Kryställchen fallen (Fig. 8). Sie messen 5 bis 12 Mikr. *)

*) Sehr schnell erfolgt die Abscheidung, wenn man das erkaltete Präparat anhaucht.

Strontiumsulfat kommt nach dem Bariumsulfat zur Krystallisation. Zuerst zeigen sich verworrene Büschel feiner Nadeln, ähnlich denen, die Gips bei schneller Abscheidung aus saurer Lösung bildet, alsbald folgen gekreuzte Krystalle, deren kleinste mit den Kreuzen des Bariumsulfats verwechselt werden können, während die volkommen ausgebildeten sich gut von ihnen unterscheiden lassen. Sie messen von 20 bei 30 bis zu 30 bei 45 Mikr. und haben eine recht complicirte Structur (Fig. 9). Zuletzt entstehen Rhomben, meistens etwas trübe und an den Ecken zu Spitzen ausgezogen (sie entstehen durch Ausfüllung der Kreuze), auch kommen Zwillinge und kreuzförmige Vierlinge dieser letzteren Krystallgebilde vor *). (Fig. 9, unten).

Gips, der gleichfalls in Lösung geht, kommt noch später zur Abscheidung, anfangs in feinen, zu Bündeln und Rosetten verwachsenen Spiessen, später mit seinem gewöhnlichen Habitus.

Nachweis des Magnesiums.

27.

Für Magnesium besitzen wir ein ausgezeichnetes Reagens an Natriumphosphat in ammoniakalischer Lösung. Die Kryställchen des Ammonium-Magnesium-Phosphats sind so scharf ausgebildet und durch ihre Hemimorphie so gut gekennzeichnet, auch die rudimentären Krystallgebilde in Folge der Hemimorphie so eigenthümlich entwikkelt, dass die Verwendung der Reaction für mikroskopische Zwecke auf der Hand liegt. Aus zahlreichen Versuchen hat sich ergeben, dass Natriumammoniumhydrophosphat (Phosphorsalz)

*) Bleisulfat scheidet sich aus schwefelsaurer Lösung ebenfalls in kreuzförmigen Zwillingsgebilden ab. Sie haben dieselbe Grösse, wie die des Bariumsulfats (5—12 Mikr.), aber den Habitus der zuletzt beschriebenen Krystalle des Strontiumsulfats (Malteserkreuz mit lichtem Centrum).

in fester Form die besten Resultate giebt. Der Probetropfen, in welchem man bereits nach Alkalien oder nach Aluminium gesucht hat, wird mit Ammoniak übersättigt, ein Wassertröpfchen in 1 Cm. Abstand daneben gesetzt, in dieses ein Körnchen Phosphorsalz gebracht und schliesslich der Zwischenraum der beiden Tropfen durch einen Glasfaden überbrückt. Die Grösse des Zwischenraums ist für die Entwickelung gut ausgebildeter Kryställchen von Bedeutung: enthält die Flüssigkeit 1 p. Ct. Magnesium und darüber, so werden, wenn die Tropfen in einander verfliessen, lange Zeit nur doppelt gegabelte Krystallrudimente (Fig. 10, oben) bis 60 Mikr. lang, unformliche Zwillinge hemimorpher Kryställchen, gebildet werden; ist die Lösung sehr verdünnt, so entstehen nur gut ausgebildete hemimorphe Krystalle (Fig. 10, unten) von 10—20 Mikr. Länge, die aber, wenn der Verbindungskanal der beiden Tropfen lang und schmal ist, recht lange auf sich warten lassen. Man kann sich alsdann helfen durch einen zweiten Glasfaden, der dicht neben den ersten gelegt wird, hierdurch wird das Überströmen der Flüssigkeit von einem Tropfen zum andern sehr beschleunigt. Weiss man, dass die zu prüfende Lösung weniger als $^1/_2$ p. Ct. Magnesium enthalten wird, so kann man einfacher handeln und dabei Zeit sparen; es genügt alsdann ein Körnchen Phosphorsalz von $^1/_3$ Mm., das mittelst einer Nadelspitze an den Rand des Probetropfens gebracht wird.

Eisen und Mangan, die durchaus ähnliche Verbindungen geben, können keine Irrthümer veranlassen, wenn man zwischen dem Zusatz von Ammoniak und dem von Phosphorsalz einige Minuten Zeit gönnt für die Oxydation der genannten Metalle.

Bisweilen bleibt die Reaction auf Magnesium aus oder kommt nur schwach zum Vorschein, weil nicht die genügende Quantität von Ammoniumsalzen in Lösung war; man thut deshalb gut vor der Übersättigung mit Ammoniak ein wenig Salzsäure oder Chlorammonium zuzufügen *).

*) Umgekehrt kann die Reaction zur Prüfung einer Flüssigkeit auf Ammoniak dienen. Es wird dieselbe mit Natriumphosphat versetzt und durch Kali- oder Natronlauge alkalisch gemacht, hierauf mit einem Körn-

Die Empfindlichkeit der Reaction ist durchaus befriedigend. Eine Lösung die 1.5 pro Mille Mg O enthielt, gab binnen acht Minuten reichliche Krystallbildung. Der Nachweis von 0.001 Mgr. Mg O ist noch ohne Schwierigkeit auszuführen.

Nachweis des Aluminiums.

28.

Ein gutes Reagens für Aluminium zu finden hat ebenso viel Zeit gekostet, wie für Natrium, doch bin ich hier zu besseren Resultaten gelangt, die um so mehr von Werth sind, als die einzige Löthrohrreaction auf Aluminium, die mit Kobaltlösung, nur beschränkter Anwendung fähig ist und unter dem Mikroskop noch viel von ihrer Bedeutung verliert.

Ein brauchbares Reagens ist alkoholische Alizarinlösung, die mit alkalischer Aluminiumlösung in Wechselwirkung gebracht wird (auf einem Streifchen Filtrirpapier, weniger gut auf Glas), der Überschuss von Alkali wird durch Essigsäuredampf weggenommen.

Diese Reaction eignet sich besser für Schliffflächen als für Flüssigkeitstropfen. Für letzteren Zweck wurde das geeignete Reagens gefunden in Caesiumchlorid, wovon ein Körnchen oder ein minimales Tröpfchen concentrirter Lösung an den Rand des Probetropfens gebracht wird. Es genügt, die Spitze eines Platindrahts in die zerflossene Salzmasse zu tauchen und damit den Probetropfen zu berühren um sofort um die berührte Stelle grosse wasserhelle Alaunkrystalle (35—90 Mikr. messend) von der gewöhnlichen Form entstehen zu sehen: vorherrschend scharfe Octaëder, seltener

---

chen Kieserit in Berührung gebracht. Es bilden sich Flocken von Magnesia und Magnesiumphosphat und dazwischen, wenn Ammoniak zugegen, die hemimorphen Krystalle. Nessler's Reagens giebt nur gelbe Flocken.

Combinationen von Octaëder mit Würfel (Fig. 1, ob.). In einigermassen concentrirten Lösungen entstehen statt isolirter Krystalle Dendriten (Fig. 1, unten); bemerkt man diese, so muss ein kleiner Wassertropfen zugesetzt werden, gegenüber der Seite des Tropfens, an welcher man das Reagens angebracht hatte. Auflösen der Dendriten durch Erwärmen ist nicht zu empfehlen; man erhält dadurch viel kleinere und weniger Krystalle als durch locale Präcipitation bei gewöhnlicher Temperatur. Auch hat man sich vor grossem Überschuss von Schwefelsäure zu hüten. In schwach saurer Lösung entstehen die Alaunkrystalle schneller und bilden sie sich vollkommener aus, als in einer neutralen Flüssigkeit, abgesehen davon, dass ein Überschuss von Schwefelsäure sehr gute Dienste leistet bei der Auflösung des Aluminiumsulfats, das in Wasser sich träge löst; viel Schwefelsäure verzögert und beeinträchtigt die Alaunbildung. Glaubt man, dass hierin etwas versehen ist, so kann durch ein Acetat — Natrium- oder Kupferacetat — Abhülfe geschafft werden.

Anwesenheit von Eisen, selbst in reichlicher Menge, macht keine Schwierigkeit, da der Eisenalaun schwierig krystallisirt. In einigen Fällen, wo ich die Bildung von Eisenalaun für möglich hielt, habe ich Controlversuche mit Tropfen angestellt, die ich durch Zink reducirt hatte, ohne dadurch abweichende Resultate zu erhalten.

Die Empfindlichkeit der Reaction beruht auf der geringen Löslichkeit des wasserreichen Doppelsalzes: ein Theil Caesiumalaun bedarf an 200 Th. Wasser. Ein hundertstel Milligr. Al^2O^3 ist mehr als ausreichend für eine deutliche Reaction, wenn für gehörige Concentration der Lösung gesorgt war.

Eisen und Mangan.

29.

Eisen wird man schwerlich unter dem Mikroskop suchen wollen, übrigens ist die Färbung des feinkörnigen, sich zu Flocken zusammenballenden Niederschlages, den Ferrocyan-

kalium in Eisenlösungen hervorbringt, unter 200 f. Vergrösserung eben so intensiv, wie für das unbewaffnete Auge.

Mangan kann durch oxydirendes Schmelzen mit Soda in so minimalen Quantitäten nachgewiesen werden und dabei ist die Reaction so charakteristisch, dass auch hier ein mikroskopisches Prüfungsverfahren überflüssig scheint.

Aufsuchung der Metalloïde.

30.

Von Nichtmetallen lassen sich durch Umkehrung bereits beschriebener Reactionen auffinden: Schwefel (28) und Phosphor (27). Für Chlor, Fluor, Bor und Silicium mussten besondere Reactionen gesucht werden.

Nachweis des Schwefels.

31.

Es handelt sich zunächst darum, den Schwefel als Alkalisulfat in Lösung zu bringen. Sulfurete und Sulfarseniate müssen mit einem Gemenge gleicher Theile Soda und Salpeter verbrannt, unlösliche Sulfate mit Soda geschmolzen werden.

Die gröblich zerkleinerte Schmelze wird in einen Wassertropfen gebracht und ein Tropfen einer Mischung von Chloraluminium und Salzsäure daneben gesetzt, dem man ein wenig Chlorcaesium zufügt. Man verfährt weiter nach 27 und findet die ersten Krystalle von Caesiumalaun in der Nähe des verbindenden Glasfadens.

Nachweis des Phosphors (und Arsens).

32.

Unlösliche Phosphate sind ebenso vorzubereiten, wie Sul-

fate. Als Reagens verwendet man eine concentrirte Lösung von Chlorammonium nebst einem Körnchen Bittersalz (besser Kieserit, der sich langsamer löst) und verfährt im Übrigen nach 27.

Arsenide können vorbereitet werden, wie Sulfurete, Arseniate wie unlösliche Sulfate. Die mikroskopischen Krystalle und Krystallrudimente des Ammonium-Magnesium-Arseniats sind denen des Ammonium-Magnesium-Phosphats zum Verwechseln änhlich. Versuche, mittelst Schwefelwasserstoff an Kryställchen des Arseniats charakteristische Farbenänderung hervorzubringen gaben kein befriedigendes Resultat, ebensowenig Versuche mit Silbernitrat.

Handelt es sich um Aufsuchung von Arsen neben Phosphor, so wird Sublimation mit einem geschmolzenen Gemenge von Soda und Cyankalium zum Ziel führen; der Rückstand ist in soeben beschriebener Weise auf Phosphor zu untersuchen. Die Sublimation kann in ähnlicher Weise verfeinert werden, wie weiter unten (36) für Wasser gelehrt werden soll.

Die Reaction mit Ammoniummolybdat und Salpetersäure leidet auch an dem Übelstand, gleich brauchbar für Phosphorsäure und für Arsensäure zu sein. Sie ist nicht empfindlicher, als die beschriebene und recht träge; man muss bei einigermaassen verdünnten Lösungen bis zum Eintrocknen des Randes warten. Aus diesem Grunde arbeite ich lieber mit Magnesiumsulfat und Chlorammonium, als mit Molybdatlösung. Übrigens gilt für den Habitus des Ammoniumphosphomolybdats alles was unter 23 von dem Kaliumphosphomolybdat gesagt ist.

Nachweis des Chlors.

33.

Chlor kann unter dem Mikroskop nicht mit Hülfe von Silbernitrat gefunden werden, da das Chlorsilber undurch-

sichtige Körnchen und Flocken bildet, die nichts Charakteristisches bieten und in trüben Flüssigkeiten leicht übersehen werden.

Mercuronitrat giebt unter gleichen Umständen einen krystallinischen Niederschlag, der anfangs aus feinen Prismen besteht, die ein recht auffallendes Bild geben und sich von Gipsnadeln wohl würden unterscheiden lassen, allein nach einigen Minuten ist davon fast nichts mehr übrig. Sie zerbröckeln zu winzigen Körperchen, so winzig, dass es mindestens 600 f. Vergrösserung bedarf, um wahrzunehmen, dass sie quadratischen Querschnitt haben.

Bleisalze geben mit Salzsäure und löslichen Chloriden scharf ausgebildete, stark lichtbrechende Krystallnadeln, sind aber nicht brauchbar, wenn man mit Sulfaten neben den Chloriden zu thun hat. Will man die Aufschliessung durch Schmelzen mit Soda bewerkstelligen, so kann in den meisten Fällen Bleinitrat in verdünnter Salpetersäure sehr wohl als mikrochemisches Reagens auf Chlor benutzt werden. Die Krystalle des Chlorbleis, aus kalter Lösung abgeschieden, sind in Fig. 11 dargestellt. Die Rhomben messen 10—15 Mik., die Dendriten sind von sehr ungleicher Grösse. Man operirt übrigens nach 31.

Bei Anwesenheit von Schwefelsäure oder Sulfaten muss das Bleinitrat durch Thalliumsulfat ersetzt werden, dem ich, seiner grösseren Empfindlichkeit halber und wegen der geringen Veränderlichkeit der Krystallgebilde des Chlorthalliums überhaupt den Vorzug gebe.

Hat man durch Schmelzen mit Soda aufgeschlossen, so wird das Thalliumsulfat in verdünnter Schwefelsäure angewendet, wobei man wieder nach 31 operirt, meistens wird man besser mit concentrirter Schwefelsäure arbeiten und hat dazu zwei Wege vor sich. Man kann durch mässiges Erwärmen mit möglichst wenig concentrirter Säure Zersetzung herbeiführen, hierauf ein gleiches Volumen Wasser zufügen und in ein daneben gesetztes Wassertröpfchen ein Körnchen Thalliumsulfat bringen, möglichst auf die Grenze der beiden Tropfen. Die Krystalle von Thalliumchlorid bilden sich dann in dem klaren Wasser in nächster Umge-

bung des Thalliumsulfats. Bei diesem Verfahren werden alle Operationen auf dem Objectglase ausgeführt. Oder man verwendet eine grössere Quantität Schwefelsäure im Platinschälchen und fängt die entweichende Salzsäure in Wasser auf. Auf das Platinschälchen wird ein Deckglas gelegt, dem unterwärts ein kleiner Wassertropfen angehängt ist. Von oberwärts wird es durch einen grösseren Tropfen gekühlt. Nach Beendigung der kleinen Destillation wird dieser Tropfen mittelst einer Capillarpipette entfernt, das Deckglas umgekehrt auf einen Objectträger gelegt und mitten in den Rest des kleinen Wassertropfens ein Körnchen Thalliumsulfat gebracht. Die Kryställchen des Thalliumchlorids bilden sich dann sehr schnell. Es sind Octaëder und Combinationen des Octaëders mit Rhombendodekaëder von 10 bis 15 Mikr. Durchmesser, für schwächere Vergrösserungen wegen ihres starken Brechungsvermögens in durchgehendem Licht beinahe schwarz, in auffallendem Licht weiss. Diese Eigenthümlickeit und noch mehr ihre Neigung kleeblattförmige Drillinge und kreuzförmige Vierlinge zu bilden, macht sie sehr auffallend und lässt auch kleine und spärlich gesäte Krystalle leicht finden.

Die Kreuze messen im Mittel 50 Mikr., die grössten bis 100 Mikr., diese letzteren sind regelmässig verzweigt und haben viele Aehnlichkeit mit den kreuzförmigen Rosetten des Magnetits mancher Hochofenschlacken (Fig. 12). Die Empfindlichkeit der Reaction ist von dem Säuregehalt der Lösung abhängig. Aus diesem Grunde erfolgt sie gewöhnlich schneller und reichlicher nach dem zweiten als nach dem ersten Verfahren. Ist zu viel freie Schwefelsäure zugegen, so hat man dieselbe durch ein Acetat unschädlich zu machen, wie unter 28 besprochen wurde.

Trotz unvermeidlicher Verluste bei der Zersetzung und Destillation des Minerals (Sodalith) wurde von einer Quantität Chlor, entsprechend 0.004 Mgr. Na Cl ausreichende Reaction erhalten.

Bromthallium ist unter dem Mikroskop kaum von Chlorthallium zu unterscheiden; die Form der Krystallindividuen stimmt vollkommen mit der des Chlorthalliums überein,

ausgeführt, wie die auf Fluor, der wesentliche Unterschied besteht darin, dass hier neben der Schwefelsäure Flussäure zur Anwendung kommt und dass gefirnisste Glasplatten, resp. Schwerspathplatten unerlässlich sind, während für die Prüfung auf Fluor zur Noth gewöhnliche Objectgläser dienen können.

Das Verfahren bei der Destillation ist dasselbe, wie für Fluor (34). Als Fällungsmittel kann wiederum Chlornatrium dienen, wenn nur eins von beiden Elementen nachgewiesen werden soll; es giebt mit Borfluorwasserstoff genau dieselben Hexagone und Rosetten, wie mit Kieselfluorwasserstoff. 0.08 Mgr. SiO^2 konnte auf diesem Wege mit Leichtigkeit nachgewiesen werden, 0.04 Mgr. Borsäure gab noch ausreichende Reaction.

In den meisten Fällen handelt es sich darum Bor neben einer überwiegenden Quantität von Silicium aufzufinden (Axinit, Datolith, Turmalin), hier versagt dann das Chlornatrium seine Dienste.

Nach vielen vergeblichen Versuchen ist es mir gelungen zwei unterscheidende Reactionen zu finden, die ich in Ermangelung besserer mittheile.

Calciumfluosilikat giebt bei ziemlich weit fortgeschrittener Verdunstung linsenförmige Körperchen von etwa 20 Mikr. Länge; das Fluoborat erscheint unter denselben Umständen in Gestalt kurzer rhombischer Prismen, die sich meistens auf dem Querschnitt der Boabachtung darbieten, als scharfe Rauten von 10—15 Mikr. Länge auf 8—12 Mikr. Breite. Diese Reaction leistet sehr gute Dienste, wenn man nicht mit Schwefelsäure neben der Bor- und Kieselflussäure zu thun hat.

Kaliumfluosilikat giebt Krystalle, die dem regulären System angehören: Octaëder und Combinationen von Octaëder mit Würfel; Kaliumfluoborat erscheint, wenn die Säure ziemlich concentrirt ist, zuerst in Form schmaler, spiessiger Blättchen, später in Form von Rauten, deren Diagonalen im Verhältniss von 2 : 3 stehen. Sie messen 30 bis 50 Mikr. Oft sind die beiden stumpfen Ecken durch Kanten ersetzt, auch zeigen die grösseren bisweilen Andeutungen einer stumpfen Pyramide (Fig. 13). Das Kaliumfluobarat kommt

nach dem Fluosilikat zur Krystallisation, man hat hierauf Bedacht zu nehmen, wenn es gilt, Bor neben viel Kiesel aufzusuchen.

Wollte man dem Destillat, das man mit Schwefelsäure und Flussäure erhalten hat, ohne Weiteres Chlorkalium zufügen, so könnte es geschehen, dass gar kein Fluoborat zur Krystallisation gelangte; jedenfalls würde man Mühe haben, die wenigen Krystalle desselben unter der übergrossen Zahl von Octaëdern des Fluosilikats aufzusuchen. Es ist deshalb rathsam, den grössten Theil des Siliciums zu beseitigen.

Man erwärmt zunächst die mit Flussäure und Schwefelsäure gemischte Mineralprobe nur so weit, als nöthig ist um den grössten Theil des Kieselfluorids auszutreiben, das man nach 34 in Wasser oder verdünnter Schwefelsäure auffangen und mittelst Chlornatrium nachweisen kann. Die Operation wird hierauf, nach abermaligem Zusatz von Flussäure wiederholt und dabei die Temperatur bis zum Rauchen der Schwefelsäure gesteigert, da der Siedepunkt des Borfluorwasserstoffs fast eben so hoch liegt, wie der von Schwefelsäure. Das Destillat erwärmt man bis auf 120°, fügt nach einigen Minuten zu dem Rückstand ein Wassertröpfchen, überträgt auf das Objectglas und prüft mit Chlorkalium auf Bor. Wenn nicht sofort die Rauten des Fluoborats entstehen, so ist dies noch kein Beweis für die Abwesenheit desselben, man hat die Eintrocknung des Probetropfens abzuwarten.

Nachweis des Wassers.

36.

In einzelnen Fällen kann es von Interesse sein, in sehr kleinen Mineralproben nach Wasser zu suchen Ein zehntelmilligramm Wasser ist mit einiger Behutsamkeit nach dem für Löthrohrproben üblichen Verfahren aufzufinden. Es kommt hierbei wesentlich darauf an, das kleine Wasserquantum auf einen möglichst kleinen Raum zusammenzudrängen

und zugleich sowohl das Entweichen, als das Eindringen von Wasserdampf in die Versuchsröhre zu verhüten.

Ich benutze Röhren von 3 Mm. im Lichten und 10 Cm. Länge, die einerseits zu einem Faden von 2 Cm. Länge und 0.5 Mm. Weite ausgezogen und hier, nach gelinder Erwärmung der ganzen Röhre und Durchsaugen von Luft mittelst einer auf das weite Ende aufgeschobenen Kautschukröhre, zugeschmolzen sind. Während die Röhre noch warm ist, wird die Mineralprobe eingebracht, die Röhre auf halber Länge ausgezogen und stumpf zugeschmolzen, wodurch die Möglichkeit des Eindringens von Wasser aus den Flammengasen vermieden wird. Jetzt wird das capillare Ende durch Alkohol abgekühlt und wenn sich kein Wasserbeschlag bildet, das stumpfe Ende mit der Mineralprobe darin bis zum gelinden Glühen erhitzt. Meistens bildet sich dann der Beschlag ohne künstliche Abkühlung an der Verengerung der Röhre. Durch Vorrücken der Flamme kann er in dem capillaren Theil zusammengetrieben werden.

Auch kann man für kleine Wassermengen eine Farbenreaction zu Hülfe nehmen, wofür freilich die Röhren vor dem Austrocknen vorbereitet werden müssen.

Alkoholische Fuchsinlösung lässt beim Verdunsten auf Glas ein undurchsichtiges gelbgrünes, metallisch glänzendes Häutchen zurück. Bringt man davon, mittelst eines dünnen Drahtes oder Glasfadens einen schmalen Streif oder einige kleine Tupfen in dem capillaren Theil der Röhre an und treibt den Wasserbeschlag gegen die grünen Flecke, so verlieren dieselben den Metallglanz und werden durchscheinend roth.

37.

Mit dem Vorliegenden ist dem Bedürfniss des Petrographen, wodurch diese Arbeit angeregt wurde, einigermaassen Genüge gethan. Einzelne Reactionen auf seltener vorkommende Metalle, die mir im Verlauf derselben unter die Hände kamen, spare ich für eingehende Prüfung und spätere Mittheilung

auf, falls sie nicht inzwischen von anderen Forschern gefunden sein sollten. Die vorgeschlagene Methode, auf Umwandlung der Silikate in Sulfate beruhend, schliesst sich der allgemein üblichen so eng an, dass ihre Ausdehnung auf eine grössere Zahl von Elementen nahe gelegt ist, und die Sicherheit, die schnelle Ausführung sowie der geringe Umfang der Apparate, welcher die Mehrzahl der mitgetheilten mikrochemischen Reactionen auszeichnet, würde mich länger bei diesem Gegenstand festgehalten haben, wenn nicht der zweite, schwierigere Theil meiner Aufgabe: Reactionen auf Schliffflächen zu finden, alle verfügbare Zeit in Anspruch nähme.

Ich habe mich aus diesem Grunde zur Veröffentlichung dessen entschlossen, was ich als sicher gestellt und zuverlässig glaubte ansehen zu dürfen. Mehrere der wichtigsten Reactionen: auf Kalium, auf Calcium, Magnesium und Aluminium habe ich bei den Übungen der Studirenden des Polytechnikums eingeführt und zwar mit gutem Erfolg, so dass ich diese mit vollem Vertrauen auch minder geübten Mikroskopikern empfehlen kann.

Fortgesetzte Anwendung der Methode wird zu Verbesserungen und Erweiterungen führen, deren Mittheilung mich sehr erfreuen und zu Dank verpflichten wird.

Anhangsweise füge ich einige der vielen Probeanalysen bei, die mit gewogenen Mineralmustern ausgeführt wurden, als Belege für den zu erreichenden Grad von Genauigkeit und zur Darlegung des Arbeitsverfahrens an Beispielen.

Probeanalysen.

38.

1. 0.2 Mgr. schwarzer Turmalin wurde mit Flussäure erwärmt. Die Einwirkung war sehr schwach. Nach starkem Glühen des Mineralpulvers löste sich die Hälfte. Die eingetrocknete Masse wurde mit Schwefelsäure erwärmt, bis diese grösstentheils verdampft war, mit Wasser aufgekocht und

die Lösung, deren Volumen ca. 0.015 C.C. betrug in eine Capillarpipette gebracht.

Die eine Hälfte derselben giebt, auf einem Objectträger verdunstend, deutliche Gipskryställchen und mit Caesiumchlorid soviel Alaun dass ein Fünftel davon genug gewesen wäre. Die andere Hälfte giebt, nach Übersättigung mit Ammoniak, auf Zusatz von Phosphorsalz binnen zwei Minuten eine grosse Anzahl hemimorpher Phosphatkrystalle.

Zu jedem der beiden Versuche wurden, unter Berücksichtigung der Verluste, höchstens 0.05 Mgr. Turmalin verwendet. Darnach ist erhalten, unter Annahme von 33 pCt. Al^2O^3, 1 pCt. CaO, 3.3 pCt. MgO im Turmalin:

Reichliche Reaction für	0.017	Mgr.	Al^2O^3
Ausreichende Reaction für	0.0017	»	MgO
und für	0.0005	»	CaO.

2. 0.2 Mgr. Sodalith wurden mit Schwefelsäure zersetzt, der Abdampfungsrückstand mit Wasser aufgekocht und die Lösung mittelst der Capillarpipette halbirt. In der einen Hälfte wurden spärliche aber gut ausgebildete Gipskrystalle gefunden und mit Caesiumchlorid gut ausgebildete aber nicht zahlreiche Alaunkrystalle erhalten.

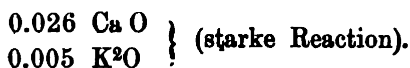
Die andere Hälfte lieferte mit Platinchlorid reichlich Octaëder der Kaliumverbindung. Dies einigermaassen überraschende Resultat wurde in einer anderen Probe durch Controle mit Bor- und Kieselflussäure bestätigt. Die Reaction auf Natrium mit Kieselflussäure trat sehr spät, erst gegen Ende des Verdunstens ein und nicht so deutlich, wie zu wünschen gewesen wäre. Ein Zehntelmilligramm Sodalith entspricht:

0.03	Mgr.	Al^2O^3,
0.001	»	CaO,
0.0006	»	K^2O,
0.0025	»	Na^2O.

3. 0.1 Mgr. desselben Sodaliths wurden im bedeckten Platinschälchen mit Schwefelsäure der Destillation unterworfen. Sowohl das Destillat als der feuchte Rückstand (in

Wasser gelöst) gaben mit Thalliumsulfat ausgezeichnet deutliche Reaction auf Chlor. Nimmt man an, dass die Hälfte des Chlors in das Destillat übergegangen ist, so sind 0.05 Mgr. Sodalith in Rechnung zu bringen, entsprechend 0.0035 Mgr. Cl oder 0.006 Na Cl.

4. 0.2 Mgr. Apophyllit von Andreasberg gaben, mit Flussäure und Schwefelsäure im bedeckten Platinschälchen erwärmt, ein Destillat, das mit Na Cl reichlich Natriumfluosilikat abscheidet. Der Rückstand im Schälchen wird bis zur Trockniss abgedampft, nochmals mit ein wenig verdünnter Schwefelsäure bis zum Rauchen erhitzt, in Wasser gelöst und die Lösung halbirt. Die eine Hälfte giebt mit Caesiumchlorid Alaun (nicht reichlich) und zeigt viele Gipskrystalle. Phosphorsalz und Ammoniak geben keine Reaction. Die andere Hälfte giebt mit Platinchlorid reichliche Reaction auf Kalium. Natrium ist weder mit Ceriumsulfat noch mit Kieselflussäure nachzuweisen. 0.2 Mgr. Apophyllit entspr. 0.100 Mgr. Kieselsäure, wovon die Hälfte bequem hatte gefunden werden können; 0.1 Mgr. Apophyllit entspricht:


0.026 CaO } (starke Reaction).
0.005 K^2O }

Aluminium wird nur einmal, zu 1.5 pCt. angegeben (Rammelsberg, Mineralchemie, 1860; S. 506), wonach die noch eben ausreichende Reaction gegen Caesium durch 0.0015 Al^2O^3 hervorgerufen ist.

Weil möglicherweise die Flussäure Spuren von Al. enthalten konnte, wurde der Versuch mit 0.3 Mgr. desselben Apophyllits und concentrirter Schwefelsäure, ohne Zusatz von Flussäure wiederholt.

Das Destillat gab, als Reaction auf Fluor, mit Na Cl spärliche Krystallisation von Natriumfluosilikat und der Rückstand mit Caesiumchlorid viele Alaunkrystalle.

Rechnet man den Fluorgehalt des Apophyllits, der von 0.46 pCt. bis 1.71 pCt. angegeben wird (von Andreasberger Apophyllit zu 1.18 pCt., Rammelsb. S. 505) zu 1 pCt.,

so ergiebt sich als Grenzwerth für die Reaction mit Na Cl auf Fluor:

0.003 Mgr. Fl.

5. 0.4 Mgr. Boracit wurden mit Schwefelsäure destillirt, das Destillat gab mit Thalliumsulfat starke Reaction auf Chlor. Nach Zusatz von Flussäure zum Rückstand wurde die Destillation bei gelinder Hitze wiederholt; das Destillat gab mit Chlorkalium nur Spuren von Fluoborat.

Ein zweites, bei höherer Temperatur erhaltenes Destillat verhielt sich ebenso.

Ein drittes Destillat, für welches die Hitze bis zur Entwickelung grauer Dämpfe gesteigert wurde, gab mit Chlorkalium nach etwa fünf Minuten zahlreiche Rauten und langgestreckte Sechsecke.

Der Rückstand wurde in Wasser gelöst. Ein Viertel der Lösung gab mit Ammoniak und Phosphorsalz überreichliche Reaction auf Mg.

0.4 Mgr. Boracit	=	0.034 Chlor
	=	0.250 Borsäure
0.1 » »	=	0.031 Magnesia.

6. 0.2 Mgr. Axinit wurden mit Schwefelsäure und Flussäure im bedeckten Platinschälchen gelinde erwärmt; das Destillat gab mit Na Cl reichliche Krystallisation von Fluosilikat. Der Rückstand wurde mit Flussäure bei gesteigerter Temperatur nochmals der Destillation unterworfen, wobei die Dämpfe in verdünnter Schwefelsäure aufgefangen wurden. Dies Destillat wurde mit einem Tröpfchen Flussäure bis zur Bräunung der organischen Substanzen, die aus der Guttaperchaflasche stammen, erwärmt, mit Wasser auf gefirnisstes Glas gebracht und darin mit Chlorkalium nach 3 Minuten Rauten von Fluoborat neben einzelnen Octaëdern von Fluosilikat erhalten.

Der im Platinschälchen verbliebene Rückstand wurde mit Wasser aufgekocht; ein Drittel der Lösung gab mit Caesiumchlorid Alaun, das zweite Drittel gab ebensoviel, nach

vorheriger Reduction des Eisens durch ein paar Zinkspänchen, das letzte Drittel gab starke Reaction auf Magnesium. Gips wurde überall in reichlicher Menge angetroffen.

0.2 Mgr. Axinit entsprechen:
0.1 » SiO^2 (reichliche Reaction),
0.008 » BO^3;

0.07 Mgr. Axinit =

0.012 Al^2O^3
0.0014 MgO
0.013 CaO (reichliche Reaction).

7. 0.2 Mgr. Datolith gaben, in derselben Weise untersucht, reichliche Reaction auf Silicium und genügende Reaction auf Bor.

Im Rückstand zahllose Gipskrystalle, keine Reaction mit Caesiumchlorid und Phosphat in ammoniakalischer Lösung.

0.2 Mgr. Datolith enthalten 0.076 Mgr. SiO^2, 0.04 Mgr. BO^3 und 0.084 Mgr. CaO.

8. 0.5 Mgr. Pyknit von Altenberg wurden mit dem doppelten Volumen Soda geschmolzen, von der Schmelze kaum die Hälfte in starker Essigsäure gelöst, zur Trockne gedampft, und der Rückstand mit Schwefelsäure destillirt, was ohne Spritzen von statten ging. Das Destillat gab mit $NaCl$ starke Reaction auf Kieselflussäure. 0.2 Mgr. Pyknit entsprechen 0.037 Mgr. Fluor.

9. Feldspath aus grauem Porphyr von Elfdalen (Schweden). Wurde mit Fluorammonium und Salzsäure in Lösung gebracht, dann mit Schwefelsäure abgedampft. Viel Gips. Platinchlorid zeigte ziemlich viel Kalium an, Ceriumsulfat beide Alkalimetalle, das Natrium überwiegend.

10. Feldspath aus sogenanntem »Labradorporphyr" von Nanzenbach. Enthält wenig Calcium, neben vorherrschendem Natrium mehr Kalium, als das Elfdaler Gestein.

11. Feldspath des Corsits von Sta. Lucia, Corsica. Die Feldspathnadeln der Sphäroide haben dieselbe Zusammensetzung wie die unvollkommenen Krystallkörner der die

Sphäroide verkittenden Gesteinsmasse. Beide sind reich an Calcium, aber doch nicht reiner Kalkfeldspath, sie enthalten sowohl Kalium als Natrium in erheblicher Menge.

12. Bisilikat des Corsits von S. Lucia.

Das weissliche Pulver wird in Flussäure anfangs grün, dann verblasst es und löst sich. Dies Verhalten deutet auf Verunreinigung durch Feldspathsubstanz. Die Untersuchung ergab ausser viel Calcium und Magnesium (in Übereinstimmung mit ROSENBUSCH' Annahme von Hypersthen) einen ansehnlichen Gehalt an Kalium und Aluminium, und zwar in drei von verschiedenen Handstücken genommenen scheinbar reinen Splittern.

DIE NACHSTEHEND AUFGEFÜHRTEN ABBILDUNGEN SIND GRÖSSTENTHEILS NACH PRÄPARATEN GEZEICHNET, DIE BEI DEN UNTER 38, 1—12 BESCHRIEBENEN VERSUCHEN ERHALTEN WURDEN.

Fig. 1. Caesiumalaun bei 100 facher Vergröss. (38.1).

» 2. Natriumfluosilikat, durch Überschuss von Chlornatrium präcipitirt. 100 f. Vg. (38.6).

» 3. Gips. Die grösseren Krystalle sind aus einer Lösung, die wenig Schwefelsäure enthielt (38.6), die feinen Nadeln aus einer Lösung, die viel Salszäure enthielt. 200 f. Vgr.

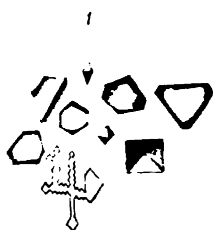
» 4. Kaliumplatinchlorid. 120 f. Vgr. (38.2).

» 5. Kaliumcerosulfat, aus einer Kaliumsulfatlösung von 3 pro mille. 300 f. Vergr.

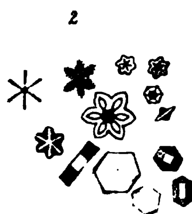
» 6. Natriumcerosulfat, aus 0.5 p. C. Lösung von Natriumsulfat. 500 f. Vgr. (38.11).

» 7. Lithiumcarbonat. 90 f. Vgr.

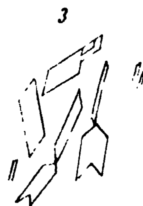
1



2



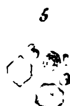
3



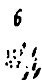
4



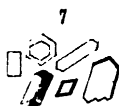
5



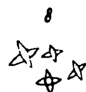
6



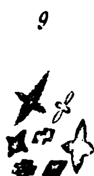
7



8



9



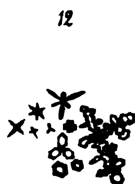
10



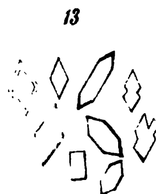
11



12



13



Th. H. Behrens. del.

Fig. 8. Bariumsulfat, aus concentrirter Schwefelsäure krystallisirt. 300 f. Vgr.

» 9. Strontiumsulfat, aus conc. Schwefelsäure krystallisirt. 200 f. Vgr.

» 10. Ammonium-Magnesiumphosphat. Die grossen, rudimentären Krystallgebilde sind aus 2 p. C. Lösung von Magnesiumsulfat abgeschieden, die kleinen vollkommen ausgebildeten Krystalle aus einer stark verdünnten Lösung (38.1). 200 f. Vgr.

» 11. Chlorblei, bei gewöhnlicher Temperatur durch sehr verdünnte Salzsäure aus Nitrat-Lösung abgeschieden. 300 f. Vergr.

» 12. Chlorthallium. 200 f. Vergr. (38.2).

» 13. Kaliumfluoborat. 160 f. Vergr. (38.7).

TWEEDE RAPPORT DER COMMISSIE

VOOR

STANDAARDMETER EN -KILOGRAM,

BETREFFENDE DE

VERIFICATIE EN JUSTERING DER GEWIGTEN EN MATEN,

OP UITNOODIGING VAN DEN MINISTER VAN KOLONIËN,
BESTEMD VOOR WEST-INDIË.

NAMENS DE COMMISSIE UITGEBRAGT

DOOR

F. J. STAMKART.

Het eerste of voorloopig Rapport is voorgedragen in Maart 1875. Het zal dus noodig zijn de reden van het buitengewoon lange verwijl tot nu toe, kortelijk op te geven. Bij genoemd Verslag zijn de twee stuks gewigten van 1 kilogram niet goedgekeurd kunnen worden, omdat zij gebleken waren geen standvastig gewigt te bezitten, maar langzamerhand in gewigt toe te nemen. Het eene stuk ongeveer 16 mgr., het andere 7 mgr. in den tijd van één jaar: van April 1874 tot Maart 1875. Die stukken zijn toen, op last van den Minister van Koloniën, aan den Heer OLLAND teruggegeven, om daarvoor andere in de plaats te leveren.

De nieuwe stukken zijn in de tweede helft van het jaar 1875 ontvangen en omstreeks het einde van dat jaar gejusteerd en geverifiëerd. Zij hadden toen een geheel onberispelijk en fraai voorkomen. Uithoofde echter der opgedane ondervinding zijn zij toen, na eene eerste weging, stil weggesloten om eenigen tijd bewaard te blijven, en dan weder te worden gewogen.

De gewigts-toeneming der eerste stukken is gebleken het gevolg te zijn geweest van enkele stipjes op de oppervlakte, waar het koper niet door het vernis bedekt was geworden. Langzamerhand ontstond daar eenige oxydatie van het koper; donkere stipjes werden zichtbaar en de toeneming van gewigt was het gevolg.

Het is de vraag geweest of de zamenstelling van het vernis ook tot verzwaring aanleiding gegeven konde hebben? Maar het door den Heer OLLAND, volgens zijne opgave gebruikte vernis konde, naar getuigen van ons medelid A. C. OUDEMANS te Delft, dit gevolg niet hebben. Omtrent de nieuwe stukken verzekert de Heer OLLAND, in een schrijven van 22 Junij 1875, dat zij, ongevernist, *van eene wezenlijk zeldzame zuiverheid zijn. Onder honderd stukken zullen waarschijnlijk geen twee voorkomen, die beter zijn;* voegt hij er bij. De Commissie gelooft dit getuigenis van den Heer OLLAND gerust te mogen aannemen.

Te Delft zijn de stukken vergeleken met een zich daar bevindend verguld koperen gewigt, aangewezen door P'', en er is gevonden, in het luchtledige:

17 Novemb. 1875	Kilogr.	K	= P''+ 0.06 mgr.	Kilogr.	+K	= P'' + 0.04 mgr.
8 en 9 Junij 1876	"	"	= P''+ 0.50 "	"	"	= P'' + 0.28 "
20 Julij 1876	"	"	= P''+ 0.41 "	"	"	= P'' + 0.15 "
16 Julij 1877	"	"	= P''+ 0.76 "	"	"	= P'' + 0.92 "

Eene geringe toeneming in gewigt scheen zich ook nu weder te vertoonen van ongeveer $^3/_4$ mgr. in $1^1/_2$ jaar.

Dit gaf aanleiding tot nog eene vergelijking der kilogrammen K en + K met het kilogram P'', den 24 Februarij 1881 te Delft, waarvan de uitslag was, in het luchtledige:

$$K = P'' + 2.44 \text{ mgr.} \qquad + K = P'' + 2.03 \text{ mgr.}$$

De bovenstaande vergelijkingen der kilogrammen met het stuk P'' zijn den 26sten Februarij 1881 in de vergadering der Akademie medegedeeld.

Het besluit lag voor de hand, dat de gewigten K toch weder iets zwaarder waren geworden, of dat mogelijker wijze het stuk P'' iets in gewigt was afgenomen.

Op voorstel der Commissie, is door de Natuurkundige Afdeeling der Akademie tot den Heer Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid het verzoek gerigt, dat het Platina-Kilogram nogmaals mogt ontzegeld worden om tot eene nieuwe vergelijking der gewigten K te dienen. Het verzoek is gereedelijk door Zijne Excellentie toegestaan en den 30sten April 1881 heeft de ontzegeling plaats gehad.

De Kilogrammen K en + K zijn nu in de eerste helft van Mei met het Platina-Kilogram vergeleken. De uitslag is geweest dat de geverniste gewigten geene merkbare verandering hebben ondergaan, terwijl het vergulde Kilogram P'' werkelijk, sedert zijne eerste vervaardiging, iets in zwaarte is afgenomen.

Bepaling van den inhoud en het soortelijk gewigt der Kilogrammen K en + K.

Hiertoe is het Kilogram K of + K gezet in een halven koperen standaard-Liter; de maat verder met gedistilleerd water gevuld en met een dekglas gesloten. De knop, die van het Kilogram afgeschroefd konde worden, is naast het stuk in de maat gelegd, zoodat alleen het massive koper water verplaatst heeft. De gevulde maat, met het Kilogram er *in*, is op eene weegschaal in evenwigt gebragt tegen *Tarra*; dus is:

$$^{1}/_{2} \text{ Liter} + \text{dekglas} + K + W = \textit{Tarra}. \quad . \; . \; . \; (1)$$

Daarna is het Kilogram uit de maat genomen en de maat geheel met water gevuld en is er opnieuw evenwigt gemaakt tegen dezelfde *Tarra*, door *op* het dekglas een gewigt a te zetten; dit gaf:

$$^{1}/_{2} \text{ Liter} + \text{dekglas} + W' + a = \textit{Tarra} \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

dus is:

$$K + W = W' + a \; . \; . \; . \; . \; . \text{ in de lucht.}$$

Daar K + W in de maat hetzelfde volumen heeft als W'

zal men in het luchtledige hebben, als $r\,a$ de reductie tot het luchtledige voor het gewigt a is:

$$K + W + r\,a = W' + a;$$

en het gewigt van het verplaatste water zal zijn in het luchtledige:

$$W' - W = K - a + r\,a$$

$r\,a$ natuurlijk bij de lucht-temperatuur, barometerhoogte en dampdrukking.

Op deze wijze is gevonden den 10den November 1875.

Voor Kilogram K

Temperatuur water $= 13^0.2$ $\quad W' - W = 0.122005$ kilogr.

en voor Kilogram $+$ K

» » $= 14^0.9$ $\quad W' - W = 0.122004$ »

Hieruit volgt met de digtheden van het water bij $13^0.2$ en $14^0.9$ respectievelijk 0.4994109 en 0.9991831:

Volume K bij $13^0.2 = 122076$ mm³, bij 0^0 121989 mm³ bij 15^0 122088 mm³
〃 +K 〃 $14^0.9 = 122104$ 〃 〃 0^0 122005 〃 〃 15^0 122105 〃
Soortelijk gewigt K bij $0^0 = 8.1974$
〃 〃 +K 〃 $0^0 = 8.1964$

HERLEIDING TOT HET LUCHTLEDIGE.

Inhoud Kilogr. bij 15^0C.	K = 122088 mm³	+K = 122105 mm³
» Platina stuk . .	46971 »	46971 »
Verschil bij t^0 . . .	K—P = 75117 mm³ + 5.67(t—15)	+K—P = 75134 mm³ + 5.67(t—15)

Zij b = barometerhoogte, herleid tot 0° C.,
t = de thermometerhoogte in de weegkast,
t' = de drooge thermometer van een psychrometer,
t'' = de natte thermometer van een psychrometer,
d = de dampdrukking,
$B = b - {}^3/_8\, d$.

Dan is:

$$Log.\ \text{Reductie} = Log\ (K-P) + Log\ B + 4.2310771 - 10 - Log\ (1 + 0.003665.\ t)$$

Vergelijking der koperen gevernistE Kilogrammen K en +K met den Platina-Standaard.

den 27sten en 28sten Junij 1876 in het Trippenhuis.

De verificaties zijn gedaan met de balans van Beckers-Sons, behoorende aan de Polytechnische School.

1ste Wegingen door wijlen L. Cohen Stuart.

Van deze kunnen alleen de gemiddelde resultaten medegedeeld worden; de details der enkele wegingen zijn door Stuart medegenomen. Gevoeligheid der balans: 1 schaaldeel = 1.940 mgr.

Kilogram K

Datum 1876.	b mm.	t °	t' °	t'' °	d mm.	B mm.	Reductie. mgr.	lucht. mgr.	K—P luchtled. mgr.	mgr.
28 Junij Voorm.	763.85	22.20	22.50	18.75	13.82	758.67	89.80	—91.64	—1.84	±0.133

Kilogram +K

Datum 1876.	b mm.	t °	t' °	t'' °	d mm.	B mm.	Reductie. mgr.	lucht. mgr.	+K—P luchtled. mgr.	mgr.
28 Junij Namidd.	763.05	23.00	23.50	19.30	13.40	758.02	89.48	—91.02	—1.54	±0.111

2de Wegingen door F. J. STAMKART.

Kilogram K.

Datum. 1876.	*b.* mm.	*t.* °	*t'* °	*t''* °	*d.* mm.	B. mm.	Reductie. mgr.	K—P. lucht. mgr.	K—P. luchtled. mgr.
26 Junij 11u10'	762.6	23.3	24.1	17.2	10.5	758.7	89.45	—91.81	—2.37
								—91.75	—2.15
Namiddag 1u20' en 2u10'	763.1	23.9	24.0	16.5	9.7	759.5	89.36	—91.52	—2.16
								—91.56	—2.20
								—91.59	—2.23
								—91.58	—2.22
								—91.68	—2.32
28 Junij 9u0'	763.1	21.6	21.0	17.5	12.8	759.0	89.28	—92.39	—2.41
								—92.46	—2.48
								—92.09	—2.11
						Gemiddeld	. . . . . .		—2.26

Kilogram +K.

Datum.	*b.*	*t.*	*t'*	*t''*	*d.*	B.	Reductie.	+K—P. lucht.	+K—P. luchtled.
27 Junij Namiddag 3u	763.3	23.9	24.1	16.7	9.8	759.5	89.38	—91.17	—1.79
								—91.47	—2.08
								—91.59	—2.21
								—91.41	—2.03
								—91.44	—2.06
28 Junij 8u25'	764.1	21.6	20.5	16.7	11.9	759.6	90.08	—92.97	—2.89
								—92.61	—2.53
								—92.58	—2.50
						Gemiddeld	. . . . . .		—2.26

Resultaat in het luchtledige. Junij 1876.

STUART. . . . K = Pl — 1.84 +K = Pl — 1.54
STAMKART . . K = Pl — 2.26 +K = Pl — 2.26

Het verschil der uitkomsten tusschen STUART en STAMKART is, zoowel voor K als +K, 0.4 à 0.7 milligram. Waaraan dit kan liggen is onzeker, want dezelfde balans is gebruikt en dezelfde manier van wegen is gevolgd.

Een gemiddeld resultaat kan al zeer weinig van de waarheid afwijken, te weten:

K = Pl — 2.05 +K = Pl — 1.90.

De vergelijkingen der Kilogrammen zijn in de maand Mei 1881, met het Platina-Kilogram, in het Trippenhuis herhaald geworden. Ditmaal is gebruik gemaakt van de balans door Becker Senior vervaardigd, nadat zij door Beckers-Sons nagezien en de messen opnieuw geslepen waren, volgens opdragt door het Bestuur der Akademie, op voorstel der Commissie.

De balans Becker Senior, die in 1838 te Parijs gebruikt is, om het Plat. Kilogram tegen het Archief-Kilogram te verifiëeren en later meermalen gediend heeft, is ook bij de verificatie in 1876 gebruikt, maar toen is zij niet meer voldoende woordhoudend bevonden; van daar het voorstel tot herstelling door de Heeren Beckers-Sons.

Nu is ook gebruik gemaakt van eene balans door Epkens, behoorende aan het Scheikundig Laboratorium te Amsterdam, en door den Hoogleeraar Gunning welwillend op verzoek der Commissie voor deze gelegenheid ten gebruike afgestaan.

Ook van deze balans zijn vooraf, door den instrumentmaker Olland, de messen opnieuw geslepen geworden.

Verificatie van K *en* + K *in Mei* 1881.

Kilogram K.

Balans Becker Senior. Gevoeligheid 1^{sd.} = 0.459 mgr.

Datum. 1881.	*b.* mm.	*t.* °	*t'* °	*t''* °	*d.* mm.	B. mm.	Reductie. mgr.	K.—P. lucht. mgr.	K.—P. luchtled. mgr.
5 Mei.	767.2	16.7	15.6	12.6	9.3	763.7	92.04	—93.28	—1.24
2 tot 4u								—93.79	—1.75
								—93.86	—1.82
								—94.30	—2.26

Gemiddeld K—P = —1.77

Balans Epkens. Gevoeligheid 1^{sd.} = 1.220 mgr.

Datum. 1881.	*b.* mm.	*t.* °	*t'* °	*t''* °	*d.* mm.	B. mm.	Reductie. mgr.	K.—P. lucht. mgr.	K.—P. luchtled. mgr.
7 Mei.	775.9	17.3	16.0	13.5	10.2	772.1	92.87	—94.04	—1.17
1u26'								—94.21	—1.34
tot 2u35'								—94.76	—1.89
								—94.70	—1.83
								—94.93	—2.06

Gemiddeld K—P = —1.66

Gemiddeld volgens de beide balansen:

K—Pl = — 1.71 mgr., in het luchtledige.

Kilogram +K.

Balans BECKER SENIOR.

Datum. 1881.	*b.* mm.	*t.* °	*t'* °	*t''* °	*d.* mm.	B mm.	Reductie mgr.	K—P lucht. mgr.	K—P luchtled. mgr.
6 Mei.	769.9	15.6	15.1	12.8	9.9	766.2	92.71	—94.64	—1.93
1u 25								—95.00	—2.29
tot 3u 15								—94.30	—1.59
								—94.10	—1.39
								—94.70	—1.99
							Gemiddeld +K—Pl. =		—1.84

Balans EPKENS.

7 Mei	776.1	17.4	16.0	13.5	10.2	772.3	92.88	—94.57	—1.69
2u 45'								—95.03	—2.15
4u 0'								—95.09	—2.21
								—95.02	—2.14
								—95.92	—2.33
							Gemiddeld +K—P =		—2.10

Gemiddeld volgens de beide balanzen:

+K—Pl = — 1.97 mgr. in het luchtledige.

In Junij 1876 is gevonden K=Pl—2.05 mgr. +K=Pl—1.90 mgr.
In Mei 1881 » » K=Pl—1.71 » +K=Pl—1.97 »

De overeenkomst is voldoende om te besluiten dat de kilogrammen geene merkbare verandering van gewigt in 5 jaar tijds hebben ondergaan, en dus dat vernis, mits zorgvuldig aangebragt, een koperen stuk gewigt voldoende tegen veranderingen in de zwaarte beschut.

NB. Bij deze zelfde gelegenheid is ook het verguld koperen kilogram P'' van de Polytechnische School met het platina stuk vergeleken geworden, en is gevonden:

P'' = Pl — 3.80 in het luchtledige.

Met de bovenstaande waarden verbonden, volgt hieruit:

$$K = P'' + 2.05 \text{ mgr.} \qquad {}^{+}K = P'' + 1.83 \text{ mgr.}$$

Den 24sten Februarij jl. is te Delft gevonden:

$$K = P'' + 2.44 \text{ mgr.} \qquad {}^{+}K = P'' + 2.03 \text{ mgr.}$$

Tot op $^1/_3$ en $^1/_5$ milligram na, overeenstemmend.

Behalve de Kilogrammen, zijn in elk kistje nog 2 stuks van 2 kilogram elk, en 12 onderdeelen van het kilogram, te zamen ook weder 1 kilogram wegende: in alles 30 stuks gewigt, van het gram tot het dubbele Kilogram.

Van elk stuk kan de knop of het knopje afgeschroefd worden en ter justeering een platinadraadje er in gevoegd worden.

Het is een lange arbeid geweest en een zeer groot getal wegingen zijn gevorderd geworden ter justeering en verifieering van al de stukken, behalve van de beide Kilogrammen.

De vergelijking der Kilogrammen met het Platina-Standaard-Kilogram, waarvan de Akademie de bewaarster is, is gewis het voornaamste van den arbeid, waarvan verslag wordt gegeven. Deze vergelijking kan alleen door of namens de Akademie plaats vinden. De verificatie der onderdeelen of der dubbele Kilogrammen kan door ieder deskundige geschieden, zooals dit reeds in het voorloopig Rapport in 1875 is opgemerkt.

Het zal dus voldoende zijn, de uitkomst der wegingen en berekeningen te vermelden.

Er is aangenomen dat al de stukken, zoowel de dubbele Kilogrammen als de onderdeelen van het kilogram dezelfde soortelijke zwaarte bezitten, hetgeen waarschijnlijk zeer nabij het geval zijn zal.

De vier stuks gewigt, ieder à 2 kilogram, zijn, na vooraf gejusteerd te zijn, vergeleken met de som $K + {}^{+}K$ der beide Kilogrammen. Den 23sten Junij 1876 is gevonden:

$K_2 = K + {}^{+}K + 1.1$ mgr. midden uit 2 wegingen
$\dot{K}_2 = K + {}^{+}K + 1.8$ » » » » »
${}^{+}K_2 = K + {}^{+}K + 1.5$ » » » » »
${}^{+}\dot{K} = K + {}^{+}K + 3.0$ » » » » »

De temperatuur was 21^0.1 C., de barometerhoogte, verminderd met $^3/_8$ dampdrukking, beliep 755.1 mm.

Onder aanneming dat de dubbele Kilogrammen hetzelfde soortelijk gewigt hebben als K en +K, moeten wegingen in het luchtledige dezelfde uitkomst hebben als in de lucht; en dan is volgens de verificatie op het Trippenhuis in Junij 1876 K + +K = 2 Pl — 3.9 mgr., en in 1881 2 Pl — 3.7 mgr., gemidd. — 3.8 mgr.; en dan is.

$$K_2 = 2\,P - 2.7 \text{ mgr.}$$
$$\underset{\cdot}{K}_2 = 2\,P - 2.0 \text{ »}$$
$$+K_2 = 2\,P - 2.3 \text{ »}$$
$$+\underset{\cdot}{K}_2 = 2\,P - 0.8 \text{ »}$$

De gemiddelde fout dezer wegingen kan op ± 1$^1/_2$ mgr. geschat worden. Wij behouden dus alleen de volle mgr. als uitkomst.

Van de onderdeelen der Kilogrammen, zal het voldoende zijn de uitkomsten te vermelden:

	Mgr.
K_2	— 3
$\underset{\cdot}{K}_2$	— 2
K	— 2
H_5	+ 0.4
H_2	— 0.2
$\underset{\cdot}{H}_2$	+ 0.5
H	+ 0.6
D_5	+ 0.1
D_2	— 0.1
D	— 0.2
$\underset{\cdot}{D}$	— 0.1
g_5	— 0.08
g_2	+ 0.09
$\underset{\cdot}{g}_2$	+ 0.07
g	— 0.06

	Mgr.
$+K_2$	— 2
$+\underset{\cdot}{K}_2$	— 1
+K	— 2
$+H_5$	+ 0.4
$+H_2$	— 0.2
$+\underset{\cdot}{H}_2$	+ 0.1
+H	+ 0.4
$+D_5$	+ 0.2
$+D_2$	+ 0.1
+D	0
$+\underset{\cdot}{D}$	— 0.1
$+g_5$	+ 0.07
$+g_2$	— 0.02
$+\underset{\cdot}{g}_2$	— 0.05
+g	— 0.03

De Kilogrammen zijn door K, de Hectogrammen door H, de Decagrammen door D, de grammen door g aangewezen; een cijfer, regts onder aan de letter gesteld, wijst het aantal aan: K_2 een stuk van 2 Kilogrammen, H_5 een stuk van 5 Hectogram, enz.

Daar, waar *twee* stuks van *gelijk* gewigt in eene doos voorkomen, is het eene, ter onderscheiding, door een klein *inktpuntje*, onder aan den bodem, aangewezen.

In de eene doos zijn de stukken door een *kruisje* (+) gemerkt, in de andere doos zonder merk.

Deze lijst is reeds in de jaren 1875 en 1876 opgemaakt.

In elk der doozen voor Curaçao of Suriname zijn twee koperen *Liters* met dekglazen: een *lage Liter*, waarvan de middellijn gelijk aan de hoogte is, en een *hooge Liter*, waarvan de hoogte het dubbel van de middellijn beloopt.

In het voorloopig Rapport is er reeds op gewezen, dat zulke maten niet meer *Standaarden* van inhoudsmaten zijn, in den zin zoo als dat vroeger het geval was, toen tusschen *lengtemaat*, *inhoudsmaat* en *gewigt* nog niet het eenvoudige verband bestond, dat thans bij het metrieke stelsel is in het leven geroepen. De boven genoemde Litermaten voldoen dan ook niet aan de bepaling dat de Nederlandsche inhoudsmaten haren juisteren inhoud zouden hebben bij de temperatuur van 15⁰ C.

Het onderzoek heeft plaats gehad bij temperaturen van 4 tot 15⁰, gemiddeld zeer nabij 10⁰. Bij deze gemiddelde temperatuur is gevonden:

1) Hooge Liter in de doos der gewigten met een kruisje (+)	$i = 999229\ mm^3 + 47.176(t^0 - 10)\ mm^3$
2) Lage Liter in dito doos	$i = 998950$ » $+ 45.623(t^0 - 10)$ »
3) Hooge Liter in de doos der gewigten zonder merkteeken	$i = 999602$ » $+ 54.901(t^0 - 10)$ »
4) Lage Liter in dito doos	$i = 1000829$ » $+ 62.707(t^0 - 10)$ »

Volgens de uitzettings-coëfficiënten in het tweede lid dezer uitdrukkingen, zouden de maten zeer nabij den inhoud van 1 Liter bezitten:

Hooge	+Liter N⁰. 1	bij	ongeveer	26⁰ C.
Lage	+Liter N⁰. 2	»	»	33⁰ »
Hooge	Liter N⁰. 3	»	»	17⁰ »
Lage	Liter N⁰. 4	»	»	— 3⁰ »

De eerste drie Liters kunnen in West-Indië ligtelijk in temperaturen komen waarbij zij den juisten inhoud van 1 Liter bezitten; de laatste blijft steeds te groot. Bij het gebruik der formule is dit echter hoegenaamd geen bezwaar.

Hierbij is evenwel eene opmerking *noodzakelijk*, te weten dat de gevonden inhouden *alleen gelden* bij het gebruik van *hetzelfde dekglas* op ieder der maten in het bijzonder, dat bij de wegingen gediend heeft. Om vergissingen te voorkomen, is in den onderrand van elke der maten in de doos der gewigten met een *kruis* (+) een klein vijlstreepje gemaakt, en op de koperen knoppen der bijbehoorende dekglazen een dito vijlstreepje.

Het zoude doelmatig zijn, de maten in het kistje der gewigten met een kruis, óók met een kruis (+) te merken, en gelijkerwijze ook de dekglazen boven op te teekenen.

In het kistje der ongemerkte gewigten zouden de maten en dekglazen ook overeenstemmend gemerkt kunnen worden.

RAPPORT

OVER EENE VERHANDELING VAN Dr. W. J. VIGELIUS.

GETITELD:

VERGLEICHEND-ANATOMISCHE UNTERSUCHUNGEN

UEBER DAS SOGENANNTE

PANCREAS DER CEPHALOPODEN.

De Commissie, benoemd om over de door den Heer VIGELIUS aangeboden verhandeling, getiteld »vergleichend-anatomische Untersuchungen über das sogenannte Pancreas der Cephalopoden" advies uittebrengen, heeft de eer U dienaangaande het volgende te berichten.

Na een kort overzicht der literatuur, behandelt de Schrijver het eerst de groep der Dibranchiaten Decapoden, bij welke de als »pancreas" bekende klierachtige aanhangselen der lever de hoogste ontwikkeling bereikt hebben, aangezien zij hier geheel en al tot zelfstandige klieren geworden zijn.

Het nauwkeurigst zijn die organen bij Sepia officinalis geschilderd en wel in de allereerste plaats de grof anatomische verhoudingen; dan die der bloedvaten getoetst aan door injectie verkregen praeparaten, en eindelijk de histologische structuur der klierwanden zelven.

Uit de gegeven beschrijving volgt, dat die zoogenoemde leveraanhangsels bij Sepia eene soort van acineuse klieren vormen, die door een zeer rijk haarvatenstelsel worden omsponnen. Vooral uitvoerig en nauwkeurig wordt het klierepithelium beschreven. Door vergelijking der verschillende toestanden, waarin dit epithelium door den Schrijver werd aangetroffen, trekt hij het besluit dat, bij de secretie, de kliercellen zelven, onder trapsgewijze veranderingen, ten slotte geheel te gronde gaan. Hoe het klierepithelium zich later weder opnieuw vormt, kon de Schrijver niet nagaan.

Uit diezelfde afdeeling der Dibranchiaten werden verder ook nog **Rossia**, **Sepiola** en **Loligo** onderzocht en de Heer VIGELIUS is uit die onderzoekingen tot het besluit gekomen, dat bij alle Dibranchiaten Decapoden het als Pancreas bekende klierachtige weefsel zich in meerdere of mindere mate in de gedaante van duidelijk zelfstandige klierachtige organen vertoont.

Dan gaat de Schrijver over tot de behandeling der tweede afdeeling der Dibranchiaten: de Octopoden. Hier treedt ons het pancreas niet meer als een eigen klierachtig orgaan tegen, maar het vormt bij deze afdeeling een in bouw gewijzigd gedeelte van de lever zelve. Het nauwkeurigst werd het geslacht **Eledone** onderzocht en bij de Octopoden, evenals bij de Decapoden, kwam Schrijver tot de overtuiging dat de kliercellen bij hare secretie te gronde gaan.

In het feit, dat bij de Octopoden het pancreas een veel minder hoogen trap van ontwikkeling vertoont dan bij de Decapoden, ziet de Schrijver een nieuw bewijs, dat werkelijk de Dibranchiaten Decapoden — zooals reeds door andere waarnemers langs andere wegen is aangetoond — een hoogeren trap van ontwikkeling vertoonen dan de Dibranchiaten Octopoden.

Ten slotte zij nog vermeld, dat in het zuivere uitscheidings-product der lever geen spoor van galstoffen is aan te toonen, wel daarentegen — en het duidelijkst bij Octopus — twee Enzyme, waarvan het eene in eene zure, het andere in eene alkalische oplossing in staat is, fibrine te verteren.

Een zeven-en-twintigtal, meerendeels keurig uitgevoerde, teekeningen luisteren deze verhandeling op.

De ondergeteekenden aarzelen dan ook niet om voor de opnem ng dezer verhandeling in de werken der Akademie te adviseeren.

De Commissie voornoemd:

Leiden en Utrecht,
Juni 1881.

C. K. HOFFMANN,
TH. W. ENGELMANN

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN Dr. W. KAPTEIJN:

»OVER DEN VORM VAN ZEKERE DIFFERENTIALEN, WIER INTEGRALEN ZUIVER ALGEBRAISCHE FUNCTIËN ZIJN, EN OVER HUNNE INTEGRALEN".

UITGEBRACHT DOOR

D. BIERENS DE HAAN en F. J. VAN DEN BERG.



Schrijver stelt zich in de eerste plaats voor, de vraag te beantwoorden: wanneer is de integraal

$$\int (x-\alpha)^m (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)^p \, dx \,,$$

— waarin p een willekeurig gebroken voorstelt, welks noemer q is, — door zuiver stelkundige vormen voor te stellen?

Daarna past hij het gevondene toe op de binomische integraal

$$\int x^m (a + b x^n)^p \, dx,$$

en op de andere

$$\int x^m (a + b x^n + c x^{2n}) \, dx \,.$$

In § 1 gaat hij uit van eene stelling van Liouville, dat, onder de gestelde voorwaarde van zuiver stelkundige uitkomst, — als men $y^q = F(x)$, rationeel, stelt, — ook $\int y \, dx = y f(x) + C$

is, dat wil zeggen, dat dan y als factor in de waarde van deze integraal optreedt. Daaruit leidt Schr. af den eenig mogelijken vorm van y, zoowel als dien van $\int y\,dx$, altijd onder die voorwaarde van zuiver stelkundige vormen.

Dit wordt in § 2 toegepast op de algemeene functie

$$(x-\alpha)^m\,(\beta+\gamma x+\ldots+\lambda x^n)^p,$$

en daarbij worden er, na nauwkeurige discussie, en uitsluiting van onmogelijke gevallen, twee voorwaarden (8) en (9) gevonden, bij ieder van welke afzonderlijk deze functie tot den vorm van § 1 kan worden teruggebracht. Daarna wordt dan tevens de vorm der integralen (10) en (11) bepaald, die daarbij behooren, zoodra er aan ééne der genoemde voorwaarden is voldaan.

In § 3 gaat hij over tot den vorm

$$x^m\,(a+b\,x^n)^p,$$

en maakt de voorwaarden (12) en (13) op, zooals zij hier uit (8) en (9) volgen.

Ten opzichte van de voorwaarde (12) wordt bewezen, dat er eene noodzakelijke betrekking moet bestaan tusschen de exponenten m, n en p en een zeker getal i, dat met het aantal der gedeeltelijke breuken bij de ontwikkeling der integraal zamenhangt. Die betrekking is

$$(1+p)\,n+m+1=-i,$$

en tevens i een positief veelvoud van n.

Bij dit onderzoek blijkt, dat de tellers A_k van alle gedeeltelijke breuken verdwijnen moeten, tenzij $k=i=$ een veelvoud van n is.

Ten aanzien van de andere voorwaarde (13) komt Schrijver op eene dergelijke noodzakelijke betrekking tusschen m, n en i, maar thans zonder p, namelijk

$$m-n+1=i \text{ en tevens } i \text{ een positief veelvoud van } n.$$

Het eerste gedeelte bewijst hij door aan te toonen, dat de tegenovergestelde onderstellingen, zoowel $m>i+n-1$, als

$m < i + n - 1$, tot ongerijmdheden voeren: het tweede gedeelte wordt evenals boven bewezen (bij (12)).

Merken wij op dat beide vermelde betrekkingen niet alleen noodzakelijk, maar ook voldoende zijn tot het voorgestelde doel.

Daarna wordt nu tevens in beide gevallen de vorm der zuiver algebraïsche integraal zelve bepaald (15) en (17).

Slaan wij nu voor het oogenblik § 4 en 5 over, dan vinden wij in § 6 den vorm

$$x^m (a + b x^n + c x^{2n})^p$$

naar dezelfde methode behandeld, alléén natuurlijk voor het geval, dat de discriminant $b^2 - 4ac > 0$ is, daar anders die vorm in het voorgaande zoude begrepen zijn.

Schrijver begint weder met de voorwaarden (34) en (35) op te maken, zooals zij uit de vroegere (8) en (9) van § 2 hier voortvloeien.

In het eerste geval (34) vindt hij weder de noodzakelijke, maar ook voldoende, betrekking tusschen de exponenten m, n en p en den index i

$$(1 + p) 2n + m + 1 = -i,$$

en i een positief veelvoud van n;

waarbij die grootheden, in verband met de coëfficiënten a, b, c, nu nog eenen determinant Δ tot nul moeten maken, omdat het aantal verkregen vergelijkingen één meer is dan dat der tellers A, die daaruit bepaald moeten worden.

Wat daarentegen de vergelijking (35) betreft, is hier de noodzakelijke, maar evenzeer ook voldoende, betrekking tusschen de bekende grootheden, dat

zoowel $2n + i - (m + 1)$, als i zelf

een positief veelvoud van n moet zijn.

Hier wordt de uitkomst van iets anderen aard dan in § 3; want wel is waar voert de onderstelling $m > 2n + i - 1$ tot ongerijmdheid, maar zoowel aan die van $m = 2n + i - 1$, als aan de andere $m < 2n + i - 1$, kan hier wel voldaan worden.

Omdat er evenwel in het voorlaatste geval meer vergelijkingen zijn dan het aantal te bepalen standvastige coëfficiënten bedraagt, vindt men weder een determinant Δ', die nul moet worden, opdat die vergelijkingen niet met elkander in strijd zouden komen. In het laatste geval daarentegen komt die bizondere omstandigheid niet voor, en ontstaat er dus ook geen determinant.

Hier, namelijk voor de functie $x^m(a + bx^n + cx^{2n})^p$, zijn er dus drie verschillende gevallen van integreerbaarheid onder zuiver algebraïschen vorm, en in die allen worden dan ook de integralen zelven aangegeven.

Keeren wij nu tot § 4 en 5 terug, die eigenlijk niet voldoen aan den titel dezer verhandeling, maar tot grootere volledigheid zijn bijgevoegd, en die wij dan ook, zooals straks blijken zal, ongaarne zouden missen.

Dan vinden wij eerst het bewijs van Tchebichef vermeld, omtrent de beide eenige voorwaarden, dat eene binomische integraal door stelkundige en logarithmische functiën kan worden uitgedrukt. Daarmede volgt uit het voorgaande en uit een nader onderzoek in § 4, wanneer een integraal enkel door logarithmische functiën wordt bepaald; en ook hiervoor komen er twee verschillende voorwaarden te voorschijn.

Zoodra dit onderwerp in § 4 is afgehandeld, gaat Schrijver eindelijk in § 5 over tot het onderzoek van de onderscheidene substitutiën en herleidingen, die er telkens noodig zijn om eene binomische integraal tot enkel stelkundige en logarithmische functiën terug te brengen; hetgeen ook wel dus wordt uitgedrukt »om haar rationeel te maken". Zulks toch is het einddoel van zulke substitutiën, want bij rationeele vormen is de integratie altijd uit te voeren.

De uitkomsten waartoe Schrijver geraakt, zijn tweeled en komen met de bekende overeen; hij vindt ze voor

$$1^0.\ \frac{m+1}{n} + p = \text{geheel},\quad \text{en } 2^0.\ \frac{m+1}{n} = \text{geheel};$$

en wel afzonderlijk, $= 0$, $=$ positief en $=$ negatief geheel: voor beide vormen evenzeer.

Het substitutiën-stelsel bij binomische integralen is nu hetgeen Schrijver langs zijn weg bereikt heeft: het is hem bij deze integralen gelukt, maar nog niet bij die van den anderen vorm, in § 6 behandeld. Evenwel is hij bij deze laatste integralen dit doel toch voor een groot deel naderbij gekomen.

Voor dit onderwerp derhalve zijn des Schrijvers onderzoekingen van veel belang, en wij aarzelen niet de Afdeeling aan te raden, die in hare werken op te nemen.

OVER DEN VORM

VAN

ZEKERE DIFFERENTIALEN,

WIER INTEGRALEN ZUIVER ALGEBRAÏSCHE FUNCTIËN ZIJN EN OVER HUNNE INTEGRALEN.

DOOR

Dr. W. KAPTEIJN.

ALGEMEEN OVERZICHT.

In de eerste paragraaf wordt gesproken over $\int \sqrt[q]{F(x)}\,dx$, waarin $F(x)$ eene rationele functie van x en q een geheel positief getal voorstelt, en wordt aangegeven de meest algemeene vorm dien $F(x)$ kan bezitten zoo men aanneemt dat genoemde integraal zuiver algebraïsch zij. In de tweede paragraaf wordt een begin gemaakt met het onderzoek van de gevallen waarin tot genoemden vorm kan herleid worden de functie $(x-\alpha)^m (\beta + px + \ldots \lambda x^n)^p$ waarin α, $\beta, \ldots \lambda$, m, n en p constanten zijn die zekere voorwaarden vervullen. Deze herleiding wordt in paragraaf 3 ten einde gebracht voor het bijzondere geval dat bovenstaande functie overgaat in $x^m (a + bx^n)^p$ en in paragraaf 6 voor het geval dat zij overgaat in $x^m (a + bx + cx^{2n})^p$. Tevens worden in deze paragrafen de corresponderende integralen bepaald in alle gevallen waarin deze uit zuiver algebraïsche functiën bestaan. Voorts worden in § 4 de gevallen onderzocht, waarin $\int x^m (a + bx^n)^p\,dx$ zuiver logarithmisch is en in § 5 de

algemeene reductieformules van $\int x^m (a + b x^n)^p \, dx$ ontwikkeld.

§ 1. Zijn twee grootheden x en y verbonden door eene vergelijking van den vorm:

$$y^q = F(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarin q een geheel positief getal en $F(x)$ eene rationele functie van x voorstelt; zij verder gegeven dat $\int y \, dx$ waarin y eene der wortels van vergelijking (1) beteekent, eene algebraïsche waarde bezit, dan is bekend dat:

$$\int y \, dx = y f(x) + \text{constante} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

waarin $f(x)$ eene rationele functie van x beduidt.

Uitgaande van deze stelling die het eerst door Liouville bewezen werd en die gemakkelijk uit eene meer algemeene stelling van Abel is af te leiden, kan de meest algemeene waarde van $F(x)$, die voldoet aan de vergelijking (2), op de volgende wijze gevonden worden.

Wanneer door eene functie $F(x)$ de voorwaarde (2) vervuld is, dan bestaat er tusschen de functies $F(x)$ en $f(x)$ eene betrekking die men vindt door de vergelijkingen (1) en (2) te differentiëren en daarna y en $\frac{dy}{dx}$ tusschen deze nieuwe vergelijkingen en (1) te elimineren. Deze betrekking is:

$$\frac{q\left(1 - \frac{df(x)}{dx}\right)}{f(x)} = \frac{\frac{dF(x)}{dx}}{F(x)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

of

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{q} \frac{d}{dx} \cdot lg. \{f(x)^q F(x)\} .$$

Daar nu $f(x)$ en $F(x)$ rationele functies zijn, is ook

de functie $f(x)^q \,.\, F(x)$ rationeel. Noemt men $x - a_1$, $x - a_2, \ldots x - a_l$ de verschillende eerste machtsfactoren dezer laatste functie en geeft door α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_l$ geheele getallen aan die positief nul of negatief zijn, dan kan men derhalve schrijven als algemeenste vorm dezer functie:

$$f(x)^q\, F(x) = B\,(x - a_1)^{\alpha_1}\,(x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_l)^{\alpha_l}$$

waarin B eene constante beteekent.

Stelt men kortheidshalve het laatste product door het symbool

$$B \prod_{i=1}^{i=l} (x - a_i)^{\alpha_i}$$

en de som

$$\frac{\alpha_1}{x - a_1} + \frac{\alpha_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{\alpha_l}{x - a_l}$$

door het symbool

$$\sum_{i=1}^{i=l} \frac{\alpha_i}{x - a_i}$$

voor, zoo vindt men:

$$\frac{d}{dx}\, l \,.\, \{f(x)^q\, F(x)\} = \sum_{i=1}^{i=l} \frac{\alpha_i}{x - a_i} \,.$$

Hiermede is, zóo men stelt $\frac{\alpha_i}{q} = A_i$

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x - a_i}$$

waarin $q\,A_i$ altijd gelijk een geheel getal is.

Deze algemeenste vorm van $\frac{1}{f(x)}$ gesubstitueerd in de ver-

gelijking (3) geeft nu ook den algemeensten vorm van $F(x)$. Immers, voor (3) schrijvende:

$$\frac{d}{dx} l.F(x) = q.\sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x-a_i} + q \frac{d}{dx} lg.\sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x-a_i}$$

zoo vindt men terstond:

$$F(x) = C^q \left(\sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x-a_i}\right)^q \prod_{i=1}^{i=l} (x-a_i)^{qA_i}$$

waarin C^q eene willekeurige constante is, die dezelfde waarde heeft als B.

Uit het voorgaande volgt dat, wanneer y met x verbonden door vergelijking (1), $\int y\,dx$ alleen dan zuiver algebraïsche integralen zal bezitten, wanneer y tot den vorm:

$$C\sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x-a_i} \prod_{i=1}^{i=l} (x-a_i)^{A_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

waarin $q\,A_i$ steeds een geheel getal is, kan herleid worden. Kan y tot deze vorm herleid worden, dan is omgekeerd $\int y\,dx$ steeds zuiver algebraïsch en wel gelijk:

$$C\prod_{i=1}^{i=l} (x-a_i)^{A_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

zoo men de constante der integratie buiten rekening laat.

§ 2. De voorgaande algemeene beschouwing wordt nu toegepast op de functie:

$$y = (x-\alpha)^m (\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)^p \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

waarin ondersteld wordt:

1°. dat de vergelijking

$$\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

alleen ongelijke wortels $a_1, a_2 \ldots a_n$ bezit;

2⁰. dat α eene constante is die verschilt van deze wortels;
3⁰. dat m en n geheele getallen zijn waarvan het laatste steeds positief is;
4⁰. dat p een willekeurig gebroken beteekent, wiens noemer q is.

De vraag is dus onder welke voorwaarden het mogelijk is de functie (6) tot den vorm (4) te herleiden.

Van de grootheden a_i in (4) voorkomende is bekend dat zij allen verschillend zijn; daaronder kunnen voorkomen de grootheden $a_1, a_2 \ldots a_n$ die de wortels zijn van de vergelijking (7) en bovendien andere $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_l$ wier aantal onbepaald is. Onderzoekt men nu of het mogelijk is dat de functie y in den vorm:

$$C\left\{\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots\frac{A_n}{x-a_n}+\frac{A_{n+1}}{x-a_{n+1}}+\ldots\frac{A_l}{x-a_l}\right\}$$
$$(x-a_1)^{A_1}(x-a_2)^{A_2}\ldots(x-a_n)^{A_n}(x-a_{n+1})^{A_{n+1}}\ldots(x-a_l)^{A_l}$$

kan geschreven worden, dan valt al dadelijk in het oog dat zoo men de wortels $a_1, a_2, \ldots a_n$ van (7) in de functie y permuteert deze functie onveranderd blijft; bovenstaande uitdrukking moet dus ook deze eigenschap bezitten, derhalve moet

$$A_1 = A_2 = \ldots A_n.$$

Daar nu

$$\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n = \lambda(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

zoo is

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\ldots\frac{1}{x-a_n}=\frac{d}{dx}\,lg\,(\beta+\gamma x+\ldots\lambda x^n)$$

waarmede dus de vorm (4) overgaat in:

$$\frac{C}{\lambda^{A_1}}\left\{A_1\frac{\gamma+\ldots n\lambda x^{n-1}}{\beta+\gamma x+\ldots\lambda x^n}+\frac{A_{n+1}}{x-a_{n+1}}+\ldots\frac{A_l}{x-a_l}\right\}$$
$$(\beta+\gamma x+\ldots\lambda x^n)^{A_1}(x-a_{n+1})^{A_{n+1}}\ldots(x-a_l)^{A_l}.$$

Deze vorm kan niet identiek zijn met y tenzij $A_1 = 1 + p$. Om dit te bewijzen zal eerst worden aangetoond dat A_1 niet gelijk nul kan zijn. Ware dit laatste toch het geval dan zouden de zoogenaamde kritieke punten (zie BRIOT en BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*) van dezen vorm niet overeenkomen met die van y. Liet men dan de veranderlijke x, uitgaande van een willekeurig punt, éénmaal een gesloten kromme doorloopen die één van de kritieke punten $a_1, a_2, .. a_n$ der functie y en geen der punten $a_{n+1}, .. a_l$ insluit, dan zou deze functie, zoodra x in het punt van uitgang teruggekeerd was, eene andere waarde verkregen hebben dan zij aanvankelijk bezat, terwijl de bovenstaande vorm tot hare oorspronkelijke waarde zou teruggekeerd zijn Hieruit volgt dat A_1 niet nul kan wezen.

Stelt men nu de functie y gelijk bovenstaande vorm en deelt beide leden dezer vergelijking door $(\beta + \gamma x + .. \lambda x^n)^p$ dan blijft in het eerste lid eene functie over die rationeel is en die niet nul of oneindig kan worden voor. de waarden $x = a_1, x = a_2, ... x = a_n$ of met andere woorden die de punten $a_1, a_2, ... a_n$ noch tot nullen, noch tot polen kan hebben. Hieruit volgt dat hetgeen na deeling in het tweede lid overblijft ook eene rationele functie moet zijn wier nullen en polen moeten verschillen van $a_1, a_2 .. a_n$. De orde dezer nullen of polen in het tweede lid moet dus nul wezen. Vereenigt men de breuken van het tweede lid tot eene enkele dan blijkt terstond dat de orde van deze nullen of polen is $A_1 - p - 1$; dus moet

$$A_1 = p + 1.$$

Het is hieruit tevens duidelijk dat de grootheid $q A_1$ waarin q de noemer van p voorstelt, een geheel getal is. De vergelijking waarvan sprake was, is derhalve:

$$(x-\alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left\{ (1+p) \frac{\gamma + .. n \lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + .. \lambda x^n} + \frac{A_{n+1}}{x-a_{n+1}} + .. \frac{A_l}{x-a_l} \right\}$$
$$(\beta + \gamma x + .. \lambda x^n)(x - a_{n+1})^{A_{n+1}} .. (x - a^l)^{A_l}.$$

Het eerste lid hiervan eene rationele functie zijnde, vindt men terstond dat alle coëfficiënten $A_{n+1}, .. A_l$ geheele getallen moeten zijn. In het eerste is voorts α een nul of pool van de m^e orde, dus moet α ook een nul of pool van dezelfde orde wezen van de functie in het tweede lid. Onderstelt men dus $a_{n+1} = \alpha$, dan is, indien A_{n+1} niet gelijk nul is, α een nul of pool van de orde $A_{n+1} - 1$ van het tweede lid, immers, zoo men de som der breuken schrijft als één breuk, dan zal in den noemer dezer breuken $(x - \alpha)^1$ voorkomen, terwijl de teller ondeelbaar is door $x - \alpha$. Indien evenwel $A_{n+1} = 0$ dan is het wel onmogelijk dat in het tweede lid een pool α, maar niet dat er een nul α optreedt, want, zoo men weêr de overblijvende breuken vereenigt tot eene enkele, is het mogelijk dat de teller dezer breuk door $(x - \alpha)^m$ deelbaar is. Er blijft dus nog over te onderzoeken onder welke voorwaarden aan eene der vergelijkingen

$$1 = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left\{ (1+p) \frac{\gamma + .. n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + .. \lambda x^n} + \frac{1+m}{x - \alpha} + \frac{A_{n+2}}{x - a_{n+2}} + .. \frac{A_l}{x - a_l} \right\}$$

$$(\beta + \gamma x + .. \lambda x^n)(x - \alpha)(x - a_{n+2})^{A_{n+2}} .. (x - a_l)^{A_l},$$

$$(x-\alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left\{ (1+p) \frac{\gamma + .. n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + .. \lambda x^n} + \frac{A_{n+2}}{x - a_{n+2}} + .. \frac{A_l}{x - a_l} \right\}$$

$$(\beta + \gamma x + .. \lambda x^n)(x - a_{n+2})^{A_{n+2}} .. (x - a_l)^{A_l}$$

in welke laatste m alleen positief is, kan voldaan worden.

Daar nu de eerste leden dezer vergelijkingen geheele functiën zijn, die geene der punten $a_{n+2}, .. a_l$ tot nullen hebben, zoo moet ook de orde van de nullen of polen $a_{n+2}, .. a_l$ in de tweede leden nul wezen, waaruit volgt:

$$A_{n+2} - 1 = ... = A_l - 1 = 0 .$$

Natuurlijk kunnen eenige der coëfficiënten $A_{n+2}, .. A_l$ ook de waarde nul bezitten; dit geval kan men echter buiten beschouwing laten daar hierdoor het aantal termen dat geheel onbepaald is, slechts zou gereduceerd worden.

Stelt men de gevonden waarden van $A_{n+2}, \ldots A_l$ in de bovenstaande vergelijkingen en schrijft tevens

$$(x - a_{n+2}) \ldots (x - a_l) = x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$$

dan gaan zij over in deze:

$$1 = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left\{ (1+p) \cdot \frac{\gamma + \ldots n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n} + \frac{1+m}{x-\alpha} + \frac{i x^{i-1} + \ldots A_{i-1}}{x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i} \right\}$$
$$(\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)(x - \alpha)(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i) \ldots . (8)$$

$$(x-\alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left\{ (1+p) \frac{\gamma + \ldots n \lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n} + \frac{i x^{i-1} + \ldots A_{i-1}}{x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i} \right\}$$
$$(\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i) \ldots . . (9)$$

Stelt men de vraag onder welke voorwaarden een polynomium $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$ gevonden kan worden dat aan de vergelijkingen (8) of (9) voldoet, dan is deze algemeener dan die welker oplossing gezocht wordt. Beide vragen komen echter op hetzelfde neêr als men dit polynomium onderwerpt aan de bepaling dat het slechts enkelvoudige wortels mag bezitten die verschillen van a_1, $a_2, \ldots a_n$ en α.

Aan vergelijking (8) kan evenwel geen polynomium $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$ voldoen dat gelijke wortels bezit, want dan zoude er eene waarde bestaan waarvoor dit en het polynomium $i x^{i-1} + \ldots A_{i-1}$ gelijktijdig nul zouden zijn. Door invoering dezer waarde zoude dan het tweede lid van vergelijking (8) nul worden, terwijl het eerste lid de constante waarde 1 zoude behouden, hetgeen ongerijmd is. Ook kan geen polynomium met enkelvoudigen wortel a_1, $a_2, \ldots a_n$ of α aan deze vergelijking voldoen omdat zoo men alsdan aan x deze waarde toekende weder het tweede lid de waarde nul zoude verkrijgen hetgeen strijdt tegen het bestaan der vergelijking (8).

Aan vergelijking (9) kan geen polynomium $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$ voldoen dat gelijke wortels bezit die verschillen van α, want zoo men de waarde van een dezer gelijke wortels voor x substitueerde zoude men op eene ongerijmdheid stuiten. Dit-

zelfde zoude ook plaats hebben wanneer onder de enkelvoudige wortels van $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$ eene der grootheden $a_1, a_2, \ldots a_n$ voorkwam.

In de laatste dezer vergelijkingen heeft m eene positieve waarde. Voor het geval dat $m = -1$ is kan men onmiddellijk besluiten dat het onmogelijk is aan de vergelijking (8) te voldoen daar alsdan het tweede lid een nul α bezit die in het eerste lid niet voorkomt.

De vraag blijft dus nog onder welke voorwaarden aan vergelijking (8, en onder welke voorwaarden aan vergelijking (9) kan voldaan worden, waarbij in het oog gehouden dient te worden dat bij de laatste vergelijking alleen die voorwaarden in aanmerking komen onder welke het polynomium $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$ geen enkel- of veelvoudigen wortel α bezit. Heeft men deze voorwaarden gevonden en tevens in die gevallen de waarden der grootheden i, A_1, $A_2, \ldots A_i$ bepaald, dan kan men daaruit besluiten tot de integraal van de differentiaal $y\,dx = (x-\alpha)^m (\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)^p\,dx$ in alle gevallen waarin deze integraal algebraïsch is. Is nl. aan (8) voldaan dan is volgens (5) deze integraal:

$$C(x-a_1)^{1+p}(x-a_2)^{1+p}\ldots(x-a_n)^{1+p}(x-\alpha)^{1+m}(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i)$$

of

$$\frac{C}{\lambda^{1+p}}(\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)^{1+p}(x-\alpha)^{1+m}(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i) \ldots (10)$$

terwijl zoo aan (9) voldaan is, de integraal de waarde

$$\frac{C}{\lambda^{1+p}}(\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)^{1+p}(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i) \ldots\ldots (11)$$

bezit.

§ 3. Beschouwt men de differentiaal $y\,dx = x^m (a + b x^n)^p\,dx$, dan vindt men door in (8) en (9) te stellen:

$$\alpha = 0, \quad \beta = a, \quad \gamma = \delta = \ldots = 0 \quad \lambda = b:$$

$$\frac{b^{1+p}}{C} = \left\{(1+p) \cdot \frac{n b x^{n-1}}{a + b x^n} + \frac{1+m}{x} + \frac{i x^{i-1} + \ldots A_{i-1}}{x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i}\right\}$$
$$(a + b x^n)\, x\, (x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i) \ldots\ldots\ldots (12)$$

en

$$\frac{b^{1+p}}{C} x^m = \left\{(1+p)\frac{n\,b\,x^{n-1}}{a+b\,x^n} + \frac{i\,x^{i-1} + \ldots A_{i-1}}{x^i + A_1\,x^{i-1} + \ldots A_i}\right\}$$
$$(a + b\,x^n)(x^i + A_1\,x^{i-1} + \ldots A_i). \;\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

In het volgende zal verder onderzocht worden onder welke voorwaarden aan eene dezer vergelijkingen kan voldaan worden, daarbij aannemende dat a en b van nul verschillende constanten zijn, m in (13) slechts eene positieve waarde bezit en A_i van nul verschilt. Immers $A_i = 0$ zoude, zooals reeds opgemerkt is, in vergelijking (12) tot eene ongerijmdheid leiden, terwijl, wanneer men de hypothese $A_i = 0$ in vergelijking (13) uitsluit, daardoor voldaan is aan de voorwaarde dat het polynomium $x^i + A_1\,x^{i-1} + \ldots A_i$ geene enkel- of veelvoudige wortel x mag bezitten.

Onderzoek van vergelijking (12).

Aan deze vergelijking kan niet voldaan worden tenzij

$$(1+p)\,n + 1 + m + i = 0$$

en

$$i = r\,n$$

waarin r voorstelt een geheel positief getal.

Om dit aan te toonen schrijve men kortheidshalve $(1+p)\,n + 1 + m = \varepsilon$; men vindt dan voor de coëfficiënten van de verschillende machten van x in (12) de daarachter geplaatste waarden:

x^{i+n} : $(\varepsilon + i)\,b$
x^{i+n-1} : $(\varepsilon + i - 1)\,b\,A_1$
. . . .
x^i : $(\varepsilon + i - n)\,b\,A_n + (m + 1 + i)\,a$
x^{i-1} : $(\varepsilon + i - n - 1)\,b\,A_{n+1} + (m + 1 + i - 1)\,a\,A_1$
. . . .
x^{i-n} : $(\varepsilon + i - 2\,n)\,b\,A_{2n} + (m + 1 + i - n)\,a\,A_n$
x^{i-n-1} : $(\varepsilon + i - 2\,n - 1)\,b\,A_{2n+1} + (m + 1 - i - n - 1)\,a\,A_{n+1}$
. . . .

$$\begin{array}{lll} x^{n+1} & : (\varepsilon+1)\, b\, A_{i-1} + (m+1+n+1)\, a\, A_{i-n-1} \\ x^{n} & : \varepsilon\, b\, A_i + (m+1+n)\, a\, A_{i-n} \\ x^{n-1} & : \qquad (m+1+n-1)\, a\, A_{i-n+1} \\ x^{n-2} & : \qquad (m+1+n-2)\, a\, A_{i-n+2} \\ \cdots & \cdots \\ x^{1} & : \qquad (m+1+1)\, a\, A_{i-1} \\ x^{0} & : \qquad (m+1)\, a\, A_i - \dfrac{b^{1+p}}{C}. \end{array}$$

Zal dus aan (12) voldaan worden, dan moeten al deze $i+n+1$ coëfficiënten afzonderlijk nul zijn. Daar nu ondersteld is dat a en b van nul verschillende constanten zijn, zoo is een eerste vereischte dat $\varepsilon + i = 0$. Is hieraan voldaan, kan kan geene der grootheden $\varepsilon + i-1$, $\varepsilon + i-2, .. \varepsilon$ nul zijn. Dit in het oog houdende moet verder

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = .. = A_{n-1} = 0 \\ A_{n+1} &= A_{n+2} = .. = A_{2n-1} = 0 \\ A_{2n+1} &= A_{2n+2} = .. = A_{3n-1} = 0 \end{aligned}$$

Daar nu A_i niet mag verdwijnen, en dus geen der even aangehaalde coëfficiënten A mag wezen, volgt hieruit dat

$$i = r\, n$$

moet zijn; hiermede is dus het gestelde bewezen.

Neemt men nu aan dat de exponenten m, n en p zoodanig zijn, dat $\varepsilon + r\, n = 0$, waarin r eene der waarden 0, 1, 2, .. bezit, zoo kan steeds en op geene andere wijze, aan (12) voldaan worden dan door een polynomium

$$x^i + A_1\, x^{i-1} + .. A_i = x^{rn} + A_n\, x^{(r-1)n} + .. A_{rn}$$

waarin de coëfficiënten bepaald worden door de volgende vergelijkingen:

$$\frac{1}{A_n} = -\frac{\varepsilon + i - n}{m+1+i} \cdot \frac{b}{a} = \frac{n}{m+1+r\, n} \cdot \frac{b}{a}$$

$$\frac{A_n}{A_{2n}} = \frac{2n}{(m+1+(r-1)n)}\cdot\frac{b}{a}$$

$$\frac{A_{2n}}{A_{3n}} = \frac{3n}{m+1+(r-2)n}\cdot\frac{b}{a}$$

. . . .

$$\frac{A_{r-n}}{A_{rn}} = \frac{rn}{m+1+n}\cdot\frac{b}{a}$$

en

$$\frac{C}{1+p} = \frac{1}{(m+1)a}\cdot\frac{1}{A_{rn}}.$$

Daar nu het polynomium gevonden is dat aan (12) voldoet, kan men ook de integraal van $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ vinden indien de voorwaarde $s+rn=0$ vervuld is. Deze integraal is toch volgens (10):

$$[\text{illegible}]\,(a+bx^n)^{1+p}\,x^{1+m}\,(x^s + A_1 x^{s-1} + \dots A^s)$$

of

$$\frac{x^{1+m}}{(1+m)a}\cdot(a+bx^n)^{1+p}\cdot\left\{\frac{1}{A_{rn}}x^{rn}+\frac{A_n}{A_{rn}}x^{(r-1)n}+\dots 1\right\}.$$

Het onderzoek van (12) leidt dus tot dit besluit:

Wanneer in $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ de exponenten m, n, p voldoen aan de voorwaarde

$$\frac{m+1}{n}+p=-1-r\;(r=0,\ 1,\ 2\,..)\ .\ .\ .\ (14)$$

dan is de integraal dezer differentiaal algebraïsch en gelijk aan:

$$\frac{x^{1+m}}{(1+m)a}(a+bx^n)^{1+p}$$

$$\left\{\frac{n}{m+1+rn}\cdot\frac{2n}{m+1+(r-1)n}\cdots\frac{rn}{m+1+n}\cdot\frac{b^r}{a^r}x^{nr}+\right.$$

$$+\frac{2n}{m+1+(r-1)n}\cdots\frac{rn}{m+1+n}\cdot\frac{b^{r-1}}{a^{r-1}}\cdot x^{n(r-1)}+$$

$$\left.+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +1\right\}\ldots(15)$$

Het is gemakkelijk in te zien dat zoo de voorwaarde (14) vervuld is, nooit eene der waarden $m+1+rn$, $m+1+(r-1)n, \ldots m+1+n$, $m+1$, in de noemers der breuken voorkomende, nul kan wezen

Ter opheldering van het voorgaande het voorbeeld $x(a+bx^3)^{-\frac{11}{3}}dx$ nemende, vindt men, daar de voorwaarde (14) vervuld is, dat de integraal dezer differentiaal eene algebraïsche waarde zal bezitten. De waarde van r hier 3 zijnde, is voorts de integraal volgens (15):

$$\frac{x^2}{2a}(a+bx^3)^{-\frac{8}{3}}\left\{\frac{3\,.\,6\,.\,9}{11\,.\,8\,.\,5}\frac{b^3}{a^3}x^9+\frac{6\,.\,9}{8\,.\,5}\frac{b^2}{a^2}x^6+\frac{9}{5}\frac{b}{a}x^3+1\right\}.$$

Uit het onderzoek van vergelijking (13) *blijkt dat hieraan niet kan voldaan worden tenzij*

$$m-n+1=i \quad \text{en} \quad i=rn$$

waarin weêr r een geheel positief getal voorstelt.

Om dit te bewijzen merke men vooreerst op dat aan (13) niet voldaan kan worden indien het positieve getal m grooter is dan $i+n-1$. Dit behoeft geen betoog. Indien in de tweede plaats $m < i+n-1$ kan evenmin aan vergelijking (13) voldaan worden. Dit laatste wordt als volgt bewezen.

Schrijft men kortheidshalve $(1+p)n=\eta$ dan vindt men voor de coëfficiënten van de verschillende machten van x in het tweede lid der vergelijking (13) de daarachter geplaatste waarden:

$$
\begin{array}{ll}
x^{i+n-1} & : (\eta + i)\, b \\
x^{i+n-2} & : (\eta + i - 1)\, b\, A_1 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \\
x^{i-1} & : (\eta + i - n)\, b\, A_n + i\, a \\
x^{i-2} & : (\eta + i - n - 1)\, b\, A_{n+1} + (i-1)\, a\, A_1 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \\
x^{n} & : (\eta + 1)\, b\, A_{i-1} + (n+1)\, a\, A_{i-n-1} \\
x^{n-1} & : \eta\, b\, A_i + n\, a\, A_{i-n} \\
x^{n-2} & : (n-1)\, a\, A_{i-n+1} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \\
x^{1} & : 2\, a\, A_{i-2} \\
x^{0} & : a\, A_{i-1}\ .
\end{array}
$$

Wanneer nu $m < i + n - 1$ of $m = i + n - 1 - q$, waarin q eene der waarden $1, 2, \ldots i + n - 1$ bezit, dan is het noodig, om aan (13) te voldoen, dat voldaan worde aan de vergelijkingen die ontstaan zoo men, in bovenstaande rij, de coëfficiënt van x^m of $x^{i+n-1-q}$ gelijk $\frac{b^{1+p}}{C}$ en alle overige gelijk nul stelt.

Uit de eerste dezer vergelijkingen volgt dan terstond dat $\eta + i = 0$ moet zijn. Is deze voorwaarde vervuld dan zijn de getallen $\eta + i - 1$, $\eta + i - 2, \ldots \eta$ van nul verschillend. Verder blijkt dat om aan de overige vergelijkingen te voldoen de waarden van

$$
\begin{array}{llll}
A_q\ , & A_{q+n}\ , & A_{q+2n}\ , & \ldots . \\
A_n\ , & A_{2n}\ , & A_{3n}\ , & \ldots .
\end{array}
$$

van nul verschillend, alle overige grootheden A gelijk nul moeten zijn.

Is nu $q < i$ of een veelvoud van n, bijvoorbeeld $q = r_1 n$, en houdt men in het oog dat de waarde van A_i niet nul mag wezen en dat dus A_i een der termen van de twee zooeven vermelde reeksen van grootheden A moet zijn, dan kan men i niet anders stellen dan een veelvoud van n, dus $i = r n$.

Is daarentegen $q < i$ en geen veelvoud van n, dus

$q = r_1 n + q_1$, waarin q_1 eene der waarden 1, 2, .. $n - 1$ bezit, dan kan men i niet anders stellen dan

$$i = rn + q_1 \quad \text{of} \quad i = rn.$$

De eerste onderstelling leidt echter terstond tot eene ongerijmdheid. Immers als $q < i$ en dus $m = i + n - 1 - q > n - 1$ is, zoodat, in de boven voorkomende rij der coëfficiënten van x^{i+n-1} tot x^0, de $n - 1$ laatste, zijnde die van x^{n-2} tot x^0, niet bevatten den eenigen coefficient nl. dien van x^m, welke van nul moet verschillen, en deze $n - 1$ coëfficiënten dus allen gelijk nul moeten wezen, dan worden ook

$$A_{i-n+1}\,,\; A_{i-n+2}\,,\; \ldots\; A_{i-2}\,,\; A_{i-1}$$

of

$$A_{(r-1)n+q_1+1},\; A_{(r-1)n+q_1+2},\; \ldots\; A_{(r-1)n+q_1+n-2},\; A_{(r-1)n+q_1+n-1}$$

allen gelijk nul gevonden. Let men nu op de waarde van q_1 dan zal eene dezer laatste coëfficiënten zijn A_{rn}. Voor deze coëfficiënt A_{rn} zoude men dus eene waarde nul vinden en dit is in strijd met hetgeen reeds werd opgemerkt, nl. dat, om aan de vergelijkingen te voldoen, A_n, A_{2n}, A_{3n} ... dus ook A_{rn}, van nul verschillend moeten zijn.

Welke waarde derhalve q heeft (1, 2, .. $i + n - 1$), men kan aan de vergelijkingen niet voldoen tenzij $i = rn$. Maar ook deze hypothese leidt tot eene ongerijmdheid, daar zij strijdt met de noodzakelijke voorwaarde $\eta + i = 0$. Immers in deze vergelijking schrijvende $\eta = (1 + p)\, n$ en $i = rn$ volgt daaruit $1 + p + r = 0$ wat ongerijmd is daar p een breuk voorstelt en r een geheel getal.

Hiermede is dus bewezen dat m ook niet kleiner kan zijn dan $i + n - 1$. Derhalve is eene noodzakelijke voorwaarde om aan de vergelijking (13) te voldoen:

$$m = i + n - 1.$$

Indien nu $m = i + n - 1$, volgt uit de vergelijkingen, die de gelijkstelling der coëfficiënten van de verschillende machten van x en de beide leden van (13) oplevert dat aan deze vergelijking niet voldaan kan worden indien eene der

waarden $\eta + i$, $\eta + i - n$, $\eta + i - 2n$,.. nul is. Verder kan aan dit stel vergelijkingen niet voldaan worden tenzij:

$$\begin{array}{llll} A_{i-1} & = A_{i-2} & = \ldots = A_{i-n+1} & = 0 \\ A_{i-n-1} & = A_{i-n-2} & = \ldots = A_{i-2n+1} & = 0 \\ A_{i-2n-1} & = A_{i-2n-2} & = \ldots = A_{i-3n+1} & = 0 \; . \\ \ldots & & & \end{array}$$

De eenige coëfficiënten A die dus kunnen blijven bestaan zijn:

$$A_i \; , \quad A_{i-n} \; , \quad A_{i-2n} \; \ldots.$$

Omdat voorts A_n, A_{2n},.. van nul verschillend moeten zijn om aan de vergelijkingen te kunnen voldoen, blijkt dat men aan i geene andere waarde kan toekennen dan $i = rn$.

Heeft i deze waarde dan merke men nog op dat de waarden van $\eta + i$, $\eta + i - n$, $\eta + i - 2n$... nimmer nul kunnen zijn.

Aan vergelijking (13) kan dus niet voldaan worden tenzij $m = i + n - 1$ en $i = rn$.

Zijn deze voorwaarden voldaan zoo kan steeds en op geene andere wijze, aan (13) voldaan worden dan door het polynomium

$$x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_{i-1} = x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + \ldots A_{rn}$$

waarin

$$A_n = - \frac{i}{\eta + i - n} \cdot \frac{a}{b} = - \frac{rn}{\eta + (r-1)n} \cdot \frac{a}{b}$$

$$A_{2n} = - \frac{(r-1)n}{\eta + (r-2)n} \cdot \frac{a}{b} \cdot A_n$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$A_{rn} = - \frac{n}{\eta} \cdot \frac{a}{b} \cdot A_{(r-1)n}$$

en

$$\frac{C}{b^{1+p}} = \frac{1}{(\eta + rn)\, b} \, .$$

Daar nu het polynomium gevonden is dat aan (13) voldoet, kan men ook de integraal van $x^m (a + b x^n)^p dx$ vinden, indien de voorwaarde $m + 1 = (r + 1) n$ vervuld is.

Deze integraal is toch volgens (11)

$$\frac{C}{b^{1+p}} (a + b x^n)^{1+p} (x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i)$$

of

$$\frac{1}{(\eta + r n) b} (a + b x^n)^{1+p} (x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + \ldots A_{rn}).$$

Het onderzoek van (13) leidt dus tot dit besluit:

Wanneer in $x^m (a + b x^n)^p dx$ *de exponenten* m n *en* p *voldoen aan de voorwaarde*

$$\frac{m+1}{n} = 1 + r \, (r = 0, 1, 2 \ldots), \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

dan is de integraal dezer differentiaal algebraïsch en gelijk aan:

$$\frac{1}{n(1 + p + r) b} (a + b x^n)^{1+p} \left\{ x^{rn} - \frac{r}{p + r} \cdot \frac{a}{b} \cdot x^{(r-1)n} + \right.$$
$$\left. + \frac{r-1}{p+r-1} \cdot \frac{r}{p+r} \frac{a^2}{b^2} x^{(r-2)n} - \ldots + (-1)^r \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2}{p+2} \cdots \frac{r}{p+r} \frac{a^r}{b^r} \right\} \ldots (17)$$

Ter opheldering van het voorgaande: het voorbeeld $x^8 (a + b x^3)^p dx$ nemende, vindt men dat de integraal dezer differentiaal zuiver algebraïsch is, omdat de voorwaarde (16) voldaan is. De waarde van r hier 2 zijnde, is voorts de integraal, volgens (17):

$$\frac{1}{3(p + 3) b} (a + b x^3)^{1+p} \left\{ x^6 - \frac{2}{p+2} \cdot \frac{a}{b} x^3 + \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2}{p+2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right\}.$$

Verder volgt nog uit het voorgaande dit:

Wanneer de exponenten aan geene der voorwaarden (14) *en* (16) *voldoen, is* $\int x^m (a + b x^n)^p dx$ *niet zuiver algebraïsch.*

§ 4. Uit de onderzoekingen van TCHEBICHEF (*Journal de Liouville*, Année 1853) is bekend, dat de eenige gevallen waarin $x^m(a + bx^n)^p\,dx$ eene integraal bezit, die door algebraïsche en logarithmische functiën kan worden uitgedrukt zijn die, waarin aan de volgende twee voorwaarden voldaan is:

$$\frac{1+m}{n} + p = \text{geheel} \qquad \frac{1+m}{n} = \text{geheel}.$$

Zondert men hiervan af de gevallen waarin de integraal zuiver algebraïsch is, nl.:

$$\frac{1+m}{n} + p = -1, -2, -3, .. \qquad \frac{1+m}{n} = 1, 2, 3, ..$$

dan houdt men voor de gevallen waarin de integraal zuiver logarithmisch of gemengd algebraïsch en logarithmisch is over:

$$\frac{1+m}{n} + p = 0, 1, 2, \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

$$\frac{1+m}{n} = 0, -1, -2, \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Onderzoek van de gevallen waarin aan de voorwaarde (18) *voldaan en de integraal zuiver logarithmisch is.*

Wanneer $1 + m + np = in$ $(i = 1, 2, 3 ..)$, kan de integraal door herhaalde toepassing der formule:

$$\int x^{in-np-1} R^p\,dx =$$
$$= \frac{x^{(i-p-1)n}}{bin} R^{p+1} - \frac{a(i-p-1)}{bi} \int x^{(i-1)n-np-1} R^p\,dx, \ldots \quad (20)$$

waarin kortheidshalve $a + bx^n$ door R is vervangen, herleid worden tot algebraïsche functiën en $\int x^{-np-1} R^p\,dx$. Daar nu in deze laatste integraal $1 + m + np = 0$ is, zoo is het

duidelijk dat geene zuiver logarithmische integralen kunnen gevonden worden tenzij $1 + m + np = 0$.

Omgekeerd, wanneer deze voorwaarde vervuld is, mag men echter niet besluiten dat de integraal zuiver logarithmisch is.

Schrijft men toch $p = r + \frac{p'}{q}$ waarin r een geheel getal q een geheel positief getal en p' een geheel getal kleiner dan q voorstelt, voorts $x = \frac{1}{u}$ en $b + a u^n = t^q$ dan is:

$$\int x^{-np-1} R^p \, dx = -\int \frac{(b + a u^n)^p}{u} du = -\frac{q}{n} \int \frac{t^{qr+p'+q-1}}{t^q - b} dt.$$

Ontbindt men de breuk in de laatste integraal voorkomende, dan ziet men gemakkelijk in dat genoemde integraal, dus ook $\int x^{-np-1} R^p \, dx$ zuiver logarithmisch is als:

$$-2 < qr + p' + q - 1 < q$$

of

$$-\frac{q+1}{q} < r + \frac{p'}{q} < \frac{1}{q}$$

en in deze gevallen alleen.

Daar nu $np = -1 - m =$ geheel, zoo kan men $q = n$ nemen, dus blijkt dat alleen wanneer

$$r + \frac{p'}{q} = p = -\frac{1}{n}, \; -\frac{2}{n}, \ldots -\frac{n-1}{n}, \; \ldots \quad (21)$$

de integraal zuiver logarithmisch zal wezen.

De waarde dezer integraal $\int \frac{x^{k-1}}{R^{\frac{k}{n}}} dx \; (k = 1, 2, .. n - 1)$ bepaalt men door, als boven, de veranderlijke t in te voeren. Zij wordt dan:

$$-\int \frac{t^{n-k-1}}{t^n - b} dt$$

of

$$-\int\left(\frac{A_0}{t-b_1}+\frac{A_1}{t-\varrho_1 b_1}+\cdots\frac{A_{n-1}}{t-\varrho_1^{n-1}b_1}\right)dt$$

waarin $b_1 = \sqrt[n]{b}$ en ϱ_1 een oorspronkelijke wortel van den vergelijking $t^n = 1$ voorstelt terwijl

$$A_j = \frac{(\varrho_1{}^j b_1)^{n-k-1}}{n(\varrho_1{}^j b_1)^{n-1}} = \frac{1}{n b_1{}^k}\cdot\frac{1}{\varrho_1{}^{kj}}\ (j = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1).$$

Integreert men nu en laat de constante weg dan vindt men:

$$-\frac{1}{n b_1{}^k}\, lg\left\{(t-b_1)(t-\varrho_1 b_1)^{\frac{1}{\rho_1{}^k}}\ldots(t-\varrho_1{}^{n-1}b_1)^{\frac{1}{\rho_1{}^{(n-1)k}}}\right\}$$

of terugkeerende tot de oorspronkelijke veranderlijke:

$$-\frac{1}{nb_1{}^k}lg\left\{\left(\frac{1}{x}R^{\frac{1}{n}}-b_1\right)\left(\frac{1}{x}R^{\frac{1}{n}}-\varrho_1 b_1\right)^{\frac{1}{\rho_1{}^k}}\ldots\left(\frac{1}{x}R^{\frac{1}{n}}-\varrho_1{}^{n-1}b_1\right)^{\frac{1}{\rho_1{}^{(n-1)k}}}\right\}\ldots(22)$$

Onderzoek van de gevallen waarin aan de voorwaarde (13) *voldaan en de integraal zuiver logarithmisch is.*

Wanneer $1 + m = -in\ (i = 1,\ 2,\ 3\ldots)$ kan de integraal door herhaalde toepassing van de formule:

$$\int x^{-in-1} R^p\, dx = -\frac{x^{-in} R^{p+1}}{ina} + \frac{b(p+1-i)}{ia}\int x^{-(i-1)n-1} R^p\, dx \ldots(23)$$

herleid worden tot algebraïsche functiën en $\int x^{-1} R^p\, dx$.

In deze laatste integraal is $1 + m = 0$, derhalve kunnen de integralen niet zuiver logarithmisch zijn tenzij $1 + m = 0$.

Is deze voorwaarde vervuld, dan is evenwel niet altijd de integraal zuiver logarithmisch.

Schrijft men weêr, als boven, $p = r + \frac{p'}{q}$, dan is zoo $R = t^q$:

$$\int x^{-1} R^p \, d\,x = \frac{q}{n} \int \frac{t^{qr+p'+q-1}}{t^q - a} d\,t.$$

Deze integralen zullen alleen zuiver logarithmisch zijn wanneer:

$$-2 < q\,r + p' + q - 1 < q$$

of

$$-\frac{q+1}{q} < r + \frac{p'}{q} < \frac{1}{q}$$

waaruit blijkt dat alleen wanneer

$$r + \frac{p'}{q} = p = -\frac{q-1}{q}, \; -\frac{q-2}{q}, \ldots -\frac{1}{q} \ldots \quad (24)$$

de integraal zuiver logarithmisch zal wezen.

De waarde dezer integraal $\int \frac{d\,k}{x\,R^{\frac{k}{q}}}$ $(k = 1, 2, \ldots, q-1)$ bepaalt men door invoering der veranderlijke t. Zij wordt dan:

$$\frac{q}{n} \int \frac{t^{q-1-k}}{t^q - a} d\,t$$

of

$$\frac{q}{n} \int \left(\frac{A_0}{t - a_1} + \frac{A_1}{t - \varrho\, a_1} + \ldots \frac{A_{q-1}}{- \varrho^{p-1}\, a_1} \right) d\,t$$

waarin $a_1 = \sqrt[q]{a}$, ϱ eene oorspronkelijke wortel van de vergelijking $t^q = 1$ en

$$A_j = \frac{(\varrho^j\, a_1)^{q-1-k}}{q\,(\varrho^j\, a_1)^{q-1}} = \frac{1}{q\,a_1^{\,k}} \frac{1}{\varrho^{kj}} (j = 0,\; 1,\; 2, \ldots, q-1).$$

Integreert men nu en laat de constante weg, dan vindt men

$$\frac{1}{n\,a_1^{\,k}}\, lg \left\{ (t - a_1)\,(t - \varrho\,a_1)^{\frac{1}{\varrho^k}} \ldots (t - \varrho^{q-1}\,a_1)^{\frac{1}{\varrho^{(q-1)k}}} \right\}$$

of terugkeerende tot de oorspronkelijke veranderlijke:

$$\frac{1}{n\,a_1{}^k}\,lg\left\{(R^{\frac{1}{q}}-a_1)\,(R^{\frac{1}{q}}-\varrho\,a_1)^{\frac{1}{\varrho^k}}\,..\,(R^{\frac{1}{q}}-\varrho^{q-1}\,a_1)^{\frac{1}{\varrho^{(q-1)k}}}\right\}\;...(25)$$

§ 5. De algemeene reductieformules van $\int x^m\,(a+b\,x^n)^p\,d\,x$, ingeval deze integraal uit algebraïsche en logarithmische functiën of slechts uit een van beide bestaat, kunnen uit het voorgaande worden afgeleid.

1[e] *Geval* $\frac{m+1}{n}+p=$ geheel.

a. Zij in de eerste plaats $m+1+n\,p=0$. Schrijft men dan $p=r+\frac{p'}{n}$, waarin nu p' positief ondersteld wordt, zoo is

$$p=r+1-\frac{n-p'}{n}=r+1-\frac{k}{n}.$$

Men onderscheide nu 3 gevallen, n.l.:

1. $r+1$ *positief.* Dan herleidt men $\int x^{-n\,p-1}\,R^p\,d\,x$ door de formule:

$$\int x^{-n\,p-1}\,R^p\,d\,x=-\frac{x^{-n\,p}}{n\,p}R^p+b\int x^{n\,(1-p)-1}\,R^{p-1}\,d\,x$$

$r+1$ malen achtereenvolgens toe te passen. Men vindt op deze wijze:

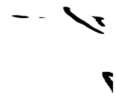
$$\int x^{-np-1}R^p dx=-\frac{x^{-np}}{n\,p}\,R_p+b.\frac{x^{n(1-p)}}{n\,(1-p)}R^{p-1}+b^2.\frac{x^{n(2-p)}}{n\,(2-p)}R^{p-2}+..$$
$$+\,b^r\,.\,\frac{x^{n(r-p)}}{n\,(r-p)}\,R^{p-r}+b^{r+1}\int\frac{x^{k-1}}{R^{\frac{k}{n}}}\,d\,x.\;.\;.\;.\;.\;.\;(26)$$

2. $r+1$ *negatief.* Men vindt dan door de formule:

$$\int x^{-np-1}\,R^p\,d\,x=\frac{x^{-n(p+1)}}{b\,n\,(p+1)}\,R^{p+1}+\frac{1}{b}\int x^{-n(p+1)-1}\,R^{p+1}\,d\,x$$









b.

Dit

den ter

(20) toe

$\int x^{in-np-}$

$+ \frac{(i-}{}$

$+ ($

$+ ($

c. Z

De

drukt

2·

a.

weder $p = r + \frac{p'}{q}$ waarin p' een geheel positief getal kleiner dan q voorstelt, dan is:

$$p = r + 1 - \frac{q - p'}{q} = r + 1 - \frac{k}{q}.$$

Men onderscheide als boven de volgende 3 gevallen:

1. $r + 1$ *positief*. Past men dan de formule:

$$\int \frac{R^p}{x} dx = \frac{R^p}{np} + a \int \frac{R^{p-1}}{x} dx$$

$r + 1$ malen achtereenvolgens toe, zoo vindt men:

$$\int \frac{R^p}{x} dx = \frac{R^p}{np} + a . \frac{R^{p-1}}{n(p-1)} + a^2 . \frac{R^{p-2}}{n(p-2)} + .. a^r \frac{R^{p-r}}{n(p-r)} + \\ + a^{r+1} \int \frac{dx}{x R^{\frac{k}{q}}} \dots \dots \dots \dots (30)$$

2. $r + 1$ *negatief*. Door alsdan de formule:

$$\int \frac{R^p}{x} dx = - \frac{R^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{1}{a} \int \frac{R^{p+1}}{x} dx$$

$-(r + 1)$ malen achtereenvolgens toe te passen komt:

$$\int \frac{R^p}{x} dx = - \frac{R^{p+1}}{an(p+1)} - \frac{1}{a} . \frac{R^{p+2}}{an(p+2)} - \frac{1}{a^2} . \frac{R^{p+3}}{an(p+3)} - \dots \\ - \frac{1}{a^{-r-2}} \frac{R^{p-r-1}}{an(p-r-1)} + \frac{1}{a^{-r-1}} \int \frac{dx}{x R^{\frac{k}{q}}} .. (31)$$

3. $r + 1$ *nul*. Men vindt dan, zie (25)

$$\int \frac{dx}{xR^{\frac{k}{q}}} = \frac{1}{na_1{}^k} lg \left\{ (R^{\frac{1}{q}} - a_1)(R^{\frac{1}{q}} - \varrho a_1)^{\frac{1}{\varrho k}} .. (R^{\frac{1}{q}} - \varrho^{q-1} a_1)^{\frac{1}{\varrho^{(q-1)k}}} \right\} .. (32)$$

b. Zij in de tweede plaats $m + 1 = - in$ $(i = 1, 2, 3 ..)$

Dit geval kan tot het vorige nl. $m + 1 = 0$ worden teruggebracht door i malen achtereenvolgens de formule (23) toe te passén. Men verkrijgt dan:

$$\int x^{-in-1} R^p \, dx = -\frac{R^{p+1}}{na}\left\{\frac{x^{-in}}{i} + \frac{p+1-i}{i} \cdot \frac{x^{-(i-1)n}}{i-1} \frac{b}{a} + \right.$$

$$+ \frac{(p+1-i)(p+1-(i-1))}{i(i-1)} \cdot \frac{x^{-(i-2)n}}{i-2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \ldots$$

$$\left. + \frac{(p+1-i)(p+1-(i-1))\ldots(p+1-2)}{i(i-1)\ldots 2} \cdot \frac{x^{-n}}{1} \cdot \frac{b^{i-1}}{a^{i-1}}\right\}$$

$$+ \frac{(p+1-i)(p+1-(i-1))\ldots(p+1-1)}{i(i-1)\ldots 1} \frac{a^i}{b^i} \int \frac{R^p}{x} dx \ldots (33)$$

c. Zij in de derde plaats $m + 1 = -in$ $(i = -1, -2, -3, \ldots)$. De integraal is dan zuiver algebraïsch en wordt uitgedrukt door (17).

§ 6. Bij het onderzoek van $\int x^m (a + bx^n + cx^{2n})^p \, dx$ waarin a, b en c van nul verschillende constanten beteekenen wordt ondersteld dat $b^2 - 4ac \gtrless 0$, daar uit het voorgaande deze integraal gevonden kan worden indien $b^2 = 4ac$.

De gevallen waarin de bovenstaande integraal zuiver algebraïsch is worden volgens paragraaf 2 gevonden door na te gaan in welke gevallen kan voldaan worden aan eene der beide volgende vergelijkingen:

$$1 = \frac{C}{c^{1+p}}\left\{(1+p)\frac{nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1}}{a + bx^n + cx^{2n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+m}{x} + \frac{ix^{i-1} + \ldots A_{i-1}}{x^i + \ldots A_i}\right\}(a + bx^n + cx^{2n})x(x^i + \ldots A_i) \ldots (34)$$

$$x^m = \frac{C}{c^{1+p}}\left\{(1+p) \cdot \frac{nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1}}{a + bx^n + cx^{2n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{ix^{i-1} + \ldots A^{i-1}}{x^i + \ldots A_i}\right\}(a + bx^n + cx^{2n})(x^i + \ldots A_i) \ldots (35)$$

daarbij aannemende dat A_i van nul verschilt en m in (35) eene positieve waarde bezit.

Onderzoek van vergelijking (34).

Aan deze vergelijking kan niet voldaan worden tenzij

$$2(1+p)n + 1 + m + i = 0$$

en

$$i = rn$$

waarin r voorstelt een geheel positief getal, grooter dan nul

Om dit aan te toonen schrijve men kortheidshalve

$$2(1+p)n + 1 + m = \eta \qquad (1+p)n + 1 + m = \varepsilon\,,$$

men vindt dan voor de coëfficiënten van de verschillende machten van x in (34) de daarachter geplaatste waarden:

x^{2n+i} : $(\eta + i)\,c$

x^{2n+i-1} : $(\eta + i - 1)\,c\,A_1$

. . . .

x^{n+i} : $(\eta + i - n)\,c\,A_n + (\varepsilon + i)\,b$

x^{n+i-1} : $(\eta + i - n - 1)\,c\,A_{n+1} + (\varepsilon + i - 1)\,b\,A_1$

. . . .

x^i : $(\eta + i - 2n)\,c\,A_{2n} + (\varepsilon + i - n)\,b\,A_n + (1 + m + i)\,a$

x^{i-1} : $(\eta + i - 2n - 1)\,c\,A_{2n+1} + (\varepsilon + i - n - 1)\,b\,A_{n+1} +$
$+ (1 + m + i - 1)\,a\,A_1$

. . . .

x^{2n} : $\eta\,c\,A_i + (\varepsilon + n)\,b\,A_{i-n} + (1 + m + 2n)\,a\,A_{i-2n}$

x^{2n-1} : $(\varepsilon + n - 1)\,b\,A_{i-n+1} + (1 + m + 2n - 1)\,a\,A_{i-2n+1}$

. . . .

x^n : $\varepsilon\,b\,A_i + (1 + m + n)\,a\,A_{i-n}$

x^{n-1} : $(1 + m + n - 1)\,a\,A_{i-n+1}$

. . . .

x^1 : $(1 + m + 1)\,a\,A_{i-1}$

x^0 : $(1 + m)\,a\,A_i - \dfrac{c^{1+p}}{C}$.

Door $i = 0$ in de vergelijking (34) te substitueren vindt men terstond eene ongerijmdheid. Stelt men $i > 0$ dan zal aan deze vergelijking voldaan worden zoo bovenstaande $2n + i + 1$ coëfficiënten allen gelijk nul zijn.

Een eerste vereischte hiervoor is $\eta + i = 0$; wanneer aan deze voorwaarde voldaan is, zullen $\eta + i - 1$, $\eta + i - 2, \ldots \eta$, $\varepsilon + i$, $\varepsilon + i - 1, \ldots \varepsilon$ allen van nul verschillende waarden bezitten. Hieruit volgt in de tweede plaats dat allen coëfficiënten A behalve

$$A_n\,,\quad A_{2n}\,,\quad A_{3n}\;\ldots$$

nul moeten zijn. Daar nu A_i niet nul mag wezen, moet wel aangenomen worden $i = rn$, waarmede het gestelde bewezen is.

Wanneer nu de exponenten m, n en p zoodanig zijn dat

$$2(1+p)n + 1 + m + rn = 0 \quad (r = 1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

zoo kan steeds en op geene andere wijze aan vergelijking (34) voldaan worden dan door een polynomium

$$x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i = x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + \ldots A_{rn}$$

waarin de coëfficiënten bepaald worden door de volgende vergelijkingen :

$$\left.\begin{array}{r}
+(r-1)n)c A_n + (\varepsilon + rn) b = 0 \\
+(r-2)n)c A_{2n} + (\varepsilon + (r-1)n) b A_n + (1 + m + rn) a = 0 \\
+(r-3)n)c A_{3n} + (\varepsilon + (r-2)n) b A_{2n} + (1 + m + (r-1)n) a A_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta c A_{rn} + (\varepsilon + n)\ b\ A_{(r-1)n} + (1 + m + 2n)\ a A_{(r-2)n} = 0 \\
\varepsilon b\ A_{rn} \qquad + (1 + m + n)\ a A_{(r-1)n} = 0
\end{array}\right\} \ldots (36)$$

Het aantal vergelijkingen dat ter bepaling der r onbekenden A_n, $A_{2n}, \ldots A_{rn}$ dient, één grooter zijnde dan het aantal onbekenden, moet noodzakelijk de volgende determinant waarin η en ε door hunne waarden vervangen zijn, en van

de voorwaarde $\eta + \varepsilon n = 0$ gebruik gemaakt is, gelijk nul wezen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} . & . & . & . & . & . & -nc, & -(1+p)nb \\ . & . & . & . & . & -2nc, & -(2+p)nb, & (1+m+r \ldots \\ . & . & . & . & -3nc, & -(3+p)nb, & (1+m+(r-1)n)a, & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ -rnc, & -(r+p)nb, & (1+m+2n)a, & . & . & . & . & . \\ -(1+r+p)nb, & (1+m+n)a, & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Het onderzoek van (34) leidt dus tot dit besluit:

Wanneer in $x^m(a + bx^n + cx^{2n})^p\,dx$ *de exponenten voldoen aan de voorwaarde*

$$\frac{1+m}{n} + 2p = -2 - r \quad (r = 1,\ 2,\ 3,\ldots) \quad . \ . \ (37)$$

en de coëfficiënten aan de vergelijking $\Delta = 0$, *dan is de integraal dezer differentiaal zuiver algebraïsch en gelijk aan:*

$$\frac{1}{(1+m)\,a\,A_{rn}}(a + bx^n + cx^{2n})^{1+p}\,x^{1+m}\,(x^{rn} + A_n\,x^{(r-1)n} + \ldots A_{rn})$$

waarin de grootheden A *voldoen aan de vergelijkingen* (36).

Ter opheldering van het voorgaande het voorbeeld

$$x\,(a + bx + cn^2)^{-\frac{7}{2}}\,dx$$

nemende, vindt men, daar de voorwaarde (37) vervuld is, dat de integraal dezer differentiaal zuiver algebraïsch is, wanneer de coëfficiënten voldoen aan de betrekking

$$\begin{vmatrix} . & . & -c, & \frac{5}{2}b \\ . & -2c, & \frac{3}{2}b, & 5a \\ -3c, & \frac{1}{2}b, & 4a, & . \\ -\frac{1}{2}b, & 3a, & . & . \end{vmatrix} = 0$$

of $b^4 = 24\,a\,c\,(b^2 + 2\,a\,c)$. De waarde der integraal is dan:

$$\frac{1}{2\,a\,A_3}(a + b\,x + c\,x^2)^{-4}\,x^2\,(x^3 + A_1\,x^2 + A_2\,x + A_3)$$

waarin:

$$A_1 = \frac{5}{2}\frac{b}{c} \qquad A_2 = \frac{15}{8}\frac{b^2}{c^2} + \frac{5}{2}\frac{a}{c} \qquad A_3 = \frac{5}{16}\frac{b^3}{c^3} + \frac{15}{4}\frac{a\,b}{c^2}$$

Onderzoek van vergelijking (35).
Aan deze vergelijking kan niet voldaan worden tenzij

$$2\,n + i - 1 - m = r_1\,n \quad (r_1 = 0,\ 1,\ 2, \ldots, r + 1)$$

en

$$i = r\,n \quad (r = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Om dit te bewijzen merke men op dat aan (35) niet kan voldaan worden, wanneer $i = 0$ en verder indien het positieve getal m grooter is dan $2\,n + i - 1$. Er blijven dus slechts twee mogelijke gevallen over, nl. $m = 2\,n + i - 1$ en $m < 2\,n + i - 1$, die achtereenvolgens zullen besproken worden.

1°. $m = 2\,n + i - 1$ of $2\,n + i - 1 - m = r_1\,n\,(r_1 = 0)$.

Schrijft men de coëfficiënt $\frac{C}{c^{1+p}}$ van (35) in het eerste lid en werkt het tweede lid dezer vergelijking uit, dan vindt men voor de coëfficiënten der verschillende machten van x in dit laatste lid, zoo men stelt $2\,(1 + p)\,n = \eta$ en $(1 + p)\,n = \epsilon$, de waarden die daarachter geplaatst zijn:

x^{2n+i-1}: $(\eta + i)\,c$
x^{2n+i-2}: $(\eta + i - 1)\,c\,A_1$
. . . .

x^{n+i-1} : $(\eta + i - n) c A_n + (\varepsilon + i) b$

x^{n+i-2} : $(\eta + i - n - 1) c A_{n+1} + (\varepsilon + i - 1) b A_1$

. . . .

x^{i-1} : $(\eta + i - 2n) c A_{2n} + (\varepsilon + i - n) b A_n + i a$

x^{i-2} : $(\eta + i - 2n - 1) c A_{2n+1} + (\varepsilon + i - n - 1) b A_{n+1} + (i-1) a A_1$

. . . .

x^{2n} : $(\eta + 1) c A_{i-1} + (\varepsilon + n + 1) b A_{i-n-1} + (2n+1) a A_{i-2n-1}$

x^{2n-1} : $\eta\ c\ A_i + (\varepsilon + n) b A_{i-n} + 2n a A_{i-2n}$

. . . .

x^n : $(\varepsilon + 1) b A_{i-1} + (n + 1) a A_{i-n-1}$

x^{n-1} : $\varepsilon b A_i + n a A_{i-n}$

x^{n-2} : $(n-1) a A_{i-n+1}$

. . . .

x^1 : $2 a A_{i-2}$

x^0 : $a A_{i-1}$

Ten einde nu aan vergelijking (35) te voldoen moet de eerste dezer coëfficiënten gelijk $\frac{c^{1+p}}{C}$, alle overige gelijk nul gesteld worden. De vergelijkingen die op deze wijze ontstaan, vorderen dat alle coëfficiënten A behalve

$$A_n, \quad A_{2n}, \quad A_{3n}, \ . \ . \ .$$

nul zijn. Hieruit volgt, daar A_i van nul moet verschillen, dat het alleen mogelijk is aan (35) te voldoen indien $i = r\,n$.

Neemt men aan dat de exponenten m, n en p zoodanig zijn dat $m = 2n + i$ en $i = r\,n$, dan kan steeds en door geen ander polynomium aan (35) voldaan worden dan door

$$x^i + A_1 x^{i-1} + \,.\,.\, A_i = x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + \,.\,.\, A_{rn},$$

waarin de coëfficiënten bepaald worden door de volgende vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l}(\eta+(r-1)n)cA_n \quad +(\varepsilon+rn)b=0 \\ (\eta+(r-2)n)cA_{2n}+(\varepsilon+(r-1)n)bA_n+rna=0 \\ (\eta+(r-3)n)cA_{3n}+(\varepsilon+(r-2)n)bA_{2n}+(r-1)naA_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta c A_{rn} \qquad +(\varepsilon+n)bA_{(r-1)n}+2naA_{(r-2)n}=0 \\ \qquad\qquad \varepsilon b A_{rn}+naA_{(r-1)n}=0\end{array}\right\}\ldots(38)$$

die in vorm volkomen overeenstemmen met (36).

Evenals vroeger is het aantal onbekenden één geringer dan het aantal vergelijkingen; het is dus noodig om aan deze vergelijkingen te kunnen voldoen, dat de volgende determinant nul zij.

$$\Delta'=\left|\begin{array}{cccccc} . & . \; . & . & . \; (2p+r+1)c, & (p+r+1)b, & \\ . & . \; . & . & (2p+r)c, & (p+r)b, & ra \\ . & . & . \; . \; (2p+r-1)c, & (p+r-1)b, & (r-1)a, & . \\ . & . \; . \; . & . & . & . & . \\ (2p+2)c, & (p+2)b, \; 2a & . & . & . & . \\ (p+1)b, & a & . & . & . & . \end{array}\right|$$

Dit eerste gedeelte van het onderzoek van (35) leidt dus tot het volgende besluit:

Wanneer in $x^m(a+bx^n+cx^{2n})^p\,dx$ *e exponenten voldoen aan de voorwaarde*

$$\frac{m+1}{n}=2+r \quad (r=1,\ 2,\ 3,\ldots) \quad \ldots\ldots (39)$$

en de coëfficiënten aan de vergelijking $\Delta'=0$, *dan is de integraal zuiver algebraïsch en gelijk aan:*

$$\frac{1}{(2p+r+2)n}(a+bx^n+cx^{2n})^{1+p}(x^{rn}+A_n x^{(r-1)n}+\ldots A_{rn})$$

waarin de grootheden A voldoen aan de vergelijkingen (38).

Neemt men als voorbeeld $x^5(a+bx^2+cx^4)^p\,dx$, dan

blijkt dat de voorwaarde (39) vervuld is. Wanneer dus ook de coëfficiënten voldoen aan de betrekking:

$$\begin{vmatrix} 2(1+p)c, & (2+p)b \\ (1+p)b, & a \end{vmatrix} = 0$$

of

$$2ac = (2+p)b^2$$

dan is de integraal algebraïsch en gelijk aan:

$$\frac{1}{2(3+2p)c}(a+bx^2+cx^4)^{1+p}\left(x^2 - \frac{2+p}{2(1+p)} \cdot \frac{b}{c}\right).$$

2⁰. $m < 2n+i-1$ of $2n+i-1-m = r_1 n$ $(r_1 = 1, 2, \ldots)$

Zij $m = 2n+i-1-q$ $(q = 1, 2, \ldots 2n+i-1)$ dan is het noodig, om aan (35) te voldoen, dat voldaan worde aan de vergelijkingen die ontstaan zoo men in de rij coëfficiënten onder 1⁰. vermeld, de coëfficiënt van x^m gelijk $\frac{c^{1+p}}{C}$ en alle overige gelijk nul stelt.

Uit de eerste dezer vergelijkingen volgt dan terstond dat $\eta + i = 0$ moet zijn. Is deze voorwaarde vervuld dan zijn de getallen $\eta + i - 1$, $\eta + i - 2, \ldots \eta$, $\varepsilon + i$, van nul verschillend. Verder blijkt dat om aan de overige vergelijkingen te voldoen de waarden van

$$A_q, \quad A_{q+n}, \quad A_{q+2n} \ldots\ldots$$

$$A_n, \quad A_{2n} \,. \quad A_{3n} \quad \ldots\ldots$$

van nul verschillend, alle overige grootheden A gelijk nul moeten zijn.

Is nu $q > i$ of een veelvoud van n en houdt men in het oog dat A_i niet nul mag wezen, dan kan men i niet anders stellen dan een veelvoud van n, dus $i = rn$. Is daarentegen $q < i$ en geen veelvoud van n, dus $q = r_1 n + q_1$

($q_1 = 1,\ 2, \ldots n - 1$) dan kan men i niet anders stellen dan

$$i = rn + q_1 \quad \text{of} \quad i = rn.$$

De eerste dezer hypothesen brengt mede dat

$$A_{r_1 n + q_1},\quad A_{(r_1+1)n+q_1},\ \ldots\ A_{rn+q_1},$$

en

$$A_n \quad,\ A_{2n} \quad,\ \ldots\ A_{rn}$$

blijven bestaan; daar echter $q < i$ volgen uit de laatste $2n - 1$ vergelijkingen:

$$A_{i-1} = A_{i-2} = \ldots = A_{i-n+1} = 0$$

$$A_{i-n-1} = A_{i-n-2} = \ldots = A_{i-2n+1} = 0.$$

Onder de eerste dezer beide reeksen komt nu, indien $i = rn + q_1$ is, stellig A_{rn}, onder de laatste $A_{(r-1)n}$ voor, die van nul verschillend behooren te zijn. Hieruit volgt dat de hypothese $i = rn + q_1$ tot eene ongerijmdheid leidt.

De tweede hypothese $i = rn$ leidt echter ook tot eene ongerijmdheid indien $q = r_1 n + q_1$ ($q_1 = 1,\ 2, \ldots n - 1$).

Immers zoo $q > i$, dan zoude uit eene der $2n - 1$ laatste vergelijkingen voor eene der grootheden

$$A_{i-1},\ A_{i-2}, \ldots A_{i-n+1} \quad \text{of} \quad A_{i-n-1},\ A_{i-n-2}, \ldots A_{i-2n+1}$$

eene van nul verschillende waarde gevonden worden, terwijl voor deze zelfde grootheid uit de vorige vergelijkingen stellig eene waarde nul zoude worden afgeleid.

Verder zoo $q < i$, zoude uit de laatste $2n - 1$ vergelijkingen volgen

$$A_{i-1} = A_{i-2} = \ldots = A_{i-n+1} = 0$$

$$A_{i-n-1} = A_{i-n-2} = \ldots = A_{i-2n+1} = 0.$$

Hieronder bevinden zich de waarden $A_{(r-1)n+q_1}$ en $A_{(r-2)n+q_1}$

waaronder er stellig één is, waarvoor uit de $i+1$ overige vergelijkingen eene waarde van nul verschillende volgt.

Alleen derhalve wanneer $\eta + i = 0$, $i = rn$ en $q = r_1 n$ ($r_1 = 1, 2, \ldots r+1$) zijn er oplossingen van (35) mogelijk in dit tweede geval. De vraag blijft dus over of er steeds een polynomium gevonden kan worden dat aan (35) voldoet indien alle deze voorwaarden vervuld zijn. Om deze vraag op te lossen voere men deze condities in (35) in; men vindt dan door ontwikkeling van het tweede lid, zoo weder de coëfficiënt $\frac{c^{1+p}}{C}$ in het eerste lid wordt overgebracht, voor de coëfficiënten van de verschillende machten van x in het tweede lid de daarachter geplaatste waarden:

$$x^{(r+1)n-1} : \; - nc\,A_n + \frac{rn}{2} b$$

$$x^{rn-1} \; : \; - 2nc\,A_{2n} + \left(\frac{rn}{2} - n\right) b\,A_n + rna$$

$$x^{(r-1)n-1} : \; - 3nc\,A_{3n} + \left(\frac{rn}{2} - 2n\right) b\,A_{2n} + (r-1)\,na\,A_n$$

. . . .

$$x^{2n-1} \; : \; - rnc\,A_{rn} + \left(\frac{rn}{2} - (r-1)n\right) b\,A_{(r-1)n} + 2na\,A_{(r-2)n}$$

$$x^{n-1} \; : \; - \frac{rn}{2} b\,A_{rn} + na\,A_{(r-1)n}$$

Stelt men nu een dezer coëfficiënten nl. die van

$$x^m = x^{2n+i-1-q} = x^{(r+2-r_1)n-1} \text{ gelijk } \frac{c^{1+p}}{C},$$

de overige gelijk nul, dan is het duidelijk dat in het algemeen aan deze $r+1$ lineaire vergelijkingen met $r+1$ onbekenden A_n, $A_{2n} \ldots A_{rn}$, $\frac{c^{1+p}}{C}$ kan voldaan worden.

Daar uit de voorwaarden $\eta + i = 0$ en $i = rn$ volgt dat de breuk $p = -\frac{2k+1}{2}$ ($k = 1, 2, 3 ..$), waarmede $r = 2k - 1$, zoo kan het resultaat van het voorgaand onderzoek aldus worden uitgedrukt:

Wanneer in $x^m (a + bx^n + cx^{2n})^p dx$ *de exponenten voldoen aan de voorwaarden*

$$\left.\begin{array}{l} p = -\frac{2k+1}{2} \ (k = 1, 2, 3 ...) \\ m = k_1 n - 1 \ (k_1 = 1, 2, .. 2k) \end{array}\right\} \ldots\ldots (40)$$

dan is de integraal zuiver algebraïsch en gelijk aan

$$\frac{C}{c^{1+p}} (a + bx^n + cx^{2n})^{1+p} (x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + .. A_{rn})$$

waarin de onbekenden $\frac{C}{c^{1+p}}$, A_n, $A_{2n} .. A_{rn}$ *uit* $r + 1$ *bekende lineaire vergelijkingen gevonden worden, terwijl* $r = 2k - 1$.

Zij, om een voorbeeld te nemen, gevraagd de integraal van $x^m (a + bx^3 + cx^6)^{-\frac{3}{2}} dx$. Uit (40) volgt dan dat deze integraal zuiver algebraïsch zoo $m = 2, 5, 8, 11$. Voor $m = 5$ heeft men dan ter berekening der onbekenden $\frac{C}{c^{1+p}}$, A_3, A_6, A_9 deze vier vergelijkingen

$$-3cA_3 + \frac{9}{2}b = 0$$

$$-6cA_6 + \frac{3}{2}bA_3 + 9a = 0$$

$$-9cA_9 - \frac{3}{2}bA_6 + 6aA_3 = \frac{c^{1+p}}{C}$$

$$-\frac{9}{2}bA_9 + 3aA_6 = 0$$

waaruit

$$A_3 = \frac{3\,b}{2\,c}, \quad A_6 = \frac{3\,(b^2 + 4\,a\,c)}{8\,c^2}, \quad A_9 = \frac{a\,(b^2 + 4\,a\,c)}{4\,b\,c^2},$$

$$\frac{c^{1+p}}{C} = -\,\frac{9\,(b^2 - 4\,a\,c)^2}{16\,b\,c^2},$$

zoodat de integraal in dit geval is:

$$-\,\frac{16\,b\,c^2}{9\,(b^2 - 4\,a\,c)^2}\,(a + b\,x^3 + c\,x^6)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\left(x^9 + \frac{3\,b}{2\,c}\,x^6 + \frac{3\,(b^2 + 4\,a\,c)}{8\,c^2}\,x^3 + \frac{a\,(b^2 + 4\,a\,c)}{4\,b\,c^2}\right).$$

Ten slotte zij nog opgemerkt dat, behalve in de genoemde gevallen, $\int x^m\,(a + b\,x^n + c\,x^{2n})^p\,d\,x$ nimmer algebraïsch is.

ERRATA.

Versl. en Meded. Kon. Akad. van Wet., Afd. Nat., 2e Reeks, Deel XVI, 1881.

(v. d. Berg, *Bernoulliaansche coëfficiënten*, enz.).

Pag. 88, de drie laatste regels te lezen als volgt:

Schrijft men nu neder dat het product van het tweede of ook van het derde lid van (2') met het laatste lid van $4\sqrt{x}$ maal (3') gelijk is aan het negatief genomen laatste lid van (1'), dan kan men daarbij, als r

Pag. 134, reg. 5 v. o. *staat:* schrijven, terwijl;
lees: schrijven; terwijl

» 145, » 2 v. b. *staat:* (16), *lees:* (17).

» 172, » 2 v. o. *staat:* $n-l-1$, *lees:* $n-1$.

» » » » » » $n-l-2$, » $n-2$.

» » » 1 » » $n-l-3$, » $n-3$.

» » » » » » $n-l-r$, » $n-r$.

BRUGBALKEN VAN DE TWEEDE ORDE

MET

FLAAUW GEBOGEN BOVENRAND EN GETROKKEN SCHOREN.

DOOR

N. Th. MICHAËLIS.

Balken van het in de figuur aangeduide type worden gezegd van de n^{de} orde te zijn, wanneer door een vertikaal vlak tusschen twee stijlen n gelijk gerigte diagonalen gesneden worden.

Voor de berekening der spanningen in de zamenstellende deelen van een balk van de eerste orde kan men gebruik maken van de formules:

$$h_{n+1}\, b_n \sin \beta_n + M_n = 0$$

$$s_n \sin \alpha_n = \frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n}$$

$$v_{n+1} + s_n \cos \alpha_n - G_n = 0\,.$$

Hierin beduiden:

b_n de spanning in het n^{de} vak van den bovenrand;

s_n » » » de » schoor;

v_{n+1} » » » den $n+1^{sten}$ stijl;

β_n den hoek tusschen het n^{de} randvak en het verlengde van den links daarvan geplaatsten stijl;

α_n den hoek tusschen de n^{de} schoor en den links daarvan geplaatsten stijl;
h_n de lengte van den n^{den} stijl;
M_n het moment der uitwendige krachten links van het knooppunt n, ten opzigte van dit punt;
G_n de belasting in het knooppunt n.

Als oorsprong van tellen is het linker steunpunt aangenomen.

Uit die formules blijkt, dat bij eene gelijkmatige belasting en eene parabolische buiging van den bovenrand, wanneer de lengte van den eindstijl nul is, de horizontaal ontbondene van de spanningen in de vakken van den bovenrand constant en de horizontaal ontbondene van de spanningen in de schoren nul is.

Is de bovenrand regt, dan nemen de spanningen in de randvakken toe als de ordinaten eener parabool en de horizontaal ontbondenen der spanningen in de diagonalen nemen af als de ordinaten eener regte lijn.

Voor daartusschen gelegen regelmatige, symetrische vormen nemen de horizontaal ontbondenen der spanningen in de randvakken van het einde naar het midden toe en in de schoren af, volgens eene wet, afhankelijk van den balkvorm.

Wordt de balk aan een einde ontlast, dan nemen nog wel de horizontaal ontbondenen der spanningen in de randvakken van de uiteinden naar eenig punt van den balk toe, en die der spanningen in de schoren naar hetzelfde punt af, maar het maximum voor de eerste en het nulpunt voor de andere liggen niet meer in het midden van den balk.

Voorbij het nulpunt verandert de spanning in de schoor van teeken. Wil men alleen getrokken schoren in de constructie toelaten, dan zet men ze, met den top naar buiten, zóó ver voort als de spanningsgetallen hun teeken behouden, zoodat in het midden altijd eenige gekruiste schoren voorkomen.

Ter berekening van de spanningsgetallen voor den balk van de tweede orde levert de figuur de volgende formules, waarin a_n de afstand tusschen de knooppunten $n - 1$ en n

aangeeft, terwijl de overige letters dezelfde beteekenis hebben als boven:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} h_n s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} + h_{n+1} b_n \sin \beta_n + M_n = 0$$

of daar $\Sigma^{n+1} s \sin \alpha + b_n \sin \beta_n = 0$ is

$$\Sigma^{n+1} s \sin \alpha = \frac{M_n}{h_{n+1}} + \frac{h_n}{h_{n+1}} \times \frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} \ldots (1)$$

waaruit, daar ook

$$\Sigma^n s \sin \alpha = \frac{M_{n-1}}{h_n} + \frac{h_{n-1}}{h_n} \times \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n} s_n \sin \alpha_n$$

is, volgt:

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = \frac{(a_n + a_{n+1}) h_{n+1}}{a_{n+1}(h_{n+1} - h_n) + a_n h_{n+1}} \left\{ \left(\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n} \right) - \frac{a_n}{a_{n+1} + a_n} \times \frac{h_{n-1}}{h_n} s_n \sin \alpha_n \right\} \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Wanneer, zooals in den regel het geval is en verder zal worden aangenomen, alle waarden van a onderling gelijk zijn, gaan de formules (1) en (2) over in:

$$\Sigma^{n+1} s \sin \alpha = \frac{1}{2 h_{n+1}} \left\{ 2 M_n + h_n s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} \right\} \ldots (1^a)$$

en

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{2 h_{n+1} - h_n} \left\{ 2 \left(\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n} \right) - \frac{h_{n-1}}{h_n} s_n \sin \alpha_n \right\} \ldots (2^a)$$

Met de vergelijking

$$v_{n+1} + s_n \cos \alpha_n - G_n = 0 \ldots \ldots \ldots (3)$$

heeft men dus ook hier vormen voor de spanningen in de

randvakken, de schoren en de stijlen, die echter niet in de enkele gegevens van het vraagstuk zijn uitgedrukt.

Uit de figuur blijkt dat, althans op statische gronden, geene uitdrukkingen te vinden zijn voor de spanning in eenig deel van den balk, onafhankelijk van die in een ander deel. Om het punt A_1 toch, werken vier krachten in gegeven rigting, waarvan men alleen weet, dat zij onderling evenwigt maken en dat de spanning in den eindstijl even groot is als de reactie van het steunpunt. Men kan dus eene dier krachten willekeurig aannemen, of eene onderstelling maken waardoor eene dier krachten bepaald wordt.

In de praktijk bedient men zich ter bepaling van de spanning s_1 van de hypothese, dat elk schorenstelsel geheel onafhankelijk van het andere werkt en dat dus de lasten G_1, G_3, G_5 enz. door de schoren $A'1$, $1'3$, $3'5$, enz. gedragen worden en in het steunpunt eene reactie

$$D_1 = \frac{1}{l} \{(l-g_1) G_1 + (l-g_3) G_3 + (l-g_5) G_5) \ldots \text{enz.}\}$$

opwekken waaruit, even alsof de schoor $A'2$ niet bestond, wordt afgeleid:

$$s_1 \sin \alpha_1 = \frac{a}{h_2} D_I$$

met behulp waarvan men dan alle overige spanningsgetallen kan bepalen.

Neemt men de door de lasten G_2, G_4, enz. in het linkersteunpunt opgewekte reactie D_{II}, dan is

$$D_I + D_{II} = D = \Sigma G - \frac{1}{l} \Sigma g G.$$

Zet men de schoren met den top links voort tot het regter steunpunt en noemt men de aldaar opgewekte reactiën C_I, C_{II} en C, dan zou, wanneer de balk in m vakken verdeeld is

$$D_I + C_I = G_1 + G_3 + G_5 + \ldots . G_{m-1}$$

moeten zijn.

De spanning $s_{m+1} \sin \alpha_{m+1}$ laat zich niet uit de formule (2^a) berekenen, doch, daar de spanning in het laatste vak van den bovenrand, wanneer slechts schoren in ééne rigting voorhanden zijn, nul wezen moet, is $s_{m+1} \sin \alpha_{m+1} - \Sigma^m s \sin \alpha = 0$. Alleen wanneer de bovenrand regt is, voldoet de hieruit afgeleide waarde van $C_{\rm I}$ aan de voor $D_{\rm I} + C_{\rm I}$ gevonden voorwaarde.

De gebruikelijke onderstelling is dus niet juist, de met behulp daarvan berekende waarden voor s zijn om de andere te groot en te klein, en hoewel nu hierdoor, met de gewone zekerheids-coëfficiënten, wel geen gevaar voor de constructie te duchten is, schijnt het toch verkieselijk eene hypothese tot grondslag te nemen, die althans de waarschijnlijkheid oplevert, dat de werkelijke spanningen de berekende niet overtreffen.

Is weder de bovenrand van den balk parabolisch gebogen, en de lengte van den eindstijl nul, dan vervallen de schoren s_1 en s_2 en wordt voor eene gelijkmatige totaalbelasting $\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n} = 0$, alzoo uit ($2^a$) $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = 0$, terwijl $b_1 \sin \beta_1 = -\frac{M_1}{h_2}$ is. — Is daarentegen de bovenrand regt, dan wordt:

$$s_{n+1} \sin \alpha = \frac{2}{h} \{M_n - M_{n-1}\} - s_n \sin \alpha$$

en daar de verschillen $M_n - M_{n-1}$ afnemen als de ordinaten eener regte lijn, nemen dus ook de sommen $\{s_{n+1} + s_n\} \sin \alpha$ in dezelfde verhouding af. De waarde $s_{n+1} \sin \alpha$ blijft positief zoolang $M_n > M_{n-1}$ en $M_n - M_{n-1} > \frac{h}{2} s_n \sin \alpha$ is. M_n neemt van de uiteinden naar het midden toe en $M_n - M_{n-1}$ is dus tot het midden positief, daar voorbij negatief.

Hetzelfde heeft plaats wanneer men eenige punten bij het linkersteunpunt ontlast; slechts verplaatst zich het punt waar M_n maximum wordt, naar de regterhand, doch tot dat

punt blijft de eerste term van het tweede lid der vergelijking positief.

Heeft de lengte van den eindstijl eene eindige waarde, doch is de buiging van den bovenrand op elk punt minder sterk dan bij den parabolischen rand met eindstijl nul, dan neemt de waarde van $\frac{M_n}{h_{n+1}}$ tot een bepaald punt toe, om daar voorbij af te nemen en is dus $\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n}$ aanvankelijk positief en $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ positief, zoolang

$$\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n} > \frac{h_{n-1}}{2h_n} s_n \sin \alpha_n \text{ is.}$$

Naar aanleiding van hetgeen bij balken met een enkel schorenstelsel plaats heeft, schijnt men dus te mogen aannemen, dat ook voor die van de tweede orde, mits de bovenrand weinig of niet gebogen zij, de waarde van s aanvankelijk positief is om op eenig punt, afhankelijk van den balkvorm en van de belastingswijze, negatief te worden en dan negatief te blijven. Hierbij wordt aangenomen dat de laatste positieve waarde van $s \sin \alpha$ kleiner, of althans niet grooter is dan de voorgaande en dat de eerste negatieve waarde kleiner, of althans niet grooter is dan de volgende.

Met deze hypothese kan men twee grenzen bepalen waartusschen, voor elke belastingswijze, de waarden van $s \sin \alpha$ moeten gelegen zijn.

Schrijft men de formule (2^a) onder den vorm

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = A - B s_n \sin \alpha_n$$

waarin dus

$$A = \frac{2h_{n+1}}{2h_{n+1} - h_n} \left\{ \frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n} \right\}$$

en

$$B = \frac{h_{n+1}}{2h_{n+1} - h_n} \times \frac{h_{n-1}}{h_n}$$

is en zij A de laatste positieve waarde van de uitdrukking,

die daardoor wordt voorgesteld, dan moet, op grond der hypothese, $s_n \sin \alpha_n$ positief zijn, omdat anders eene negatieve waarde van s door eene positieve zou worden opgevolgd. De waarde van s_{n+1} kan zoowel positief als negatief zijn. Is zij positief, dan is $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ kleiner of althans niet grooter dan $s_n \sin \alpha_n$ en de grootst mogelijke positieve waarde is dus:

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = \frac{A}{1 + B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Zij in

$$s_{n+2} \sin \alpha_{n+2} = A_1 - B_1 \, s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$$

A_1 de kleinste negatieve der door die uitdrukking voorgestelde waarden. Hierin moet $s_{n+2} \sin \alpha_{n+2}$ negatief zijn, want voor $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ positief, zijn beide termen van het tweede lid negatief en is $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ negatief, dan mag op grond der hypothese $s_{n+2} \sin \alpha_{n+2}$ niet positief wezen; daar overigens de grootste negatieve waarde van $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ die van $s_{n+2} \sin \alpha_{n+2}$ niet overtreffen mag, is de grenswaarde

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = \frac{A_1}{1 + B_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

De uit (I) en (II) afgeleide waarden van $s \sin \alpha$ zijn beurtelings te groot en te klein, doch daar de waarde van $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ uit (I) te groot, en die uit (II) te klein is, is ook de voor eene bepaalde schoor, uit de eene formule afgeleide waarde te groot, en die uit de andere te klein, en door nu alleen de grootere waarden van beide reeksen in aanmerking te nemen, verkrijgt men de zekerheid, dat de werkelijke spanningen de berekende niet overtreffen.

Is de waarde van $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ bepaald, dan vindt men de spanningen in de overige schoren uit de formule

$$s_n \sin \alpha_n = \frac{1}{\frac{h_{n-1}}{h_n}} \left\{ 2\left(\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n}\right) - \left(2 - \frac{h_n}{h_{n+1}}\right) s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} \right\} \quad \ldots \quad (4)$$

terwijl

$$s_1 \sin \alpha_1 = \frac{M_1}{h_2} - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{h_1}{h_2}\right) s_2 \sin \alpha_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

is.

Voor den regten balk gaan deze formules over in

$$s_n \sin \alpha = \frac{2}{h} \{M_n - M_{n-1}\} - s_{n+1} \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (4^a)$$

en

$$s_1 \sin \alpha_1 = \frac{M_1}{h} - \frac{1}{2} s_2 \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5^a)$$

Het geval kan zich voordoen dat de waarde van $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ uit (II) zooveel te klein is, dat ook $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ negatief wordt. Men verkrijgt dan een nadere grens voor $s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} = 0$.

Substitueert men in (2^a) achtereenvolgens de waarden van $s_n \sin \alpha_n$, $s_{n-1} \sin \alpha_{n-1}$, enz. uit diezelfde formule, dan vindt men:

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = \frac{2}{2\,h_{n+1} - h_n}$$

$$\left[M_n - \frac{2\,h_{n+1}}{2h_n - h_{n-1}}\left\{M_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{2h_{n-1} - h_{n-2}}\right\} M_{n-2} - \frac{h_{n-2}}{2h_{n-2} - h_{n-3}}\left\{M_{n-3} - \ldots\right.\right.$$

$$\ldots - \frac{h_4}{2h_4 - h_3}\left\{M_3 - \frac{h_3}{2h_3 - h_2}\right\} M_2 - \frac{h_2}{2h_2 - h_1}\left\{M_1 - \frac{h_1}{2} s_1 \sin \alpha_1\right\}\Big] \ldots (6)$$

terwijl met deze waarde van $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ en omdat $\Sigma^{n+1} s \sin \alpha = - b_n \sin \beta_n$ is, uit (1^a) volgt:

$$b_n \sin \beta_n = - \frac{2}{2\,h_{n+1} - h_n}$$

$$\left[M_n - \frac{h_n}{2h_n - h_{n-1}}\left\{M_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{2\,h_{n-1} - h_{n-2}}\right\} M_{n-2} - \frac{h_{n-2}}{2\,h_{n-2} - h_{n-3}}\right\} M_{n-3} \ldots$$

$$\ldots - \frac{h_4}{2h_4 - h_3}\left\} M_3 - \frac{h_3}{2\,h_3 - h_2}\right\} M_2 - \frac{h_2}{2\,h_2 - h_1}\left\{M_1 - \frac{h_1}{2} s_1 \sin \alpha_1\right\}\Big] \ldots (7)$$

Is de bovenrand regt en evenwijdig aan den onderrand, dan gaan deze formules over in:

$$s_{n+1} \sin \alpha = \frac{2}{h} \{M_n - 2 M_{n-1} + 2 M_{n-2} - 2 M_{n-3} + \dots$$
$$\dots \pm 2 M_3 \mp 2 M_2 \pm 2 M_1 \mp h s_1 \sin \alpha_1\} \dots\dots (6^a)$$

en

$$b_n = -\frac{2}{h} \{M_n - M_{n-1} + M_{n-2} - M_{n-3} + \dots$$
$$\dots \pm M_3 \mp M_2 \pm M_1 \mp \tfrac{1}{2} h s_1 \sin \alpha_1\} \dots\dots\dots (7^a)$$

in welke beide laatste vergelijkingen het bovenste teeken der laatste termen geldt voor n oneven.

Voor n oneven is:

$$M_n - M_{n-1} = a D - \Sigma^{n-1} G$$
$$M_{n-2} - M_{n-3} = a D - \Sigma^{n-3} G$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$M_3 - M_2 = a D - (G_1 + G_2)$$
$$M_1 = a D$$

waaruit door optelling en substitutie in (7^a) volgt:

$$b_n = -\frac{1}{h}\{(n+1)aD - (n-1)a(G_1+G_2) - (n-3)a(G_3+G_4) - \dots$$
$$\dots - 2a(G_{n-2} + G_{n-1}) - h s_1 \sin \alpha_1\}.$$

Is de balk verdeeld in m vakken en $n + 1 = m$, dan wordt, wijl $b_{m-1} = s_{m+1} \sin \alpha_1$, en

$$D = \frac{1}{m}\{(m-1)G_1 + (m-2)G_2 + (m-3)G_3 + \dots + 2G_{m-2} + G_{m-1}\}$$

is

$$(s_1 - s_{m+1}) \sin \alpha_1 = \frac{a}{h}\{G_1 + G_3 + G_5 + \dots G_{m-3} + G_{m-1}\} \dots (a)$$

Voor n even vindt men op gelijke wijze:

$$b_n = -\frac{1}{h}\{naD - naG_1 - (n-2)a(G_2 + G_3) - (n-4)a(G_4 - G_5) - \ldots$$
$$\ldots - 2\,a\,(G_{n-2} - G_{n-1}) + h\,s_1 \sin \alpha_1\}$$

en is nu $m = n + 1$ oneven, dan wordt:

$$(s_1 - s_{m+1}) \sin \alpha_1 = \frac{a}{h}\left\{\frac{1}{m}\{(m-1)\,G_1 + (m-3)\,G_3 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + 2\,G_{m-2}\} + \frac{1}{m}\{2\,G_2 + 4\,G_4 + \ldots (m-1)\,G_{m-1}\}\right\} \ldots (b)$$

Volgens de gewone hypothese is voor m even:

$$D_{\rm I} = \frac{1}{m}\{(m-1)\,G_1 + (m-3)\,G_3 + \ldots + 3\,G_{m-3} + G_{m-1}\}$$

$$C_{\rm I} = \frac{1}{m}\{G_1 + 3\,G_3 + \ldots + (m-3)\,G_{m-3} + (m-1)\,G_{m-1}\}$$

en voor m oneven:

$$D_{\rm I} = \frac{1}{m}\{(m-1)\,G_1 + (m-3)\,G_3 + \ldots + 4\,G_{m-4} + 2\,G_{m-2}\}$$

$$C_{\rm I} = \frac{1}{m}\{2\,G_2 + 4\,G_4 + \ldots + (m-3)\,G_{m-3} + (m-1)\,G_{m-1}\}$$

uit (a) en (b) volgt dus:

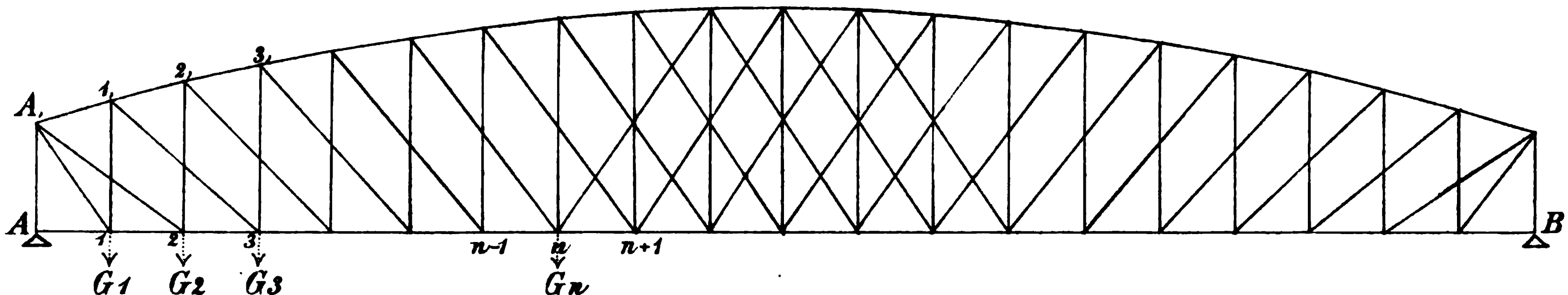
$$(s_1 - s_{m+1}) \sin \alpha_1 = \frac{a}{h}\{D_{\rm I} + C_{\rm I}\}$$

of

$$(s_1 - s_{m+1}) \cos \alpha_1 = D_{\rm I} + C_{\rm I}.$$

Al blijkt nu hieruit, dat de gewone hypothese voor den regter balk niet tot de ongerijmdheid leidt, dat men voor een balk, waarin de gelijk gerigte schoren over de geheele lengte zijn doorgezet, voor dezelfde schoor een ander spanningsgetal krijgt door den oorsprong van de linker- naar de regterhand te verplaatsen, dan mag men hieruit nog niet het gevolg trekken, dat die onderstelling juist is.

MICHAELIS, Brugbalken van de tweede orde.



Om het verschil tusschen de gewone en de voorgestelde rekenwijze aan te toonen, werden de spanningen bepaald voor eenen balk, verdeeld in twintig gelijke vakken a, hoog aan het uiteinde 7, in het midden 15 lengte-eenheden en met parabolisch gebogen bovenrand, in de gewone onderstelling dat het eigengewigt ad p per vak in de stijlen geconcentreerd is en verder dat de bewegende last de geheele brug kan bedekken en op elk belast knooppunt van den onderrand eveneens eene drukking p veroorzaakt.

De maximum spanningsgetallen zijn verzameld in de onderstaande tabel:

SPANNINGEN IN DE RANDVAKKEN.			SPANNINGEN IN DE SCHOREN.		
Randvak.	Gewone Hypothese.	Voorgestelde Hypothese.	Schoor.	Gewone Hypothese.	Voorgestelde Hypothese.
$b_1 \sin \beta_1$	— 2.977 *ap.*	— 3.021 *ap.*	$s_1 \sin \alpha_1$	1.174 *ap.*	1.224 *ap.*
$b_2 \sin \beta_2$	— 4.156 »	— 4.189 »	$s_2 \sin \alpha_2$	1.793 »	1.945 »
$b_3 \sin \beta_3$	— 4.963 »	— 4.995 »	$s_3 \sin \alpha_3$	1.180 »	1.313 »
$b_4 \sin \beta_4$	— 5.548 »	— 5.572 »	$s_4 \sin \alpha_4$	0.857 »	0.954 »
$b_5 \sin \beta_5$	— 5.962 »	— 5.985 »	$s_5 \sin \alpha_5$	0.666 »	0.732 »
$b_6 \sin \beta_6$	— 6.267 »	— 6.287 »	$s_6 \sin \alpha_6$	0.509 »	0.579 »
$b_7 \sin \beta_7$	— 6.470 »	— 6.489 »	$s_7 \sin \alpha_7$	0.420 »	0.472 »
$b_8 \sin \beta_8$	— 6.605 »	— 6.623 »	$s_8 \sin \alpha_8$	0.330 »	0.390 »
$b_9 \sin \beta_9$	— 6.665 »	— 6.683 »	$s_9 \sin \alpha_9$	0.279 »	0.327 »
$b_{10} \sin \beta_{10}$	— 6.669 »	— 6.685 »	$s_{10} \sin \alpha_{10}$	0.220 »	0.267 »
			$s_{11} \sin \alpha_{11}$	0.196 »	0.224 »
			$s_{12} \sin \alpha_{12}$	0.127 »	0.178 »
			$s_{13} \sin \alpha_{13}$	0.085 »	0.135 »
			$s_{14} \sin \alpha_{14}$	0.072 »	

EENE

MONSTER-NAJA;

DOOR

A. W. M. VAN HASSELT.

Het is heden juist 24 jaar geleden *) dat ik de eer had, de aandacht der Akademie te vestigen op eene buitengewoon groote vergiftige slang, uit Sumatra (of Borneo) †).

Zoo toen, als nu weder, trof het mij, dat onder de giftslangen — die zich, in het algemeen, niet door bijzondere lichaams-lengte kenmerken, en die veel meer door hare gifthaken dan door hare kronkels te vreezen zijn — zóó belangrijke uitzonderingen op den regel worden aangetroffen, die deze beide voorwaarden in zich vereenigen.

Als vervolg op mijne toenmalige mededeeling, zie ik mij thans in staat gesteld eene nadere bevestiging daarvan te leveren, door de goedheid van mijn' geachten oud-kameraad, den Officier van Gezondheid der 1ste klasse C. DE MOOIJ, die mij, voor eenigen tijd, een waar monster-exemplaar dezer inderdaad merkwaardige giftslang uit Sumatra heeft medegebracht.

Ontegenzeggelijk behoort zij, evenals de vorige, tot het genus *Naja* (Dendroaspis FITZINGER, *Hamadryas* CANTOR,

*) Zie, in de *Verslagen* en *Mededeelingen* voor 31 October 1857, mijne „Aanteekening over en beschrijving van een individu der grootste tot nu bekende giftslangen, uit het geslacht der *Naja's*".

†) Wijlen de Heer WASSINK wist mij niet met zekerheid te zeggen, of hij dit exemplaar uit het eerste, of misschien uit het tweede dezer O.-I. eilanden had verkregen.

Trimeresurus DUMÉRIL), waarvan ik destijds de juiste species, bij deze schrijvers en bij onzen SCHLEGEL, niet heb kunnen vinden, zoodat ik haar den soortnaam van *ingens* *) heb bijgelegd, waarover, alsmede over hare nog eenigszins onzekere synonymie, naar de bovenaangehaalde »Aanteekening" mag worden verwezen.

De kop met zijne kenmerkende auxiliaire achterhoofdsschilden, de gifthaken, de schubben, de schilden van buik en staart, de vorm van den laatsten, de bij beiden ontbrekende teekening door vlekken, strepen of banden, komen geheel overeen, alleen de overal gelijkmatige kleur is niet bruin-geel, doch meer donker geel-bruin, en in ligchaamslengte overtreft dit exemplaar het eerste nog vrij aanzienlijk.

Voor zooverre als mij destijds de erpetologische litteratuur had geleerd en mij door hoog geëerde vrienden, wijlen Prof. J. VAN DER HOEVEN en Prof. SCHLEGEL †) bevestigd werd — of sedert grootere vergiftslangen gevonden zijn, is mij onbekend — was het toen vertoonde individu *langer dan eenige andere bekende.* Het mat nagenoeg $3^{1}/_{2}$ *meter* (3 m. 43).

Uit het U thans voorgelegde exemplaar blijkt, dat deze *Naja*-soort eene nog grootere ligchaamslengte kan bereiken. Zoo als ge U kunt overtuigen, geloof ik niet te veel te zeggen, door het eene ware »reuzenslang" onder de *Serpentes venenati* te noemen.

Het is nog 47 centimeters langer dan het vorige, bezittende het eene lengte-afmeting van *bijna* 4 *meters* (meer dan 3 m. 90) §), alzoo ongeveer gelijk aan die van 2 mannen van 6 Rhijnl. voeten!

Verder zal ik over de diagnose en systematiek dezer *Naja*

---

*) Zij heeft overigens groote verwantschap met den *Trimeresurus ophiophagus* van DUMÉRIL en BIBRON.

†) SCHLEGEL schreef mij hieromtrent, dat deze niet alleen de grootste *Naja*, maar tevens de langste van *alle* vergiftige slangen was." Hij scheen in twijfel, of het een *zeer oud* voorwerp kon zijn van zijne *Naja bungarus.*

§) »Meer dan 3 m. 90" zeg ik, en zulks op grond het mij voorkomt, dat nog een klein gedeelte van het uiteinde van de, anders meer stompe, hoornachtige staartpunt is afgebroken.

niet uitweiden, doch over de wijze waarop zij bemachtigd werd, hoe de Heer DE MOOIJ daarbij is te werk gegaan, en wat hij wijders bij haar heeft waargenomen, nog een woord toevoegen.

De slang werd door DE MOOIJ, destijds gedetacheerd bij het leger in Nederlandsch Indië, alwaar hij, zoo op Java als in Atjeh en te Palembang, eenige jaren gediend heeft, in October 1877, in de binnenlanden der laatstgenoemde residentie, in een alang-alang-veld te Tebing-Tinghie, gevangen.

Een paar kettinggangers hadden hem bericht gebracht, dat, even buiten de benting daar ter plaatse, zich eene groote en zeer gevreesde slang, tot de vergiftigsten behoorende, ophield.

Na zich met een' scherpen klewang gewapend te hebben, en voorzien van eene lange, gaffelvormig gespleten bamboe, begaf hij zich, met zijn' desgelijks toegerusten »jongen", naar de aangeduide plaats.

Weldra ontdekte hij het reusachtige dier, dat zeer rustig in elkâar gekronkeld lag en, bij de voorzichtige nadering, geene pogingen deed tot aanval of vlucht.

DE MOOIJ stak haar zijne bamboe-vork, vlak achter den kop, om den hals en drukte dien met kracht tegen en in den grond, waarop de slang den bek wijd opende, maar met het lijf en den staart veel minder bewegingen maakte dan verwacht en gevreesd werd.

Hij had zijn' jongen een' tweeden, langen, gewonen bamboe-stok medegegeven, aan welks ééne uiteinde eene met chloroform rijkelijk bedeelde spons was bevestigd.

Deze werd diep in den open bek der slang gestoken en tot in de keel gedrukt, waarop het dier, na verloop van een kwartier, volkomen bedwelmd bleek te zijn.

Om de slang niet te beschadigen, zooals gewoonlijk, door het dooden met houwen of slagen, werd zij naar huis gesleept, met goed verzekerden kop, en dáár stevig op eene plank gebonden. Onmiddellijk werd het lichaam geopend en de huid met den kop afgeprepareerd.

Bij het nazien der ingewanden bleek, dat het geheele darmkanaal, bij overigens ledige maag, door eene soort van

draadvormige ingewandswormen bijna geheel was opgevuld, iets, wat de Heer DE MOOIJ kort te voren ook bij een' door hem gevangen *Python* had waargenomen, en waaraan hij het toeschreef, dat het, vermoedelijk zieke, vermagerde dier zoo ongewoon weinig wederstand had geboden.

De drukking van den bamboe-gaffel op medulla oblongata en spinalis zal evenwel tot dit laatste ook wel het hare hebben toegebracht.

Voor de wijze waarop men vergiftige slangen, zonder ze te verminken *) en zonder groot gevaar voor zich zelven, kan bemachtigen, acht ik deze waarneming van den Heer DE MOOIJ niet zonder praktisch belang, evenals zijne medegebrachte buit zulks is voor de wetenschap. Voor een en ander heb ik het genoegen, hem, ook bij deze gelegenheid, mijn' besten dank te betuigen.

's Gravenhage, October 1881.

---

*) Van een paar analoge, bijzonder lange, vergiftslangen, in het Parijsche museum, is de kop verbrijzeld, hetgeen voor de diagnose altijd zeer te bejammeren is.

DE GRONDFORMULES

DER

ELECTRODYNAMICA.

DOOR

H. A. LORENTZ.



§ 1. In zijne »Algemeene theorie der ponderomotorische krachten" *) werd door Dr. KORTEWEG de meest algemeene wet gezocht, die voor de electrodynamische werking van twee stroomelementen mag worden aangenomen. Eenige onderstellingen, zóó natuurlijk dat wel niemand er eenig bezwaar tegen zal hebben, voeren vooreerst tot uitdrukkingen voor deze werking, waarin een zeker aantal onbekende functiën voorkomen. Deze worden vervolgens zooveel mogelijk bepaald door de beschouwing van die gevallen, waarin de werking tusschen electrische stroomen geheel bekend is.

Het is mij gebleken, dat men tot dezelfde uitkomsten ook langs een anderen weg kan geraken, waarbij niet meer onbekende functiën worden ingevoerd dan in het eindresultaat blijven bestaan. Deze methode, die het mij vergund zij hier uiteen te zetten, staat in zooverre bij die van Dr. KORTEWEG achter, dat zij eene bijzondere wet voor de werking van stroomelementen als uitgangspunt noodig heeft; zij heeft echter, ten minste voor onvolledige stroomelementen, het voordeel van meerdere eenvoudigheid. Bij volledige elementen is er het bezwaar aan verbonden, dat de beschouwing daar-

*) *Natuurk. Verh. der Akad. v. Wet.*, Deel 20, later in vereenvoudigden vorm, waarbij van de opmerkingen van Dr. VAN DER WAALS werd gebruik gemaakt, in het *Journal für Mathematik*, Bd. 40.

van op die der onvolledige berust, terwijl Dr. KORTEWEG beide gevallen onafhankelijk van elkander behandelt.

Natuurlijk moet gebruik worden gemaakt van de geheel bekende werking van een gesloten stroom op een (onvolledig) stroomelement. Ik heb daarom in de eerstvolgende §§ aangewezen, op welke wijze men die met zekerheid uit de waarnemingen kan afleiden, zonder daarbij van eene formule voor de onderlinge werking van twee stroomelementen gebruik te maken. In § 8 en volgende vindt men dan de afleiding der algemeene uitdrukkingen voor stroomelementen.

§ 2. De nauwkeurigste metingen, die men over de electrodynamische verschijnselen bezit, hebben geleerd, dat de onderlinge werking van twee gesloten lineaire stroomgeleiders, die zich als vaste lichamen van onveranderlijken vorm gedragen, en dus slechts verschuivingen en wentelingen kunnen ondergaan, geheel gelijk is aan die van twee magnetische dubbellagen. Om deze te verkrijgen denke men zich bij elken geleider een oppervlak aangebracht, dat door den geleider begrensd is, voorts een tweede oppervlak, overal op oneindig kleinen afstand van het eerste en voorzie het eene met noord-, het andere met zuidmagnetisme op zoodanige wijze, dat aan elke hoeveelheid noordmagnetisme op het eene oppervlak eene even groote hoeveelheid zuidmagnetisme op het andere beantwoordt en dat het product van de vlaktedichtheid en den afstand der beide vlakken (het moment der dubbellaag) overal gelijk is aan de intensiteit van den stroom, in electromagnetische maat uitgedrukt. Daarbij moet het noordmagnetisme aan die zijde van het oppervlak worden aangebracht, van waar uit gezien de richting van den stroom tegengesteld is aan die der wijzers van een uurwerk. Wij noemen zulk eene draaiingsrichting positief, die der wijzers van een uurwerk dus negatief. In het algemeen zullen wij zeggen, dat de richting eener wenteling en die van eene lijn loodrecht op het vlak daarvan getrokken dan overeenstemmen, wanneer de lijn naar die zijde loopt, van waar uit gezien de wenteling positief is. Door dezen regel wordt b. v. bij een koppel de richting der as

bepaald. Eindelijk zal steeds een systeem van coordinaat-assen worden gebezigd, waarbij de richting van OZ beantwoordt aan die eener wenteling van OX naar OY over een rechten hoek.

Wij zullen in het vervolg de beide stroomgeleiders door s en s', de beide dubbellagen door S en S' aanduiden, elementen van deze lijnen en oppervlakken door ds, enz. De normalen van S en S' naar de positieve zijde getrokken, zullen n en n' heeten. Daar wij verder de evenredigheid van alle werkingen met de stroomintensiteiten aannemen, kunnen wij ons bepalen tot het geval, dat die intensiteiten, dus ook de momenten der dubbellagen, $= 1$ zijn.

§ 3. De wederkeerige werking van twee magneten wordt, gelijk men weet, geheel bepaald door hunne onderlinge potentiaal; derhalve moet ook voor twee gesloten stroomen zulk eene grootheid bestaan, waarvan de vermindering bij elke verschuiving of wenteling der stroomgeleiders (bij constant gehouden stroomintensiteit) den arbeid der electrodynamische krachten aangeeft.

Is φ de magnetische potentiaalfunctie, die van den stroom in s' (of van de dubbellaag S') het gevolg is, dan is de onderlinge potentiaal der beide stroomen:

$$P = \int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

waarbij over de dubbellaag S moet geintegreerd worden. Door eenige herleidingen kan men daaruit afleiden:

$$P = -\int\int \frac{\cos \varepsilon}{r}\, ds\, ds', \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

waarbij ε den hoek voorstelt tusschen de op een afstand r van elkander gelegen elementen ds en ds', en de integratie langs de beide stroomgeleiders moet worden uitgestrekt.

Voor ons doel is intusschen de vorm (1) het meest geschikt. Men kan daaraan eene eenvoudige beteekenis geven. Is F_n de component der (van den stroom in s'

afkomstige) magnetische kracht volgens de richting n, dan kan men voor (1) schrijven:

$$P = -\int F_n \, dS \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (3)$$

Wanneer men in het magnetische veld, bij den stroom in s' behoorende, door alle punten eener gesloten lijn krachtlijnen trekt, zal het buisvormige oppervlak, waarop deze liggen, de eigenschap bezitten, dat over alle doorsneden ervan de integraal $\int F_n \, dS$ dezelfde waarde heeft. Men kan de ruimte verdeelen in een groot aantal buizen van dezen aard, zoodat voor elke doorsnede daarvan de integraal de waarde 1 heeft. Blijkens (3) is dan P het met het tegengestelde teeken genomen aantal dergelijke *krachtbuizen*, van s' afkomstig, die door S gaan, of door s omvat worden. Bij het opmaken van dat aantal moet men de krachtbuizen als positief of negatief in rekening brengen, al naarmate zij (in de richting der magnetische kracht genomen) naar de positieve of naar de negatieve zijde van S gaan.

Uit het gezegde volgt nu verder, dat bij elke verschuiving of wenteling van den stroomgeleider s de arbeid der daarop werkende electrodynamische krachten gelijk is aan het aantal krachtbuizen, die s bij zijne beweging doorsnijdt. Men vindt dit aantal als de algebraïsche som van het aantal krachtbuizen, door de verschillende elementen van s doorsneden. Wordt daarbij een element AB (in de richting van A naar B door den stroom doorloopen) naar $A' B'$ verplaatst, dan moet het aantal der daardoor doorsneden krachtbuizen als positief of negatief in rekening gebracht worden, al naarmate de magnetische kracht de richting heeft, beantwoordende aan de draaiing $B A \; A' B'$, of de tegengestelde.

§ 4. De eerste stap bij verdere ontleding der electrodynamische werking moet nu zijn, een der beide stroomen, b. v. s, in elementen te verdeelen en de krachten te zoeken, die zulk een element van den stroom in s' ondervindt. Om

tot de kennis daarvan te geraken kan men gebruik maken van alle proeven omtrent de electrodynamische werking op de deelen van een stroomgeleider, wanneer die ten opzichte van elkander bewegelijk zijn. Eéne dezer proeven is echter voldoende, namelijk die van AMPÈRE, later door v. ETTINGHAUSEN herhaald, waardoor bewezen werd, dat een door een electrischen stroom doorloopen cirkelboog, die draaibaar is om zijne as, door een willekeurigen gesloten stroom in de nabijheid nooit in beweging gebracht wordt.

Wanneer een stroomelement ds aan den invloed van den stroom in s' is onderworpen, zal men altijd al de krachten, die erop werken, naar een zelfde punt, waarvoor wij het midden van ds kiezen, kunnen overbrengen en daarbij eene resulteerende kracht en een koppel kunnen verkrijgen. Zal nu het resultaat der proef van AMPÈRE en v. ETTINGHAUSEN voor alle stroomgeleiders in den vorm van een cirkelboog doorgaan, dan moet het ook voor stroomelementen gelden, daar men deze als cirkelbogen kan opvatten. Elke lijn, gelegen in het vlak, dat het element loodrecht middendoor deelt, kan daarbij als de as van den cirkelboog beschouwd worden; om elke zoodanige lijn kan het element dus door de werking van gesloten stroomen geene wenteling verkrijgen. Daaruit volgt, dat de bovengenoemde resulteerende kracht loodrecht moet staan op het element en dat de as van het koppel de richting daarvan moet hebben.

§ 5. Ten einde vooreerst de kracht nader te bepalen zullen wij de hypothese invoeren, dat het element ds door zijne componenten dx, dy, dz mag vervangen worden. Op de eerste daarvan kan slechts eene kracht werken, evenwijdig aan het yz-vlak; noemen wij de componenten daarvan evenwijdig aan de y- en z-as resp. $k_z\,dx$ en $k'_y\,dx$, dan kunnen k_z en k'_y slechts functiën zijn der coördinaten x, y, z van het punt, waaraan het stroomelement geplaatst is, functiën, die bepaalde waarden moeten hebben, zoodra de vorm en de stand van den werkenden stroom s' zijn gegeven. Op dezelfde wijze werken op dy de krachten $k_x\,dy$ en $k'_z\,dy$ in de richtingen der z- en x-as, op dz de krachten $k_y\,dz$ en $k'_x\,dz$, die evenwijdig aan de x- en y-as zijn

gericht. De totale kracht, op ds werkende, moet dus de componenten

$$X = k'_z\, dy + k_y\, dz\,, \quad Y = k'_x\, dz + k_z\, dx\,,$$
$$Z = k'_y\, dx + k_x\, dy$$

hebben. Zal nu echter deze kracht loodrecht op ds staan, dan moet

$$X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = 0$$

zijn, of

$$(k'_x + k_x)\, dy\, dz + (k'_y + k_y)\, dz\, dx + (k'_z + k_z)\, dx\, dy = 0.$$

Dit is echter slechts dan bij alle standen van het element mogelijk, wanneer

$$k_x = -\, k'_x\,, \quad k_y = -\, k'_y\,, \quad k_z = -\, k'_z$$

is, zoodat

$$X = k'_z\, dy - k'_y\, dz\,, \quad Y = k'_x\, dz - k'_z\, dx\,,$$
$$Z = k'_y\, dx - k'_x\, dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

wordt.

In elk punt der ruimte kan men den vector ϱ aangeven, waarvan k'_x, k'_y, k'_z de componenten zijn. Uit (4) blijkt dan, dat de kracht, door ds ondervonden, loodrecht staat op het vlak door ds en ϱ gebracht en gelijk is aan den inhoud van het parallelogram op beiden als zijden beschreven. De richting der kracht beantwoordt aan eene wenteling van ds naar ϱ.

§ 6. Wij zullen thans aantoonen, dat de vector ϱ niet anders is dan de magnetische kracht, door den stroom s' teweeggebracht, en waarvan K_x, K_y, K_z de componenten mogen zijn.

Beschouwen wij daartoe een oneindig kleinen rechthoek met de zijden dx, dy evenwijdig aan de x- en de y-as en nemen wij aan, dat de omtrek daarvan in positieve richting

door een stroom doorloopen wordt. Gemakkelijk vindt men dan voor de kracht, daarop in de richting der x-as werkende

$$\frac{\partial k'_z}{\partial x}\, dx\, dy.$$

Aan den anderen kant is die werking door het in § 3 gezegde volkomen bekend. Geeft men aan den rechthoek eene oneindig kleine verschuiving ε in de richting der x-as, dan is de arbeid der electrodynamische krachten

$$\varepsilon \frac{\partial K_z}{\partial x}\, dx\, dy.$$

Dus moet

$$\frac{\partial k'_z}{\partial x} = \frac{\partial K_z}{\partial x}$$

zijn. Op dezelfde wijze toont men aan, dat

$$\frac{\partial k'_z}{\partial y} = \frac{\partial K_z}{\partial y}$$

is, zoodat $k'_z - K_z$ slechts eene functie van z zijn kan. Neemt men echter in aanmerking, dat voor x of $y = \infty$ alle magnetische en electrodynamische werking moet verdwijnen, dan blijkt het, dat overal $k'_z - K_z = 0$ moet zijn. Eveneens wordt $k'_x = K_x$ en $k'_y = K_y$.

Hiermede is bewezen, dat men in de stelling der vorige § onder ϱ de magnetische kracht heeft te verstaan.

§ 7. De vraag is nu alleen nog, of op ds, behalve de door deze stelling bepaalde kracht nog een koppel van den in § 4 genoemden aard kan werken. Om dit te beantwoorden merken wij op, dat ook bij eene wenteling van den rechthoek der vorige § de gevonden *krachten* een arbeid verrichten, gelijk aan het aantal doorsneden krachtbuizen, dus gelijk aan de waarde, die de waarneming voor den electrodynamischen arbeid oplevert. De koppels, zoo zij al bestaan, mogen dus ook bij eene wenteling geen arbeid verrichten.

Noemt men het moment van het koppel, dat op een element dx werkt, $L\,dx$, waarbij L eene functie van x, y, z is, dan volgt uit de zoo even gevonden voorwaarde, wanneer men die toepast op eene wenteling van den rechthoek $dx\ dy$ om de x-as:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 .$$

Eveneens is ook:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 ,$$

en daar L in elk geval op oneindigen afstand moet verdwijnen, is overal:

$$L = 0 .$$

Daar deze uitkomst onafhankelijk is van de richting aan de x-as toegekend, bestaat een koppel nooit en bepaalt de stelling van § 5 de geheele krachtwerking op ds.

Uit die stelling volgt dan verder, dat bij willekeurige bewegingen der deelen van een stroomgeleider ten opzichte van elkander hetzelfde verband tusschen de krachtbuizen en den electrodynamischen arbeid bestaat, als bij de verschuivingen en wentelingen van een geleider van onveranderlijken vorm. Dit werd o. a. door proeven van BOLTZMANN *), v. ETTINGHAUSEN †) en NIEMÖLLER §) bevestigd.

§ 8. Wij zullen thans, een stap verder gaande, ook den werkenden stroom in elementen verdeelen, ten einde aldus de werking te leeren kennen, die ds van een element ds' ondervindt. Om voor deze gedeeltelijk onbepaalde werking de meest algemeene uitdrukking te vinden zullen wij eerst eene bijzondere onderstelling maken en vervolgens nagaan, welke krachten behalve de daarbij gevondene nog mogen

---

*) *Wiener Sitz. Ber.*, Bd. 60, p. 69.

†) Ibid., Bd. 77, p. 109.

§) WIEDEMANN's *Annalen*, Bd. 5, p. 433.

worden aangenomen. Van welke bijzondere werkingswet wij uitgaan, is hierbij onverschillig, daar zij toch in de einduitkomst alle zullen begrepen zijn.

Wij kiezen nu eene onderstelling uit, die na de bovenstaande ontwikkelingen wel het meest voor de hand ligt. Wij verdeelen namelijk de magnetische werking door s' uitgeoefend in deelen van de verschillende elementen ds' afkomstig en nemen aan, dat de electrodynamische en de magnetische werking van zulk een element volgens den regel van § 5 samenhangen. Gelijk men weet verkrijgt men de waargenomen magnetische werking van een gesloten stroom s', wanneer men aanneemt, dat de magnetische kracht door het element ds' uitgeoefend in een punt P op een afstand r gelegen, eene richting heeft loodrecht op het vlak (P, ds') en beantwoordende aan de wenteling van ds' naar r, en eene grootte bepaald door:

$$\frac{\sin(r, ds').\, ds'}{r^2}.$$

In overeenstemming hiermede stellen wij voor de componenten der magnetische kracht, door ds' in het punt (x, y, z) uitgeoefend, als ds' zelf aan het punt (x', y', z') geplaatst is.

$$\frac{z-z'}{r^3}\, dy' - \frac{y-y'}{r^3}\, dz', \text{ enz.}$$

en voor de componenten der electrodynamische werking van ds' op ds:

$$\left[\frac{y-y'}{r^3}\, dx' - \frac{x-x'}{r^3}\, dy\right] dy - \left[\frac{x-x'}{r^3}\, dz - \frac{z-z'}{r^3}\, dx'\right] dz, \text{ enz,}$$

of na eenige herleiding:

$$-\left[\frac{x-x'}{r^3}\cos\varepsilon + \frac{dx'}{ds'}\, \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}\right] ds\, ds', \text{ enz.} \quad . . (5)$$

Gemakkelijk ziet men in, dat deze uitdrukkingen beantwoorden aan de wet van GRASSMANN.

§ 9. Welke ook de werking tusschen de beide stroomelementen moge zijn, men zal zich altijd kunnen voorstellen, dat zij bestaat uit de door (5) gegeven krachten en uit eenige andere werking, die uit krachten en koppels bestaan kan. Om deze »secundaire werking" te bepalen hebben wij slechts deze conditie, dat zij, zoodra s' gesloten is, verdwijnt, daar toch de krachten (5) op zich zelve van de werking van zulk een stroom geheel rekenschap geven.

Men kan nu de secundaire werking door een stroomelement ds' uitgeoefend afleiden uit die van een stroom, die van oneindigen afstand komt en in eenig punt P' met de coördinaten x', y', z' eindigt. Vooreerst kan, zoodra het element ds gegeven is, deze werking slechts afhangen van de plaats van P', daar zij voor twee stroomen, die, van oneindigen afstand komende, beide in dat punt eindigen, dezelfde moet zijn. Immers, wanneer men van den eenen dezer stroomen de richting omkeert, zullen zij samen een stroom vormen, die als gesloten beschouwd kan worden en dus geene secundaire werking uitoefent. Zoodra verder de bedoelde secundaire werking als eene functie van x', y', z' bekend is, zal men door eene eenvoudige differentiatie daarvan naar s' de secundaire werking van een willekeurig stroomelement ds', in P' geplaatst, verkrijgen. Men kan toch zulk een element $P'Q'$ beschouwen als het verschil van twee stroomen beide van oneindigen afstand komende en de een in P', de ander in Q' eindigende.

§ 10. Ten einde de secundaire werking te bepalen, die het element ds in het punt P (x, y, z) van den in P' eindigenden stroom ondervindt, kunnen wij ons voorstellen, dat deze laatste volgens het verlengde der lijn PP' loopt. Wij zullen verder aannemen, dat alle op ds werkende krachten naar het midden daarvan worden overgebracht en de aldus verkregen resulteerende kracht en het koppel nader bepalen door de hypothese, dat tusschen de spiegelbeelden van twee electrische stroomen de spiegelbeelden der krachten werkzaam zijn. Ontbindt men nu ds in de componenten

$(ds)_1$ en $(ds)_2$, respectievelijk volgens PP' en loodrecht daarop gericht, dan volgt uit deze onderstelling, dat op elke daarvan slechts eene secundaire kracht in hare eigen richting kan werken. Deze krachten zullen evenredig zijn met de lengte van $(ds)_1$ en $(ds)_2$ en verder slechts van den afstand $PP' = r$ kunnen afhangen, zoodat wij ze respectievelijk door $R(ds)_1$ en $R_1(ds)_2$ kunnen voorstellen, waarbij R en R_1 onbekende functiën van r zijn. Wij nemen deze daarbij positief, als de krachten de richtingen van $(ds)_1$ en $(ds)_2$ hebben.

Men kan nu altijd $R = R_1 + R_2$ stellen, waarbij R_2 eene nieuwe onbekende functie is. Na deze splitsing kunnen de beide krachten $R_1(ds)_1$ en $R_1(ds)_2$ op $(ds)_1$ en $(ds)_2$ werkende tot eene kracht $R_1 ds$ in de richting van ds worden samengesteld; bovendien bestaat dan nog de kracht $R_2(ds)_1$ in de richting van $(ds)_1$.

Voor de componenten der gezochte secundaire kracht op ds verkrijgt men hieruit

$$\left(R_1 \frac{dx}{ds} + R_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{x - x'}{r}\right) ds, \text{ enz.}$$

§ 11. Ook bij het onderzoek van het koppel, dat ds van den in P' eindigenden stroom ondervindt, kan men van de hypothese der spiegelbeelden gebruik maken; alleen moet men daarbij in het oog houden, dat wanneer van een koppel het spiegelbeeld wordt genomen de as van dit laatste niet het spiegelbeeld der oorspronkelijke as is, maar eene richting heeft tegengesteld aan die van dat beeld. Gemakkelijk vindt men dan, dat op de component $(ds)_1$ geen koppel kan werken en op $(ds)_2$ slechts een koppel, waarvan de as loodrecht staat op het vlak (P', ds). Het moment daarvan wordt gevonden door $(ds)_2$ met eene onbekende functie van r te vermenigvuldigen; wij zullen deze K noemen en daarbij eene wenteling van ds naar r als positief beschouwen. De componenten van het koppel worden dan

$$\frac{K}{r}\left[(y - y')\frac{dz}{ds} - (z - z')\frac{dy}{ds}\right] ds, \text{ enz.}$$

§ 12. Uit de uitkomsten der beide vorige §§ vindt men door eene differentiatie naar s' de secundaire werking van ds' op ds en voegt men deze bij de werking, die wij in § 8 leerden kennen, dan vindt men voor de totale kracht, die ds van ds' ondervindt, de componenten:

$$\left[-\frac{x-x'}{r^3}\cos\varepsilon-\frac{dx'}{ds'}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s'}\left(R_1\frac{dx}{ds}+R_2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{x-x'}{r}\right)\right]ds\,ds',$$

enz.

Deze uitdrukkingen worden nog iets eenvoudiger, wanneer men in plaats van R_2 de functie R_3 invoert met behulp van de betrekking

$$\frac{R_2}{r}=\frac{dR_3}{dr},$$

of van

$$R_3=-\int_r^\infty\frac{R_2}{r}\,dr.$$

Dan worden nl. de krachtcomponenten

$$\left[\left(-\frac{\cos\varepsilon}{r^3}+\frac{\partial^2 R_3}{\partial s\,\partial s'}\right)(x-x')+\frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+R_3\right)}{\partial s}\frac{dx'}{ds'}\right]ds\,ds',\text{ enz.}\;(6)$$

Het op ds werkende koppel heeft tot componenten

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left\{\frac{K}{r}\left[(y-y')\frac{dz}{ds}-(z-z')\frac{dy}{ds}\right]\right\}ds\,ds',\text{ enz.}\;\ldots\;(7)$$

§ 13. Deze uitdrukkingen met de drie onbekende functiën R_1, R_3, K bepalen de meest algemeene werking, die tusschen de beide stroomelementen mag worden aangenomen. Eene vereenvoudiging verkrijgt men nog, wanneer men de conditie invoert, dat de werking en de terugwerking gelijk en tegengesteld zullen zijn. Door verwisseling van de groot-heden, die wel, en van die, welke niet met een accent voor-

zien zijn, gaan (6) en (7) over in de uitdrukkingen voor de werking, door ds op ds' uitgeoefend. Zullen nu vooreerst de krachten, op de beide elementen werkende, gelijk en tegengesteld zijn, dan moet, zooals men onmiddellijk vindt,

$$R_1 = \frac{1}{r} + R_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

zijn, waardoor (6) overgaat in

$$\left[\left(-\frac{\cos\varepsilon}{r^3} + \frac{\partial^2\left(-\frac{1}{r}+R_1\right)}{\partial s\, \partial s'}\right)(x-x') + \frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s}\frac{dx'}{ds'}\right] ds\, ds' \; . \quad (8)$$

Eene verdere conditie heeft betrekking op de koppels. Zal de actie gelijk zijn aan de reactie, dan moet het systeem der beide elementen, wanneer zij vast met elkander verbonden zijn, door de inwendige krachten geene wenteling kunnen aannemen; dus moet bij overbrenging van alle krachten naar een zelfde punt geen koppel optreden. Kiest men voor dat punt het midden van ds en maakt men voor de krachten van de uitdrukkingen (8) gebruik, dan vindt men voor de componenten van het koppel

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left\{\frac{K}{r}\left[(y-y')\frac{dz}{ds} - (z-z')\frac{dy}{ds}\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{K}{r}\left[(y'-y)\frac{dz'}{ds'} - (z'-z)\frac{dy'}{ds'}\right]\right\} +$$
$$+\left(\frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s}\frac{dy'}{ds'}\right)(z'-z) - \left(\frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s}\frac{dz'}{ds'}\right)(y'-y),$$

of:

$$\frac{\partial\left(R_1+\frac{K}{r}\right)}{\partial s'}\left[\frac{dz}{ds}(y-y') - \frac{dy}{ds}(z-z')\right] + \frac{\partial\left(R_1+\frac{K}{r}\right)}{\partial s}\left[\frac{dz'}{ds'}(y'-y) - \frac{dy'}{ds'}(z'-z)\right],$$

enz.

Zal het koppel altijd 0 zijn, dan moet

$$K = -R_1 r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

zijn.

De gelijkheid van actie en reactie reduceert dus de onbekende functiën tot eene enkele R_1.

§ 14. De hier verkregen uitkomsten stemmen geheel overeen met die, welke Dr. KORTEWEG voor »onvolledige" stroomelementen verkrijgt. Door hem worden voor de werking van zulke elementen zeven onbekende functiën ingevoerd, waartusschen dan, als de gelijkheid van actie en reactie niet wordt aangenomen, vier betrekkingen worden gevonden, zoodat er even als in onze formules 3 van elkander onafhankelijke onbekende functiën blijven bestaan. Het is nu niet moeilijk, door toepassing van (6) en (7) op bijzondere gevallen de functiën van Dr. KORTEWEG in R_1, R_3 en K uit te drukken; men vindt daarbij

$$B = -\frac{d R_1}{d r} - \frac{d R_3}{d r} - r \frac{d^2 R_3}{d r^2},$$

$$C = \frac{1}{r^2} + \frac{d R_3}{d r},$$

$$(D) = \frac{K}{r},$$

$$E = -\frac{d R_1}{d r},$$

$$(F) = \frac{K}{r} + r \frac{d}{d r}\left(\frac{K}{r}\right),$$

$$G = \frac{1}{r^2} - \frac{d R_3}{d r},$$

$$(H) = -\frac{K}{r},$$

en deze waarden voldoen werkelijk aan de betrekkingen, die tusschen B, C, enz. bestaan moeten *).

§ 15. Volgens (6) kan men de kracht, die op het element ds werkt, beschouwen als te bestaan uit drie krachten, waarvan de eerste eene aantrekking

$$\left[\frac{\cos \varepsilon}{r^2} - r \frac{\partial^2 R_3}{\partial s\, d s'}\right] ds\, ds'$$

* Men moet daarbij in de formules van Dr. KORTEWEG $A = 1$ stellen, daar onze vergelijkingen op het electromagnetische maatstelsel betrekking hebben.

is, terwijl de tweede en de derde respectievelijk de richtingen van ds en ds' hebben en door

$$\frac{\partial R_1}{\partial s'} ds\, ds'$$

en

$$-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+R_3\right)}{\partial s} ds\, ds'$$

worden gegeven.

Stelt men $R_1 = 0$ en $R_3 = -\frac{1}{r}$, dan blijft alleen de aantrekking over, waarvan dan de grootte wordt

$$\left[-\frac{2}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right] ds\, ds'.$$

Men heeft dan, wanneer men nog $K = 0$ stelt, de wet van AMPÈRE verkregen.

Gelijk men weet werd door STEFAN eene theorie opgesteld, die de theoriën van AMPÈRE en GRASSMANN omvat. Koppels werden daarbij niet aangenomen, en er werd ondersteld, dat alle electrodynamische werkingen omgekeerd evenredig zijn aan de tweede macht van den afstand. Dit komt hierop neer, dat $R_1 = \frac{\alpha}{r}$, $R_3 = \frac{\beta}{r}$, $K = 0$ gesteld wordt.

Het behoeft wel nauwelijks vermeld te worden, dat men bij de opstelling der algemeene theorie even goed als de wet van GRASSMANN ook die van AMPÈRE, of eenige andere als uitgangspunt had kunnen kiezen. Het onderzoek naar de secundaire werking zou geheel hetzelfde zijn gebleven.

§ 16. Stelt men zich de vraag, of de functiën R_1, R_3, K in (6) en (7) zoo bepaald kunnen worden, dat voor de onderlinge werking van twee stroomelementen eene potentiaal bestaat, dan blijkt het, dat dit niet mogelijk is, zooals men trouwens kon verwachten, wanneer men de welbekende elec-

trodynamische rotatieproeven in aanmerking neemt. Toch wordt bij eene eenigszins andere opvatting der zaak het opstellen eener potentiaaltheorie mogelijk. Men onderscheide daartoe, zooals Dr. KORTEWEG dit doet, *volledige* en *onvolledige* stroomelementen. Een element van de eerste soort vormt een afgesloten geheel; daarbij komt de stroomende electriciteit aan het eene uiteinde in rust, terwijl aan het andere uiteinde rustende electriciteit zich in beweging stelt. Bij een onvolledig element daarentegen stroomt de electriciteit aan het eene uiteinde in, aan het andere uit. Men zal een gesloten stroom naar willekeur kunnen beschouwen als te bestaan uit volledige elementen, waarvan de stroomeinden elkander opheffen, of uit onvolledige elementen; een bewegelijk deel van zulk een stroom zal echter slechts als eene som van onvolledige elementen kunnen worden beschouwd, daar er geene stroomeinden aan optreden.

Hieruit volgt, dat in de ontwikkelingen der voorgaande §§ het werkende element ds' zoowel volledig als onvolledig zijn kan, maar dat ds slechts onvolledig kan zijn, daar van de proef van AMPÈRE en v. ETTINGHAUSEN gebruik werd gemaakt. Zoodra het element, dat de werking ondervindt, volledig is, zullen werkingen mogen worden aangenomen, die niet in (6) en (7) begrepen zijn. Dr. KORTEWEG vindt dan ook in dit geval tusschen de zeven onbekende functiën slechts twee betrekkingen, zoodat er vijf van die functiën blijven bestaan; en hij toont aan, dat deze thans zoo kunnen gekozen worden, dat er eene potentiaal bestaat.

§ 17. Wanneer men de methode van §§ 9—12 heeft gevolgd, zal men thans aldus kunnen redeneeren. De werking, die het element ds' (dat men zich volledig of onvolledig kan denken) op het onvolledige element ds uitoefent, zal door (6) en (7) worden gegeven. Wordt ds volledig, dan zullen bij die werking nog slechts krachten kunnen komen, op de uiteinden ervan werkende; wij hebben dus slechts deze nog te beschouwen.

Vooreerst kan men nu uit de onderstelling, dat bij omkeering van den stroom ook de electrodynamische werking omkeert, afleiden, dat de krachten, op een stroombegin en

op een stroomeinde, in hetzelfde punt van hetzelfde element, werkende, gelijk en tegengesteld zijn. Wij hebben dus slechts de krachten op stroom*einden* te beschouwen.

Wanneer men verder de hypothese invoert, dat de werking, die een ongesloten stroom met stroomeinden ondervindt, tot 0 nadert, wanneer de lengte steeds afneemt, onverschillig, hoe sterk de stroomgeleider gekromd is, dan kan men aantoonen, dat de werking van ds' op een stroomeinde, in een punt P geplaatst, onafhankelijk moet zijn van de richting van den stroom, waartoe dat stroomeinde behoort, dus slechts van de plaats van P met betrekking tot ds' kan afhangen.

Ontbindt men nu dat element in eene component $(ds')_1$ volgens de verbindingslijn $P'P$, en een tweede $(ds')_2$ loodrecht daarop, dan volgt uit de hypothese der spiegelbeelden, dat elke van deze componenten op het stroomeinde in P slechts eene kracht in hare eigen richting kan uitoefenen.

Men zal die krachten respectievelijk door $T(ds')_1$ en $T_1(ds')_2$ kunnen voorstellen, waarbij T en T_1 onbekende functiën van r zijn. Voert men dan verder de nieuwe functie $T - T_1 = T_2$ in, dan kan men de werking ook opvatten als te bestaan uit eene kracht $T_1 ds'$ in de richting van ds' en eene kracht $T_2(ds')_1$ in die van $(ds')_1$. De componenten der totale kracht worden dus

$$\left(T_1 \frac{dx'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{x'-x}{r}\right) ds', \text{ enz.}$$

Brengt men nu de krachten, op de beide uiteinden van ds werkende, naar het midden van dat element over, dan ontstaat eene resulteerende kracht

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T_1 \frac{dx'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{x'-x}{r}\right) ds\, ds', \text{ enz.}$$

en een koppel

$$\left\{\left(T_1 \frac{dz'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{z'-z}{r}\right)\frac{dy}{ds} - \left(T_1 \frac{dy'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{y'-y}{r}\right)\frac{dz}{ds}\right\} ds\, ds'.$$

enz.

Door eindelijk deze te voegen bij de uitdrukkingen (6) en (7) verkrijgt men de meest algemeene waarden, die voor de componenten van de kracht en het koppel mogen worden aangenomen, wanneer ds een volledig element is De uitkomsten blijken wederom met die van Dr. KORTEWEG overeen te stemmen, zoodat het na zijn uitvoerig onderzoek overbodig mag heeten, verder aan te toonen, dat R_1, R_3, K, T_1 en T_2 zoo kunnen gekozen worden, dat er thans eene potentiaal bestaat.

BIJDRAGE TOT DE KENNIS

VAN

NORMAAL CYAANZUUR,

DOOR

E. MULDER.

TWEEDE GEDEELTE.

In het Eerste Gedeelte *) der Bijdrage werd medegedeeld, dat BANNOW meende verkregen te hebben een zout, isomeer met kaliumisocyanaat, en naar hem wellicht kaliumnormaalcyanaat. Onderzoekingen, met betrekking tot dit gewichtige vraagstuk door mij gedaan, waren evenwel niet in overeenstemming met deze uitspraak van BANNOW. Deze scheikundige †), die dit onderwerp gedurende vele jaren had laten rusten, is nu onlangs teruggekomen op zijn vroeger beweren, en verklaart thans zijn vermeend kaliumnormaalcyanaat te zijn kaliumisocyanaat. Wat aangaat de verbinding der formule C_2N_3H van BANNOW, waarvan in gemeld Eerste Gedeelte der Bijdrage tevens werd gewag gemaakt, zoo zegt BANNOW, dat deze niet meer moet beschouwd worden te ontstaan uit kaliumnormaalcyanaat, maar waarschijnlijk wordt gevormd bij verhitten van kaliumcyanide met paracyaan.

Daarmede is deze stof gelegen buiten den kring, waar-

*) Verslagen en Mededeelingen 2de Reeks, Deel XVI. p. 286.

†) Dt. chem. Ges. 13.2201. Deze Aflevering, uitgegeven 13 Dec. 1880, werd eerst door mij ontvangen, nadat reeds het Eerste Gedeelte der Bijdrage was aangeboden aan de K. Akademie v. Wetenschappen.

binnen ik mij wenschte te bewegen, en ik meen reden te hebben daarover verheugd te zijn.

Alvorens over te gaan tot een mededeelen der analysen van erlangde produkten en hunne eigenschappen, schijnt het wenschelijk nogmaals te blijven stilstaan bij de reactie van broomcyaan op natriumaethylaat, waarop ten slotte het geheel neêrkomt. Bij nader inzien toch bleek onder anderen, dat het van groot belang kon zijn, aanwezigheid van water in aether, alkohol, enz., in nog meerdere mate te ontgaan dan tot dusverre geschiedde; in ieder geval zou zuiverheid van materialen niet anders dan heilzaam kunnen werken. Over dit zuiveren later; in de eerste plaats een enkel woord over een proef, gedaan met het doel, vocht, vooral van den dampkring, te mijden. Deze proef bestaat in het volgen der bereidingswijze van vroeger, maar met deze wijziging, dat na inwerking van broomcyaan op natriumaethylaat en filtratie van het broomnatrium, de oplossing werd geplaatst onder een exsiccator met zwavelzuur, welk laatste van tijd tot tijd werd ververscht. De uitkomst scheen te zijn, dat men slechts eenig verschil waarnam in de snelheid, waarmede een kristallijn afzetsel werd gevormd, in zooverre als dit langzamer geschiedde.

Gaan we thans over tot de reactie van broomcyaan en natriumaethylaat en wat daarmede in verband staat. In de eerste plaats moet dan worden medegedeeld, dat in de bereidingswijze een kleine wijziging werd aangebracht, en op 3,8 gr. natrium werd genomen aan aether 116 gr. en aan alkohol 58 gr. (aether en alkohol als vroeger behandeld met natrium, terwijl de alkohol bleek een sterkte te hebben van ongeveer 99,5 pCt.); na oplossen van het natrium werd toegevoegd ongeveer 19 gr. broomcyaan, opgelost in 70—75 gr. aether (watervrij). Nu wordt er opgegeven *), dat CLOËZ op 1 mol. natrium, dus op Na_2, nam aan aethylalkohol 5 mol., derhalve $5\,C_2H_6O$, of in gew.-d. op 3,8 gr. natrium aan aethylalkohol 19 gr.. De proef

---

*) *Dict. Wurtz art.* „acide cyanique.”.

leerde mij evenwel, dat 3,8 gr. natrium niet worden opgelost in een mengsel van 19 gr. aethylalkohol en 116 gr. aether, en zelfs is dit niet het geval met 22,8 gr. alkohol of Na_2 op $6\,C_2H_6O$. De oorzaak is niet toe te schrijven aan gebruik van meer aether. Maar natriumaethylaat vereenigt zich met alkohol, naar GEUTHER en SCHEITZ *), in de verhouding van $C_2H_5.ONa$ en $2\,C_2H_6O$, naar WANKLIJN †) evenwel met $3\,C_2H_6O$. Uit het volgende schijnt te blijken, dat deze verbinding die is van $C_2H_5.ONa$ en $2\,C_2H_6O$. Gaat men toch uit van 31,6 gr. alkohol, dan lossen 3,8 gr. natrium alleen daarin op, wanneer ten slotte wordt verwarmd, langzaam stijgende tot ongeveer 80°; de verhouding in moleculen is hier die van Na_2 en $8\,C_2H_6O$. Ter vorming van C_2H_5ONa, $2\,C_2H_6O$ wordt noodwendig vereischt de verhouding van Na_2 op $6\,C_2H_6O$:



$$Na_2 + 6\,C_2H_6O = 2\,(C_2H_5ONa,\ 2\,C_2H_6O) + 2\,H.$$

Uit het medegedeelde volgt wel als waarschijnlijk, dat de verbinding die is van C_2H_5ONa, $2\,C_2H_6O$. Reeds even boven 100° vangt zij aan ontleed te worden, waarbij dan alkohol vrijkomt. Naar WANKLIJN houdt die aan tot ongeveer 220°, terwijl terugblijft natriumaethylaat: C_2H_5ONa, dat zelfs tot nabij 290° zou kunnen gebracht worden, zonder zich te ontleden. De terugblijvende massa is kleurloos (en zeer ligt), maar wordt door toetreding van zuurstof gekleurd.

Het kon van eenig belang wezen, broomcyaan, opgelost in aether, te laten inwerken op C_2H_5ONa. Daarom werd onder afkoeling bij natriumaethylaat gedaan 9 gr. broomcyaan (op 119 gr. natrium) opgelost in 35 gr. aether, terwijl de massa, eerst goed geschud, daarna eenigen tijd aan zich zelve werd overgelaten. Na filtratie en indamping van het filtraat op een waterbad, bleef een licht geelgekleurde vloeistof terug, ongeveer 2 gr., die zich in 't algemeen ver-

---

*) *Jahresber.* 1868, 414.

†) *Ann. Ph. Ch*, 150, 200, 206 (1869); zie *Handwrt. Fehling Art.* Alkohol, S. 258.

hield als die gemaakt naar de gewone methode (de theorie eischte de vorming van ongeveer 4 gr. n. cyaanzuur aethyl).

In 't voorbijgaan zij opgemerkt, dat WANKLIJN geneigd schijnt te zijn (ten minste uitte hij zich voor eenige jaren in dien zin), dat zoogenaamd natriumaethylaat, algemeen beschouwd als C_2H_5ONa, te houden voor een lichaam van de structuur $Na—C_2H_4—OH$, in welk geval met broomcyaan zou kunnen ontstaan $NC—C_2H_4—OH$, dat wel zoo niet schijnt te wezen.

Door inwerking van broomcyaan, opgelost in aether, op C_2H_5ONa, wordt noodwendig toetreding van water meer tegengegaan dan vroeger het geval was. Een schaduwzijde dezer methode is evenwel, dat broomcyaan niet zoo goed vermag in te werken op C_2H_5ONa, een vaste stof, als op C_2H_5ONa, xC_2H_6O, opgelost in alkohol. Er werd daarom uitgezien naar andere middelen om toetreding van water zooveel mogelijk te voorkomen. Men plaatste daartoe in alle glazen toestellen, de burette niet uitgezonderd, eenige dagen vóór het gebruik, glazen buisjes, met zwavelzuur gevuld, om aanhangend water en vocht van ingesloten lucht meerendeels te verwijderen. Een andere voorzorg was, den aether, na gezuiverd te zijn met natrium op de gewone wijze, daarenboven te laten staan met vloeibaar natriumamalgama tot op het oogenblik van gebruik. Wat eindelijk den alkohol aangaat, reeds vroeger werd in 't kort medegedeeld, dat eenmalige behandeling met natrium niet toereikend bleek te zijn tot het maken van absoluten alkohol. Zoo gaf 250 gr. alkohol van 98—98,5 pCt., met niet minder dan 11—12 gr. natrium, na oplossing en verhitting met staanden afkoeler, bij overhaling, alkohol van ongeveer 99,5 pCt.; werd deze alkohol ten tweeden male op gelijke wijze behandeld met natrium, dan verkreeg men een alkohol van nagenoeg 99,8 pCt.. Daarentegen scheen werkelijk absolute alkohol te worden erlangd door verhitten van hetgeen bij gemelde bewerkingen in de retort terugbleef (bestaande uit een mengsel van C_2H_5ONa, xC_2H_6O en eenig $NaOH$) te ontleden in een oliebad en op te vangen den bij $120^0—150^0$ overgaanden alkohol. Het komt mij voor, dat

deze methode, om zich absoluten alkohol te verschaffen, niet weinig voor heeft boven de tot nog toe aangewende methoden, als: herhaalde overhaling over calciumoxyde, enz., daar zij toelaat, in betrekkelijk weinig tijd absoluten alkohol in groote hoeveelheid te maken. Bij vergelijking met den gewonen dusgenaamd absoluten alkohol, is opmerkelijk, dat de alkohol, afkomstig van C_2H_5ONa, xC_2H_6O, nagenoeg geen reuk bezit, een eigenschap van zuiveren alkohol, waarop, indien ik mij niet vergis, reeds werd gewezen door MENDELEJEFF.

In 't vervolg zal, ter onderscheiding, de alkohol van ongeveer 99,5 pCt., verkregen door overhaling van den zoogenaamd absoluten alkohol van den handel, na daarin natrium te hebben opgelost, genoemd worden alkohol A, en die, gemaakt door ontleding van C_2H_5ONa, xC_2H_6O, worden aangeduid met alkohol B (zie vroeger). Alkohol, verkregen door dien van 99,5 pCt. andermaal te behandelen met natrium en over te halen, om van het terugblijvende bij ontleding in een oliebad op te vangen het bij 120°—150° overgaande, dus naar de wijze gemaakt als vroeger met alkohol van 98—98,5 pCt., zal tevens worden bestempeld met de benaming van alkohol B, daar deze van den eersten, aldus aangeduid, niet merkbaar schijnt te verschillen.

In het Eerste Gedeelte onzer Bijdrage werd een analyse medegedeeld *) van het vloeibare product, afgezonderd door water uit het ruwe product, gemaakt met alkohol A. Er werd gevonden:

	I.	II.
koolstof	51,4	—
waterstof.	8,4	—
stikstof	—	16,4.

Dit product bevatte zonder twijfel nog alkohol. Het kon niet lang genoeg staan om behoorlijk te worden gezuiverd (zie later), maar zette betrekkelijk snel een kristallijn lichaam af. Nadat de massa schijnbaar geheel vast was geworden,

*) l. c. pag. 11.

deed men deze tusschen filtreerpapier (nu en dan ververscht), waarin nog veel vloeibaars werd opgenomen; vervolgens werd deze vaste stof opgelost in alkohol, en daarna bij de oplossing water toegevoegd in een betrekkelijk groote hoeveelheid, zoodat een vloeibaar afzetsel werd gevormd. Dit laatste kristalliseerde bij staan, en er ontstonden goed gevormde prisma's, die, onder een exsiccator geplaatst, een verweerd aanzien erlangden. Hierbij diene medegedeeld, dat deze bewerking geschiedde in een koude omgeving, en dit mag de reden wezen, dat zich dit verschijnsel later, in een warmer jaargetijde werkende, niet meer voordeed.

0,217 gr. dezer stof gaf 0,4008 gr. kooldioxyde en 0,147 gr. water; 0,2955 gr. stof gaf bij 769,2 ^{mm} en 22^0 aan stikstof 51 C. C. (A).

De moederloog van gemelde stof werd geplaatst onder een exsiccator en zette na vele weken een kristallijn lichaam af, wat onder een exsiccator den glans behield.

0,3807 gr. dezer stof gaf 0,7064 kooldioxyde en 0,2567 gr. water (B).

Opmerkenswaardig is, dat deze moederloog, na eerst geruimen tijd te hebben gestaan, bij verhitting troebel werd, en bij bekoeling andermaal helder, welk verschijnsel een onbepaald aantal malen kon herhaald worden, en zeker in verband staat met het lage smeltpunt der kristallijne stof in oplossing (zie later).

Van een kristallijne massa (kleurloos) eener andere bereiding, na tusschen filtreerpapier eenigen tijd te zijn geweest, werd ongeveer 3 gr. opgelost in 23 gr. alkohol en hierbij gedaan 30 gr. water, waarbij nog niets werd afgezet. Na staan onder een exsiccator, verdampte noodwendig vooral aanvankelijk de alkohol, een vloeibaar product werd afgezet, dat langzamerhand kristalliseerde. Na eenigen tijd te zijn geweest tusschen filtreerpapier, werd overgegaan tot de analyse (C).

0,3857 gr. stof gaf 0,7125 gr. kooldioxyde en 0,249 gr. water.

Op 100 gew.-d. leiden deze analysen tot een gehalte aan:

	A	B	C	$3(NC.OC_2H_5)$ vordert:
koolstof	50,4	50,6	50,6	50,7
waterstof.	7,4	7,4	7,1	7,0
stikstof	19,7	—	—	19,7.

Het smeltpunt van A, B en C is ongeveer 29°, terwijl bij verhitten met potassaloog, daarna toevoeging van een zuur, cyanuurzuur wordt afgezet. Het lichaam is dus te beschouwen als een cyanuurzuur aethyl, en wel in verband met bekende feiten als *normaalcyanuurzuur aethyl.*

Het lage smeltpunt is niet bevreemdend, in zooverre als Hofmann *) voor het smeltpunt van diaethylamidonormaalcyanuurzuur geeft 97°, en voor dat van normaalcyanuurzuur methyl 132° (elders staat 134°) en van dimethylamidonormaalcyanuurzuur 212°. Nu is 212°—132° = 80° en 97°—80° = 17°, waartoe dan het smeltpunt van normaalcyanuurzuur aethyl zou kunnen naderen. Evenwel wordt als smeltpunt van isocyanuurzuur methyl opgegeven 175° en van isocyanuurzuur aethyl 95°, terwijl 175°—95° = 80°; het smeltpunt van normaalcyanuurzuur aethyl en methyl geven een ander verschil (zie boven), want 132° - 29° = 103°, dat nog al verwijderd is van 80°. In ieder geval bestaat tusschen de smeltpunten van beide cyanuraten van methyl en aethyl een groot verschil, terwijl het smeltpunt der methylverbinding aanmerkelijk hooger is dan dat der overeenkomstige aethylverbinding.

Bij wijze eener voorloopige proef werd eenig n. cyanuurzuur aethyl in een reageerbuisje op een gasoven verhit, waarbij een vloeibaar lichaam werd opgevangen, dat kristalliseerde.

Het ruwe product van broomcyaan en natriumaethylaat werd bij de vorige bereidingen neêrgeslagen en gewasschen met water. Bij deze bewerking ging een kleine hoeveelheid van het lichaam van Cloëz mede. Gemeld waschwater en praecipiteerwater zetten bij staan kristallen af.

0,2254 gr. stof gaf 0,4075 gr. kooldioxyde en 0,148 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

*) l. c.

koolstof	49,2
waterstof.	7,2

De stof, die tevens een smeltpunt bevat van ongeveer 29°, is blijkbaar in hoofdzaak n cyanuurzuur aethyl. Deze analyse wordt medegedeeld om ook hiermede te doen uitkomen, dat bij de bereidingswijze, door ons gevolgd, de verbindingen, die HOFMANN uitsluitend verkreeg met chloorcyaan en natriumaethylaat, namelijk n. monamido-(a) en diamidocyanuurzuur aethyl (b), in 't geheel niet of in kleine hoeveelheid schijnen te ontstaan, daar deze (overigens met zeer afwijkende smeltpunten) vorderen aan:

	a	b
koolstof . . . . , . .	45,6	38,7
waterstof.	6,5	5,8.

Het is mij niet duidelijk, wat bij HOFMANN aanleiding kan hebben gegeven tot de vorming van deze amidoafgeleiden *), vooral daar aanwezigheid van betrekkelijk veel water (hierover later), ten minste bij het werken met broomcyaan, van dergelijke verbindingen hoogstens een geringe hoeveelheid doet ontstaan. Van urethaan, bij onze bereidingswijze gevormd, spreekt HOFMANN niet.

Gaan we thans over tot bereidingen met alkohol B, afkomstig van C_2H_5ONa, xC_2H_6O (zie vroeger). Het ruwe product werd gepraecipiteerd en gewasschen met water op de wijze als dit vroeger geschiedde. Opmerkenswaardig is hierbij, dat hoegenaamd geen verschil was waar te nemen betreffende de hoeveelheid water, vereischt ter praecipitatie. Na ruim een paar maanden te hebben gestaan (het was in den zomer) onder een exsiccator met zwavelzuur, nu en dan ververscht), waarbij zich slechts een kleine hoeveelheid eener kristallijne stof (geen n cyanuurzuur aethyl) afzette, van welke men de vloeistof afschonk, werd geanalyseerd.

Van een zelfde bereiding gaf:

---

*) Zie Eerste Gedeelte, pag. 7.

a. 0,3577 gr. stof 0,6492 gr. kooldioxyde en 0,2312 gr. water;

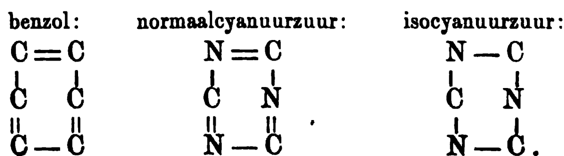
b. voorzichtigheidshalve werd een tweede analyse gedaan, terwijl 0,3786 gr. stof gaf 0,6879 gr. kooldioxyde en 0,2469 gr water;

c. 0,2738 gr. stof gaf bij 19,2° en 755,5mm aan stikstof 48,5 C C; op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

	a.	b.	c.	x ($NC.OC_2H_5$) eischt:
koolstof	49,5	49,5	—	50,7
waterstof. . . .	7,1	7,2	—	7,0
stikstof.	—	—	20,1	19,7.

Weinige dagen na het verrichten dezer analysen werd de temperatuur der omgeving lager, en kristallisatie trad in. Waarschijnlijk bestond deze vloeistof dus minstens uit een mengsel van $NC.OC_2H_5$ en n. cyanuurzuur aethyl, want dit laatste werd afgezet. In een barometerbuis ter bepaling van het soort.-gew. in gasvorm naar GAY-LUSSAC-HOFMANN, ging de vloeistof niet over in damp bij verhitten met waterdamp van 100°; evenwel was deze vloeistof geperst uit de massa, nadat deze reeds voor een goed deel in den vasten staat was overgegaan. Deze laatste proef moet dus worden herhaald.

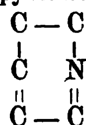
Over gesloten koolstofhoudende ketens met zes schakels De vorming van een gesloten keten, met koolstofatomen als schakels, geschiedt gemakkelijk met zes atomen, terwijl dergelijke ketens met drie en vijf atomen koolstof onbekend zijn. De neiging als bij acetylen: $HC\equiv CH$, om onder sommige omstandigheden over te gaan in een keten met *zes* schakels, namelijk benzol, treft men ook aan bij isocyaanzuur en normaalcyaanzuur als alkylverbindingen: $O=C=N-R$ en $N\equiv C-OR$. In deze ketens kunnen de atomen koolstof of koolstof en stikstof beschouwd worden aldus vereenigd te zijn:



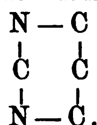
Het is wel aan geen twijfel onderhevig, of stikstof nadert in dit opzicht tot koolstof, en bij theoretische beschouwingen betreffende de structuur van benzol en afgeleidén, in 't algemeen van zoogenaamd aromatische stoffen, zal men goed doen deze gesloten ketens met stikstof niet buiten rekening te laten, en evenmin pyridine, enz..

Zooals bekend, vervult waarschijnlijk pyridine een niet onbelangrijke rol bij het opbouwen in de plant van vele plantaardige stikstofhoudende bases, terwijl theïne en theobromine afgeleiden schijnen te wezen van barbituurzuur, beiden ketens met zes schakels en wel:

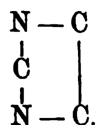
pyridine:



barbituurzuur:



Koolstof en stikstof kunnen, bij aanwezigheid ook van minder dan drie atomen stikstof, gemakkelijk gesloten ketens maken met minder dan zes schakels, onder anderen met vijf schakels. Zoo bevat b. v. hydantoïne:



Het zal wel niet toevallig wezen, dat de at.-gew. van koolstof en stikstof nagenoeg (of volkomen) tot elkander staan als 6 : 7, noch dat de affiniteitswaarden tot elkander zich verhouden als 4 : 5, of, gelet op de affiniteitswaarden van stikstof, die vooral neiging schijnen te hebben op te treden als 4 : 3.

De grondstof, die, na koolstof en stikstof, vooral aanleiding geeft tot de vorming van gesloten ketens bij koolstofhoudende stoffen, is zuurstof, terwijl de at.-gew. van koolstof, stikstof en zuurstof nagenoeg (of geheel) tot elkander staan als 6 : 7 : 8, en de affiniteitswaarden, die vooral neiging hebben op te treden, zich verhouden als 4 : 3 : 2.

Het kwam mij niet ongeschikt voor, op een en ander reeds thans voorloopig te wijzen. Dergelijke eenvoudige verhoudingen maken het daarenboven een weinig duidelijk, dat koolstof met stikstof en zuurstof (benevens waterstof) niet toevallig de aangewezen grondstoffen zijn, om zooveel duizenden verbindingen op te bouwen.

In onze nadere studie van normaalcyaanzuur en afgeleiden zullen we wellicht gelegenheid hebben, het verband tusschen gesloten koolstof- en kool-stikstofketens meer uitvoerig te behandelen.

Utrecht, 29 October 1881.

VERSLAG

OVER EENE VERHANDELING VAN

Dr. A. A. W. HUBRECHT

GETITELD:

„STUDIEN ZUR PHYLOGENIE DES NERVENSYSTEMES."

Uitgebracht in de Vergadering van 26 *November* 1881.

De Commissie, benoemd in Uwe vergadering van 29 Oct. jl., om verslag uit te brengen over een door den Heer Dr. A. A. W. HUBRECHT aangeboden bijdrage, getiteld: »Studien zur Phylogenie des Nervensystemes", heeft de eer U het volgende te berichten.

Onder de dieren, die gedurende den derden tocht van den Willem Barentz in de noordelijke poolzeeën verzameld zijn, behoort een klein ongewerveld dier, uit de afdeeling der Wormen.

Een nauwkeurig onderzoek van dit voorwerp leerde den Schrijver, dat hij hier niet alleen met eene nieuwe soort, maar zelfs met een geheel nieuw geslacht te doen had. Aan het laatste gaf hij den naam »Pseudonemator" en de soort noemde hij »nervosum."

Na eerst in algemeene trekken het dier beschreven te hebben, wijdt de Heer HUBRECHT zijne bijzondere aandacht aan het zenuwstelsel, dat zich hier in een uiterst merkwaardigen vorm voordoet en voor de vraag naar den phylogenetischen oorsprong van dat stelsel, in 't algemeen, zonder twijfel van zeer groot gewicht kan zijn. Het bedoelde zenuwstelsel toch heeft hier de gedaante van een koker, die binnen en onmiddellijk tegen de kringvezellaag gelegen is. Alleen aan het achterste lichaamseinde is de buikhelft van den koker verdwenen en bestaat nog alleen zijne rughelft.

Deze zenuwcilinder is niet overal even dik; ventraal en ventro-lateraal is hij het dunst, dáár, waar de beide dorsolaterale gedeelten in het rug-gedeelte overgaan, daarentegen het dikst. Vooral geldt dit voor het achterste lichaamseinde. De mikroskopische bouw van dit zoo eigenaardig gevormde zenuwstelsel wordt dan door den Schrijver uitvoerig en nauwkeurig toegelicht.

De volgende tweederde gedeelten zijner bijdrage wijdt de Heer HUBRECHT aan beschouwingen over het zenuwstelsel bij de Nemertinen, Medusen, Actiniën, Ctenophoren, Chaetognathen, Mollusken, Echinodermen, Proneomenia, marine Dendrocoelen, enz.; en vergelijkt de verkregen uitkomsten met die, door hem bij Pseudonemator gevonden, terwijl de laatste bladzijden gewijd zijn aan de phylogenetische ontwikkeling van het zenuwstelsel. Door een elftal afbeeldingen worden de verkregen uitkomsten verduidelijkt.

Ten slotte zij nog vermeld, dat aan den Schrijver van dit nieuwe geslacht Pseudonemator slechts een enkel exemplaar ten dienste stond: het eenige, dat op den 3den tocht van den Willem Barentz verzameld werd.

Uwe Commissie adviseert volgaarne tot de opneming der verhandeling van den Heer HUBRECHT in de Verslagen en Mededeelingen der Akademie.

Leiden en Utrecht.

C. K. HOFFMANN.
Th. W. ENGELMANN.

VERSLAG

OVER DE MOGELIJKHEID EENER

ZELFONTBRANDING VAN LOMPEN,

in de Vergadering van 26 *November* 1881

UITGEBRACHT DOOR DE HEEREN

E. H. VON BAUMHAUER, J. W. GUNNING en A. C. OUDEMANS Jr.

In de Vergadering van de Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen van 29 October 1881, werd in onze handen tot praeadvies gesteld eene missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken van 10 October 1881, N^{0}. 4399, Afd. B B, met vele bijlagen, waarbij de Akademie verzocht werd, Z. E. in staat te stellen, de door den Vicepresident van den Raad van State gedane vraag, of in een lompenmagazijn door zelfontbranding brand kan ontstaan, te beantwoorden.

Uit de bijlagen blijkt dat de vraag geschiedt naar aanleiding van een besluit van Burgemeester en Wethouders van Amsterdam, waarbij aan M. Gompertz de oprichting eener bewaar- of bergplaats voor lompen, in een perceel op de Prins-Hendrikkade N^{0}. 71 te Amsterdam, is geweigerd, van welk besluit M. Gompertz bij Z. M. den Koning in hooger beroep is gekomen, waardoor deze zaak bij den Raad van State, afdeeling voor de geschillen van Bestuur, aanhangig is gemaakt.

Met de, in de gewisselde stukken behandelde, kwestie of het bedoelde pakhuis bij een ontstanen brand, wegens zijne ligging, moeilijk door de brandbluschmiddelen te bereiken

zal zijn, alsmede of lompen bij de minste aanraking met kaarslicht of vuur gemakkelijk in brand geraken, behoeft Uwe Commissie zich niet onledig te houden; de eenige vraag, die aan de Akademie ter beantwoording wordt voorgelegd, is: kan in lompen, tot eene groote massa in een pakhuis opgestapeld, zelfontbranding plaats grijpen?

Na het met groote nauwgezetheid opgemaakt verslag van de heeren G. J. Mulder, A. H. van der Boon Mesch en J. C. Rijk: *Over de oorzaken der zelfontbranding van stoffen, in schepen geladen*, hetwelk, naar aanleiding eener aanschrijving van den Minister van Binnenlandsche Zaken van 2 September 1853, werd uitgebracht in de Vergaderingen der Akademie van 26 November en van 24 December 1853, en opgenomen is in het eerste deel der Verhandelingen in 4^0. van 1854, behoeft Uwe Commissie niet uit te wijden over de beteekenis, die aan het woord *zelfontbranding* moet worden gegeven. Dit woord behoort in den ruimsten zin te worden opgevat, en de vraag beantwoord worden: Kunnen lompen, tot eene groote massa opeengehoopt, zonder dat er vuur bij gebracht wordt, door toetreding van lucht of vocht, of door broeiing, zoodanig verhit worden dat zij vuur vatten en tot een brand aanleiding kunnen geven?

Wat wordt er al in een lompenpakhuis bij elkander gebracht? Behalve oud gedrukt en ongedrukt papier: oude afgedragen kleedingstukken, oude tapijten en andere oude lappen, in één woord allerlei geweven en ongeweven katoenen, linnen, wollen en zijden stoffen, door langdurig gebruik met allerlei vuil en smeer bezoedeld, waarbij op de hoedanigheid dier stoffen en de daaraan klevende vreemde bestanddeelen hoegenaamd niet wordt gelet. Dit alles wordt hetzij dooreen opgestapeld of wel tot verschillende doeleinden, zooals de papierfabrikatie, de wolindustrie, enz., vooraf uitgezocht en afzonderlijk tot hoopen gebracht. Kan in zulk eene massa, hetzij zonder of met toetreding van water, eene gisting of broeiing ontstaan, zooals bij het hooi en vele andere plantendeelen, die nog in meer of minder verschen toestand in groote hoeveelheid opeengestapeld zijn? Door een ingetreden gisting wordt *hier* eene scheikundige omzetting der

bestanddeelen zelven voortgebracht en zooveel hitte ontwikkeld, dat verkoling plaats vindt en bij toetreding der lucht de massa vlam vat. Het lange gebruik en het blootstaan aan de lucht van de stoffen, die als lompen in het pakhuis komen, maken deze wijze van zelfontbranding zeer onwaarschijnlijk.

Er is echter eene geheel andere scheikundige werking, die tot de zelfontbranding der lompen aanleiding kan geven en deze reeds meermalen veroorzaakt heeft, nl. de inwerking der zuurstof van de lucht op de weefsels, wanneer zij, zooals dit bij lompen meestal plaats vindt, bezoedeld zijn met vette lichamen.

Vloeibare en vooral drogende oliën (lijnolie, hennepolie, notenolie, enz.), maar ook de niet drogende (boomolie, raapolie, koolzaadolie, enz.) nemen de zuurstof uit de lucht op; de niet drogende in den regel langzamer en voortdurender dan de drogende, die het spoedig en sterk, doch soms in langen tijd weinig of niet, en dan eensklaps zeer sterk doen.

Bij deze verbinding der zuurstof met de bestanddeelen der vette lichamen, wordt warmte ontwikkeld, die echter, wanneer genoemde stoffen aan de vrije lucht zijn blootgesteld, door de afkoeling naar buiten nauwelijks merkbaar wordt. Geschiedt zij echter in eene groote massa lompen, zoodat de plaats, waar de zuurstof-opneming en warmte-ontwikkeling plaats vinden, door de omgevende lagen tegen de afkoeling van de buitenlucht en tegen luchtstroomen beschermd wordt, dan kan de ophooping van warmte zoo groot worden, dat verkoling en gloeiing ontstaan, terwijl de gemakkelijk brandbare lompen die gloeiing voortplanten, en, wanneer deze tot de buitenste lagen genaderd is, de geheele massa ontvlamt. Het onder de lompen veelvuldig voorkomend poetskatoen, tot het reinigen van machinen gebruikt, en dus met olie doortrokken, is eene voor zelfontbranding hoogst geschikte stof.

Opmerkelijk is het dat, terwijl in het genoemde rapport der Heeren MULDER, VAN DER BOON MESCH en RIJK, over de zelfontbranding van met olie bedeeld linnen, katoen, enz., uitvoerig gehandeld wordt, de lompen niet bij name genoemd zijn in de bij dat rapport gevoegde lange »Lijst der diverse »artikelen, welke, volgens opgave van het Ministerie van

»Koloniën, van de Nederlandsche Handelmaatschappij, van
»de Kamers van Koophandel te Amsterdam, Groningen,
»Leeuwarden, Middelburg, Rotterdam en Zwolle, gewoonlijk
»in scheepsruimte verzonden worden, gerangschikt in afdee-
»lingen, naar gelang van den graad hunner brandbaarheid."

Uwe Commissie is van oordeel, dat de door den Minister van Binnenlandsche Zaken aan de Afdeeling gestelde vraag: of in een lompenmagazijn door zelfontbranding brand *kan* ontstaan, bevestigend moet worden beantwoord.

Amsterdam, 26 September 1881.

OVER DE BEWEGINGEN,

DIE ONDER

DEN INVLOED DER ZWAARTEKRACHT,

TEN GEVOLGE VAN TEMPERATUURVERSCHILLEN, IN EENE GASMASSA OPTREDEN.

DOOR

H. A. LORENTZ.

§ 1. In eene vroegere verhandeling *) heb ik uit de grondbeginselen der kinetische gastheorie de bewegingsvergelijkingen van gasvormige lichamen afgeleid. Onder de vraagstukken, waarop men die vergelijkingen kan toepassen, trok reeds dadelijk een bijzonder mijne aandacht, dat nl. van de stroomingen, die door eene ongelijke temperatuurverdeeling worden teweeggebracht, en van den invloed, dien deze bewegingen op den overgang van warmte tusschen lichamen van verschillende temperatuur uitoefenen.

Bij de proeven, door verschillende natuurkundigen genomen, ter bepaling van den warmtegeleidings-coëfficiënt der gassen, bleek bij spanningen, gelijk aan ééne atmospheer of niet ver daar beneden, die invloed zeer aanzienlijk te zijn; om hem onschadelijk te maken nam men dan zijne toevlucht tot eene verdunning der gassen. Ik had nu echter de hoop,

*) LORENTZ, De bewegingsvergelijkingen der gassen en de voortplanting van het geluid volgens de kinetische gastheorie, *Versl. en Meded. der Akad. v. Wet.* 2de Reeks, Deel XV.

door de warmtestroomingen aan de berekening te onderwerpen, het mogelijk te maken, ook uit proeven bij grootere dichtheden genomen, den warmtegeleidings-coëfficiënt af te leiden; bovendien zou dan uit die proeven de coëfficiënt der inwendige wrijving moeten volgen, daar deze klaarblijkelijk op de intensiteit der warmtestroomingen van invloed moet zijn.

Toen ik met dit onderzoek begonnen was verscheen eene verhandeling van OBERBECK *) over hetzelfde onderwerp en nu onlangs werd door L. LORENZ †) eene berekening met hetzelfde doel uitgevoerd. Geen dezer natuurkundigen heeft intusschen het vraagstuk geheel opgelost. OBERBECK vindt de hoeveelheid warmte, die door de stroomingen wordt overgevoerd, in den vorm eener reeks, waarvan de eerste term met de derde macht van het temperatuurverschil evenredig is, terwijl de volgende termen nog hoogere machten daarvan bevatten. Eene oppervlakkige beschouwing van de uitkomsten der proeven van KUNDT en WARBURG §) en van die van WINKELMANN **) leert echter reeds, dat het deel der overgevoerde warmte, dat van de stroomingen afhangt, geen term evenredig aan de derde macht van het temperatuurverschil kan bevatten en OBERBECK meent dan ook, dat bij dichtheden, die niet zeer klein zijn, de door hem opgestelde reeks zal divergeeren, en dus de werkelijkheid niet kan voorstellen.

De uitkomst, waartoe LORENZ geraakt, is in betere overeenstemming met de ervaring. Hij behandelt het bijzondere geval van de stroomingen langs eene verticaal geplaatste, verwarmde plaat en vindt voor de afkoelingssnelheid eene uitdrukking, waarin het temperatuurverschil met den exponent $\frac{5}{4}$ voorkomt, hetgeen met de uitkomst der proeven van DULONG en PETIT in bevredigende overeenstemming is. Ook die van KUNDT en WARBURG en van WINKELMANN strijden niet met

*) OBERBEEK, *Wied. Ann.* Bd. 7, p. 271.

†) LORENZ, *Wied. Ann.* Bd. 13, p. 583.

§) KUNDT en WARBURG, *Wied. Ann.* Bd. 156, p. 177.

**) WINKELMANN, *Wied. Ann.* Bd. 156, p. 497.

de stelling, dat de afkoelingssnelheid — voor zoover zij aan de warmtestroomingen is toe te schrijven — met eene dergelijke macht van het temperatuurverschil evenredig is. Maar men zal niet zonder nader onderzoek het resultaat, door LORENZ verkregen, op andere gevallen mogen toepassen.

Ook mij is het niet gelukt, het vraagstuk op te lossen, en de verwachting, waarmede ik de berekening begon, is niet verwezenlijkt. Ik geloof intusschen, dat het de moeite waard is, mijne beschouwingen meè te deelen, al zijn zij slechts als eene voorbereiding voor meer volledige behandeling te beschouwen.

§ 2. De bewegingsvergelijkingen der gassen zijn in hun algemeenen vorm vrij samengesteld. Men bepaalt zich dan ook gewoonlijk, b. v. bij de behandeling der geluidsverschijnselen, tot oneindig kleine verstoringen van den evenwichtstoestand. Op dezelfde wijze kan men beginnen, bij het vraagstuk, dat ons thans bezig houdt, de temperatuurverschillen en de daardoor veroorzaakte stroomingen oneindig klein te onderstellen, waardoor verschillende termen in de bewegingsvergelijkingen wegvallen. Men vindt ook dan nog eenigen invloed van de warmtestroomingen op den warmteovergang. Wel is waar valt de eigenlijke convectie weg als eene grootheid van de tweede orde, maar er ontstaat toch door de stroomingen eene wijziging in de gedaante der oppervlakken van gelijke temperatuur en dus ook in de hoeveelheid warmte, die door geleiding wordt overgebracht. De berekening leert nu echter, dat deze wijziging bij proeven, als die van KUNDT en WARBURG zeer gering is en volstrekt niet den door hen gevonden invloed der stroomingen verklaren kan. Men zal dus bij deze proeven de temperatuurverschillen niet meer als oneindig klein mogen beschouwen. Werkelijk blijkt het, dat reeds bij kleinere temperatuurverschillen, b. v. van eenige graden, verschillende termen, die eerst in de bewegingsvergelijkingen werden weggelaten, even groot of grooter worden, dan die, welke men behield. De beschouwing der bewegingsvergelijkingen leert nl., dat men, zoodra de inwendige wrijving en de warmtegeleiding der gassen in rekening gebracht moeten worden, kleine snelheden, b. v. van 1 mM. per secunde

reeds niet meer als oneindig klein mag behandelen. Maakt men nu van de uitdrukkingen, die voor eene oneindig kleine evenwichtsverstoring werden afgeleid, gebruik, om de snelheden te beoordeelen, die bij de warmtestroomingen optreden, dan blijkt het, dat die reeds bij zeer kleine temperatuurverschillen veel te groot zijn, om als oneindig klein beschouwd te mogen worden.

§ 3. Op pag. 360 der boven aangehaalde verhandeling werden de bewegingsvergelijkingen der gassen vooreerst in den volgenden algemeenen vorm afgeleid:

$$\frac{\partial(Nu)}{\partial x} + \frac{\partial(Nv)}{\partial y} + \frac{\partial(Nw)}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \quad \ldots\ldots (a_1)$$

$$\left.\begin{aligned} -N\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{x,z}}{\partial z} + \frac{\partial(Nu)}{\partial t} = 0, \\ -N\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_{y,z}}{\partial z} + \frac{\partial(Nv)}{\partial t} = 0, \\ -N\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial Q_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial(Nw)}{\partial t} = 0, \end{aligned}\right\} \ldots (b_1)$$

$$-mN\left(u\frac{\partial\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\psi}{\partial y} + w\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \\ + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c_1)$$

Daarin stellen x, y, z de coördinaten van een punt in de ruimte, t den tijd voor, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ de versnellingen, die eene molecule door de werking der uitwendige krachten verkrijgt, m de massa eener molecule, terwijl N, u, v, w, P_x, P_y, P_z, $Q_{x,y}$, $Q_{y,z}$, $Q_{z,x}$, R, S_x, S_y, S_z grootheden zijn, die van den toestand van het gas in het punt (x, y, z) en op den tijd t afhangen. Beschouwt men een volume-element $d\tau$, dan is vooreerst $N d\tau$ het aantal der daarin aanwezige moleculen, zoodat N het aantal moleculen per ruimteeen-

heid is. Noemt men voorts de snelheid, waarmede het zwaartepunt eener molecule zich voortbeweegt, (ξ, η, ζ), haar arbeidsvermogen (nl. de som van dat der voortgaande beweging en van de inwendige energie) E', dan is, wanneer men sommeert over alle deeltjes binnen $d\tau$:

$$\Sigma\xi = N u\, d\tau\,,\ \Sigma\eta = N v\, d\tau\,,\ \Sigma\zeta = N w\, d\tau\,,$$
$$\Sigma\xi^2 = P_x\, d\tau\,,\ \Sigma\eta^2 = P_y\, d\tau\,,\ \Sigma\zeta^2 = P_z\, d\tau\,,$$
$$\Sigma\xi\eta = Q_{x,y}\, d\tau\,,\ \Sigma\eta\zeta = Q_{y,z}\, d\tau\,,\ \Sigma\zeta\xi = Q_{z,x}\, d\tau\,,$$
$$\Sigma E' = R\, d\tau\,,$$
$$\Sigma\xi E' = S_x\, d\tau\,,\ \Sigma\eta E' = S_y\, d\tau\,,\ \Sigma\zeta E' = S_z\, d\tau\,.$$

Men merke op, dat u, v, w de snelheden zijn, die het element $d\tau$ in de richting der coördinaatassen in zijn geheel schijnt te bezitten, de *stroomingssnelheden* van het gas, en dat R de energie per ruimte-eenheid voorstelt. De grootheden P_x, P_y, P_z, $Q_{x,y}$, $Q_{y,z}$, $Q_{z,x}$ hangen samen met de hoeveelheden van beweging, die door vlakken loodrecht op de coördinaatassen staande door de beweging van de moleculen naar de eene zijde meer dan naar de andere worden overgebracht; evenzoo hebben de grootheden S_x, S_y, S_z betrekking op de energie, door dergelijke vlakken overgevoerd.

Wat de bewegingsvergelijkingen zelf betreft, de eerste, die der continuiteit, drukt uit, hoe door de moleculen, die door de zijvlakken in- en uittreden, het aantal deeltjes binnen een volume-element $d\tau$ verandert. De eerste der vergelijkingen (b_1) bepaalt op overeenkomstige wijze de verandering van de hoeveelheid van beweging in de richting der x-as voor de binnen $d\tau$ aanwezige moleculen. Die verandering wordt door den term $\frac{\partial(Nu)}{\partial t}$ voorgesteld (vermenigvuldigd met $m\,d\tau$) en zij is een gevolg gedeeltelijk van de werking der uitwendige krachten $\left(\text{de term } -N\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$, gedeeltelijk van het in- en uittreden van moleculen door de zijvlakken van het element (waarvan de termen $\frac{\partial P_x}{\partial x}$, $\frac{\partial Q_{x,y}}{\partial y}$, $\frac{\partial Q_{x,z}}{\partial z}$ afkomstig zijn).

Natuurlijk hebben de andere vergelijkingen (b_1) eene overeenkomstige beteekenis. Eindelijk drukt (c_1) uit, hoe de energie binnen het element $d\tau$ met den tijd verandert $\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)$ en wel deels door de werking der uitwendige krachten (de eerste term), deels door het in- en uittreden van moleculen door de zijvlakken $\left(\text{de termen } \frac{\partial S_x}{\partial x}, \frac{\partial S_y}{\partial y}, \frac{\partial S_z}{\partial z}\right)$.

Een meer geschikten vorm verkrijgen de vergelijkingen, wanneer men, na vermenigvuldiging van (a_1) en (b_1) met m, de dichtheid $mN = \varrho$ invoert. Stelt men bovendien de producten van P_x, enz. met m door de overeenkomstige kleine letters voor, dan verkrijgt men:

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
-\varrho\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial q_{x,y}}{\partial y} + \frac{\partial q_{x,z}}{\partial z} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} = 0,\\
-\varrho\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial q_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial q_{y,z}}{\partial z} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial t} = 0,\\
-\varrho\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial q_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial q_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial t} = 0,
\end{aligned}\right\} \ldots (B_1)$$

$$-\varrho\left(u\frac{\partial\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\psi}{\partial y} + w\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} +$$
$$+ \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C_1)$$

§ 4. Deze vergelijkingen zijn intusschen op zich zelf voor de oplossing van vraagstukken over de beweging der gassen niet voldoende; men moet ze daartoe combineeren met die, welke p_x, enz. uitdrukken, als afhankelijk van de dichtheid, de temperatuur en de stroomingssnelheid van het gas.

Noemt men h het gemiddelde snelheidsquadraat van de warmtebeweging der gasmoleculen, welke grootheid door de

betrekking $h = eT$ (e constant) met de absolute temperatuur T samenhangt, verder $\vartheta(h)$ het intramoleculaire arbeidsvermogen der massaeenheid van het gas, μ den wrijvingscoëfficiënt, $\varkappa$ dien der warmtegeleiding (in arbeidseenheden uitgedrukt), ν den derden coëfficiënt, waarvan de beteekenis in mijne vroegere verhandeling werd uiteengezet, dan is (l. c., p. 392), wanneer men kortheidshalve

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = K$$

stelt,

$$p_x = \tfrac{1}{3}\varrho h + \varrho u^2 - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{2}{3}\mu K, \text{ enz.} \quad \ldots \quad (1)$$

$$q_{x,y} = \varrho u v - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \text{ enz.} \quad \ldots \quad (2)$$

$$R = \tfrac{1}{2}\varrho(u^2 + v^2 + w^2) + \tfrac{1}{2}\varrho[h + 2\vartheta(h)] + \nu K, \quad \ldots \quad (3)$$

$$S_x = \tfrac{1}{2}\varrho u[\tfrac{5}{3}h + 2\vartheta(h) + (u^2 + v^2 + w^2)] - \frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial x} -$$

$$- \mu\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] -$$

$$- 2\mu u \frac{\partial u}{\partial x} + (\tfrac{2}{3}\mu + \nu) u K, \text{ enz.} \quad \ldots \quad (4)$$

§ 5. Wanneer de zwaartekracht op het gas werkt, en de z-as verticaal naar beneden wordt gekozen, is

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = g.$$

Er is dan een evenwichtstoestand van het gas mogelijk, waarbij de temperatuur overal even hoog is, dus ook h overal dezelfde waarde h_0 heeft. Dan moet nl.

$$p_x = p_y = p_z = \tfrac{1}{3}\varrho h_0,$$

$$q_{x,y} = q_{y,z} = q_{z,x} = 0,$$

$$R = \tfrac{1}{3}\,\varrho\,[h_0 + 2\,\vartheta\,(h_0)],$$

$$S_x = S_y = S_z = 0$$

zijn en de bewegingsvergelijkingen (A_1)—(A_3) reduceeren zich tot

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = 0\,, \quad -g\,\varrho + \tfrac{1}{3}\,h_0 \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0\,,$$

waaraan, wanneer men

$$\frac{3g}{h_0} = \varepsilon$$

stelt, voldaan wordt door

$$\varrho = D e^{\varepsilon z}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

waarbij de constante D de dichtheid voorstelt van het gas voor $z = 0$.

§ 6. Beschouwen wij thans oneindig kleine afwijkingen van dezen evenwichtstoestand Noemt men dan de dichtheid

$$\varrho = D e^{\varepsilon z}\,(1 + s)\,,$$

en stelt men voor de waarde van h

$$h = h_0\,(1 + k)\,,$$

dan zijn s en k, alsmede u, v, w oneindig klein.

Men heeft dan

$$p_x = \tfrac{1}{3}\,D\,h_0\,e^{\varepsilon z}\,(1 + s + k) - 2\,\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{2}{3}\,\mu\,K, \text{ enz.} \quad \ldots (6)$$

$$q_{x,y} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \text{ enz.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$R = \tfrac{1}{3}\,D\,e^{\varepsilon z}\,\{[h_0 + 2\,\vartheta\,(h_0)] + \\ + [h_0 + 2\,\vartheta\,(h_0)]\,s + h_0[1 + 2\,\vartheta'(h_0)]\,k\} + \nu\,K \ldots (8)$$

$$S_x = \tfrac{1}{2} D e^{\varepsilon z} u \left[\tfrac{5}{3} h_0 + 2\,\vartheta(h_0)\right] - \frac{\varkappa}{e} h_0 \frac{\partial k}{\partial x}, \text{ enz.} \quad \ldots \quad (9)$$

waarbij μ, ν, $\varkappa$ als constanten zijn te beschouwen.

Bij substitutie dezer waarden in de bewegingsvergelijkingen verkrijgt men, wanneer men nog de onderstelling invoert, dat de toestand van het gas stationnair is,

$$K + \varepsilon w = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A_2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3} D h_0 \frac{\partial}{\partial x}[e^{\varepsilon z}(s+k)] - \mu \Delta u - \tfrac{1}{3}\mu \frac{\partial K}{\partial x} = 0,\\
&\tfrac{1}{3} D h_0 \frac{\partial}{\partial y}[e^{\varepsilon z}(s+k)] - \mu \Delta v - \tfrac{1}{3}\mu \frac{\partial K}{\partial y} = 0,\\
&\tfrac{1}{3} D h_0 \frac{\partial}{\partial z}[e^{\varepsilon z}(s+k)] - \mu \Delta w - \tfrac{1}{3}\mu \frac{\partial K}{\partial z} - g D e^{\varepsilon z} s = 0,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (B_2)$$

$$g D e^{\varepsilon z} w + \frac{\varkappa}{e} h_0 \Delta k = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C_2)$$

§ 7. Wij zullen ons voorstellen, dat het gas tusschen twee oppervlakken S_1 en S_2 geheel besloten is, en aannemen, dat de uitdrukkingen van § 5 betrekking hebben op den evenwichtstoestand van het gas, wanneer beide oppervlakken dezelfde aan h_0 beantwoordende temperatuur T_0 hebben.

Stellen wij ons voor, dat de gestoorde toestand, dien wij in § 6 bespraken, ontstaat doordat het oppervlak S_1 voortdurend op eene van de oorspronkelijke oneindig weinig verschillende temperatuur $T_0(1+q)$ wordt gehouden. Dan moeten uit (A_2) — (C_2) u, v, w, en k zoo bepaald worden, dat aan S_1 en S_2 $u = v = w = 0$ is (wij nemen nl. geene glijding van het gas langs deze oppervlakken aan), en dat k aan S_2 0 wordt, maar aan S_1 de voorgeschreven waarde q aanneemt. Eindelijk moet, wanneer de geheele hoeveelheid gas onveranderd is gebleven,

$$\iiint e^{\varepsilon z} s \, dx\, dy\, dz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

zijn, wanneer de integratie over de geheele ruimte tusschen S_1 en S_2 wordt uitgestrekt.

Wij bewijzen vooreerst, dat door deze conditiën het vraagstuk werkelijk geheel bepaald is. Stel nl., dat *twee* stellen waarden van u, v, w, s, k voldeden, dan zou ook het verschil dier waarden moeten voldoen en bij dien bewegingstoestand zou dan zoowel aan S_1 als S_2 ook $k = 0$ moeten zijn. Men kan nu bewijzen, dat dan overal $u = v = w = s = k = 0$ moet zijn.

Daartoe losse men uit de vergelijkingen (B_2) en (C_2) de grootheden Δu, Δv, Δw, Δk op, vermenigvuldige met u, v, w, $\frac{\varkappa h_0}{e\mu} k$, telle op en integreere, na nogmaals met $dx\, dy\, dz$ vermenigvuldigd te hebben, over de geheele ruimte door het gas ingenomen. Er komt dan

$$\iiint\left[u\Delta u + v\Delta v + w\Delta w + \frac{\varkappa h_0}{e\mu} k\Delta k\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{3\mu} D h_0 \iiint\left[u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[e^{sz}(s+k)\right] dx\, dy\, dz -$$

$$- \tfrac{1}{3}\iiint\left[u\frac{\partial K}{\partial x} + v\frac{\partial K}{\partial y} + w\frac{\partial K}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz -$$

$$- \frac{gD}{\mu}\iiint e^{sz}\, w\,(s + k)\, dx\, dy\, dz\,.$$

Men passe nu op de drie eerste integralen de integratie bij gedeelten toe, waarbij de oppervlakte-integralen wegvallen, daar aan S_1 en S_2 $u = v = w = 0$ is. Neemt men bovendien de vergelijking (A_2) in aanmerking, dan komt er

$$- \iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \dots +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{\varkappa h_0}{e\mu}\left\{\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial z}\right)^2\right\}\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= \tfrac{1}{3}\iiint K^2\, dx\, dy\, dz\,.$$

Brengt men hier alle termen naar het tweede lid over, dan treedt daar een som van tweede machten op; daaruit kan men besluiten, dat u, v, w, k constant moeten zijn, dus ten gevolge van de grensvoorwaarden overal $= 0$. Het is dan verder niet moeilijk uit (B_2) en (10) te bewijzen, dat ook $s = 0$ moet zijn, waarmede bewezen is, dat de vergelijkingen (A_2) — (C_2) in verband met de grensvoorwaarden slechts éene oplossing toelaten.

Is eens overal k, en dus de nieuwe temperatuurverdeeling bekend, dan wordt de hoeveelheid warmte, die het door S_1 begrensde lichaam per tijdseenheid aan het gas afstaat, bepaald door de integraal:

$$-\varkappa \frac{h_0}{e} \int \frac{\partial k}{\partial n} \, d S_1 \, , \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

waarbij n de naar de zijde van het gas getrokken normaal voorstelt.

§ 8. De algemeene oplossing van (A_2) — (C_2) schijnt, zelfs bij eene eenvoudige gedaante van S_1 en S_2, moeilijk te vinden.

Men kan intusschen, wanneer de dichtheid vrij klein is, dus ook de grootheid D, de veranderlijken u, v, w, k in reeksen naar de opklimmende machten van D ontwikkelen.

Wordt D zeer klein, dan naderen u, v, w tot 0, k tot de waarde k_0, die bepaald wordt door de vergelijking:

$$\Delta k_0 = 0 \, ,$$

in verband met de grensvoorwaarden. De temperatuurverdeeling is dan die, welke ontstaat, wanneer men alleen met de warmtegeleiding te doen heeft.

De reeksen voor u, v, w en k moeten dus den vorm:

$$u = u_1 D + u_2 D^2 + u_3 D^3 + \ldots \ldots \ldots$$
$$k = k_0 + k_1 D + k_2 D^2 + k_3 D^3 + \ldots \ldots$$

hebben. Eveneens stellen wij ook:

$$s = s_0 + S_1 D + s_2 D^2 + s_3 D^3 + \ldots \ldots$$

Door substitutie hiervan in (A_2) — (C_2) verkrijgt men, wanneer men in elke vergelijking de coëfficiënten van dezelfde macht van D in beide leden aan elkander gelijk stelt, eene reeks van vergelijkingen, waardoor u_1, u_2, enz., $k_1, k_2, \ldots, s_0, s_1, \ldots$ bepaald kunnen worden.

Ter bepaling van u_1, v_1, w_1, s_0 heeft men vooreerst:

$$K_1 + \varepsilon w_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A_3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial x}[e^{\varepsilon z}(s_0 + k_0)] - \mu \Delta u_1 - \frac{1}{3}\mu \frac{\partial K_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial y}[e^{\varepsilon z}(s_0 + k_0)] - \mu \Delta v_1 - \frac{1}{3}\mu \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0, \\ \frac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial z}[e^{\varepsilon z}(s_0 + k_0)] - \mu \Delta w_1 - \frac{1}{3}\mu \frac{\partial K_1}{\partial z} - g e^{\varepsilon z} s_0 = 0, \end{array}\right\} \ldots (B_3)$$

waarin

$$K_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}$$

is en k_0 bekend is. De bijkomende voorwaarden zijn aan de grenzen

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0$$

en bovendien

$$\iiint e^{\varepsilon z}\, s_0\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Wanneer k_0 reeds zoo bepaald is, dat de waarde daarvan aan S_1 de voorgeschrevene q wordt, moeten k_1, k_2, enz. aan S_1 en S_2 0 zijn. Nu volgt uit (C_2)

$$\Delta\, k_1 = 0,$$

zoodat overal

$$k_1 = 0$$

is; vervolgens

$$\Delta\, k_2 = -\frac{g\,e}{\varkappa\, h_0}\, e^{\varepsilon z}\, w_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C_3)$$

waardoor k_2 bepaald wordt, nadat uit (A_3) en (B_3) w_1 is gevonden.

§ 9. De opgestelde vergelijkingen ondergaan nog eene aanmerkelijke vereenvoudiging, wanneer wij aannemen, dat de afmetingen der met gas gevulde ruimte klein zijn vergeleken met $\frac{h_0}{g}$. Deze onderstelling komt hierop neer, dat de snelheid, die eene molecule verkrijgt, wanneer zij zich over een afstand l van dezelfde orde als de genoemde afmetingen onder den invloed der versnelling g voortbeweegt, zeer klein is vergeleken met de moleculaire snelheid, iets wat bij proeven als die van KUNDT en WARBURG of WINKELMANN zeker het geval is.

Vooreerst kan nu in (A_3) de term εw_1 worden weggelaten. Want, daar w_1 aan de grenzen der ruimte verdwijnt, is die grootheid overal elders van dezelfde orde als $l \frac{\partial w_1}{\partial z}$, en de term zelf van de orde $l \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial z}$; daar nu $l \varepsilon$ zeer klein is, en in K_1 de term $\frac{\partial w_1}{\partial z}$ voorkomt, mag men voor (A_3) schrijven

$$K_1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Ook de vergelijkingen (B_3) kunnen worden vereenvoudigd. Stelt men ter afkorting

$$\frac{1}{3\mu} \dot{h}_0 \, e^{\varepsilon z} (s_0 + k_0) = P \;, \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

dan is vooreerst

$$\Delta u_1 = \frac{\partial P}{\partial x}, \; \Delta v_1 = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Verder volgt uit de laatste der vergelijkingen (B_3)

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g}{\mu} e^{\varepsilon z} s_0,$$

of, als men s_0 met behulp van (13) in k_0 uitdrukt,

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} - \varepsilon P + \frac{g}{\mu} e^{\varepsilon z} k_0.$$

Daar nu de veranderingen van εP over de ruimte, met het gas gevuld, van de orde $\varepsilon l \frac{\partial P}{\partial z}$ zijn, en εl zeer klein is, mag men van die veranderingen afzien en dus

$$\varepsilon P = C \qquad (15)$$

stellen, waarbij C eene voorloopig onbepaalde constante is. De vergelijking wordt dan

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{g}{\mu} k_0 - C, \qquad (16)$$

waarin ook nog $e^{\varepsilon z} = 1$ is gesteld, hetgeen geoorloofd is, wanneer men den oorsprong zoodanig kiest, dat het yz-vlak de gasmassa snijdt.

Stelt men $P - Cz = Q$, dan worden de vergelijkingen

$$\Delta u_1 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \Delta v_1, = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad (17)$$

$$\Delta w_1 = \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{g}{\mu} k_0, \qquad (18)$$

Gemakkelijk kan men aantoonen, dat door deze vergelijkingen, verbonden met (12), u_1 v_1 w_1 geheel en Q op eene additieve constante na bepaald worden. Aangezien dus Q den vorm $Q' + C'$ aanneemt, waarin Q' geheel bepaald is, wordt

$$\frac{1}{3\mu} h_0 e^{\varepsilon z} (s_0 + k_0) - Cz = Q' + C'.$$

Verstaat men onder de constante C, die in (15) werd ingevoerd, de waarde van εP voor $z = 0$, dan is

$$(Q')_{(z=0)} + C' = \frac{C}{\varepsilon}$$

en

$$\frac{1}{3\mu} h_0 e^{\varepsilon z}(s_0 + k_0) = Q' - Q'_{(z=0)} + \frac{C}{\varepsilon},$$

aangezien men Cz mag verwaarloozen tegenover $\frac{C}{\varepsilon}$. De constante C eindelijk wordt bepaald uit de voorwaarde dat

$$\iiint e^{\varepsilon z} s_0 \, dx \, dy \, dz = 0$$

moet zijn.

Zoodra u_1, v_1, w_1 uit (12), (17) en (18) bekend zijn, vindt men k_2 uit de vergelijking (C_3), waarvoor men mag schrijven

$$\Delta k_2 = - \frac{g \varepsilon}{\varkappa h_0} w_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

§ 10. Wij zullen thans de berekening van u_1, v_1, w_1, k_2 uitvoeren voor het geval dat S_1 en S_2 concentrische bollen zijn, met de stralen R_1 en R_2. Daarbij denke men zich den coördinatenoorsprong in het middelpunt en $R_1 < R_2$.

Vooreerst volgt nu uit $\Delta k_0 = 0$, verbonden met de grensvoorwaarden:

$$k_0 = q \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right),$$

waarbij $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ is.

Wij hebben nu slechts, onverschillig langs welken weg, een stel waarden voor u_1, v_1, w_1 te zoeken, dat aan (12), (17) en (18) voldoet, daar wij reeds weten, dat slechts ééne oplossing dier vergelijkingen mogelijk is.

Zulk een systeem verkrijgen wij op de volgende wijze. Stel

$$u_1 = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial z}, \quad v_1 = \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial z}, w_1 = - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right),$$

waarbij I eene onbekende functie van r is. Aan (12) is dan voldaan.

Uit (17) volgt dan

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(\Delta I), \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(\Delta I),$$

dus

$$Q = \frac{\partial}{\partial z}(\Delta I) + f(z),$$

waarbij f eene voorloopig onbekende functie is.

Uit (18) verkrijgt men verder, wanneer men de waarde van k_0 substitueert,

$$\Delta(\Delta I) = \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r}\right) + f'(z),$$

waaruit blijkt, dat $f'(z)$ slechts eene constante kan zijn. Men vindt dus, door samenvatting der constanten

$$\Delta(\Delta I) = \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}\left(C_1 - \frac{1}{r}\right).$$

De algemeene oplossing dezer vergelijking is

$$I = \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}\left[\frac{1}{120} C_1 r^4 - \frac{1}{24} r^3 + C_2 r^2 + C_3 r + \right.$$
$$\left. + C_4 + \frac{C_5}{r}\right], \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

waarbij ook C_2, C_3, C_4, C_5 voorloopig onbepaalde constanten zijn.

§ 11. Ten einde deze grootheden te bepalen, hebben wij de voorwaarde, dat aan het oppervlak der bollen, dus voor $r = R_1$ en $r = R_2$, $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ moet zijn. Men kan nu de snelheden uitdrukken in $\frac{dI}{dr}$ en $\frac{d^2 I}{dr^2}$; het is

derhalve noodig, maar ook voldoende, dat deze differentiaalquotiënten voor $r = R_1$ en $r = R_2$ verdwijnen. Dit geeft vier betrekkingen tusschen de constanten C_1, C_2, C_3 en C_5, die in $\frac{dI}{dr}$ en $\frac{d_2 I}{dr^2}$ voorkomen, zoodat deze constanten juist bepaald kunnen worden. C_4 blijft onbepaald, maar deze grootheid is zonder invloed op de waarden van u_1, v_1, w_1.

Om de uitkomst in een eenvoudigen vorm te verkrijgen, gaan wij op de volgende wijze te werk. Daar $\frac{dI}{dr}$ en het differentiaalquotient ervan naar r voor $r = R_1$ en $r = R_2$ moeten verdwijnen, en $\frac{dI}{dr}$ blijken (20) eene algebraïsche rationeele functie van r is, moet zij den factor $(r - R_1)^2 (r - R_2)^2$ bevatten. Uit (20) volgt echter

$$\frac{dI}{dr} = \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left[\frac{1}{30} C_1 r^3 - \frac{1}{8} r^2 + 2 C_2 r + C_3 - \frac{C_5}{r^2}\right] \quad (21)$$

Klaarblijkelijk kan dus $\frac{dI}{dr}$ slechts den vorm

$$\frac{dI}{dr} = \frac{\eta}{r^2} (r - R_1)^2 (r - R_2)^2 (r + \vartheta) \quad (22)$$

hebben, waarin η en ϑ constanten zijn. Deze moeten nu zoo bepaald worden, dat (22) met (21) overeenstemt en daartoe is slechts noodig, dat bij de ontwikkeling van (21) de coëfficiënt van $\frac{1}{r}$ 0 en die van r^2 $-\frac{1}{8} \cdot \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$ wordt. Uit de eerste voorwaarde volgt

$$\vartheta = \frac{R_2 R_1}{2 (R_2 + R_1)}$$

en uit de tweede

$$\eta = \frac{1}{4} \cdot \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1 (R_2 + R_1)}{4 R_2^2 + 7 R_2 R_1 + 4 R_1^2)(R_2 - R_1)} \quad (23)$$

Hiermede hebben wij $\frac{dI}{dr}$, dus ook u_1, v_1, w_1 geheel bepaald. De uitkomsten stemmen volkomen overeen met die, welke OBERBECK voor de stroomingssnelheden verkrijgt, zoodat ik voor eene verdere discussie van den aard der beweging naar zijne verhandeling kan verwijzen.

§ 12. Ter bepaling van k_2 heeft men thans de uit (19) volgende vergelijking

$$\Delta k_2 = \frac{g e}{\varkappa h_0}\left(\frac{\partial^2 I}{d x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right),$$

waaraan, zoodra I_1 eenige functie van r is, die voldoet aan de vergelijking

$$\Delta I_1 = I,$$

voldaan wordt door

$$k_2 = \frac{g e}{\varkappa h_0}\left(\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2}\right).$$

Men mag echter ook stellen

$$k_2 = \frac{g e}{\varkappa h_0}\left[\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} + D_1(3 z^2 - r^2) + D_2\left(3\frac{z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \right.$$
$$\left. + D_3\frac{1}{r} + D_4\right],$$

daar toch de termen met de onbekende constanten D_1, D_2, D_3, D_4 0 opleveren, wanneer er de door Δ aangewezen bewerking op wordt toegepast. Men kan nu deze constanten bepalen uit de voorwaarde, dat voor $r = R_1$ en $r = R_2$ k_2 moet verdwijnen.

§ 13. Zijn aldus k_0 en k_2 bepaald, dan kan men de beide eerste termen berekenen in de uitdrukking voor de door S_1 per tijdseenheid verloren warmte. De eerste term is blijkens (11)

$$W_1 = -\frac{\varkappa h_0}{e}\int\frac{\partial k_0}{\partial n}\,d\,S_1 = \frac{4\,\pi\,\varkappa\,h_0\,q}{e}\cdot\frac{R_2\,R_1}{R_2 - R_1}$$

en de tweede

$$W_2 = -\frac{\varkappa\,h_0\,D^2}{e}\int\frac{\partial k_2}{\partial n}\,d\,S_1\,,$$

waarvoor men vindt

$$W_2 = \frac{1}{18}\,\pi\,g^2\,q\cdot\frac{D^2}{\mu}\cdot\frac{R_2^2\,R_1^2\,(R_2 - R_1)^3}{4\,R_2^2 + 7\,R_2\,R_1 + 4\,R_1^2}$$

Om te beoordeelen, in hoeverre deze term van beteekenis is, heeft men slechts de verhouding

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1}{72}\,\frac{g^2\,D^2}{\mu\,\varkappa\,T_0}\cdot\frac{R_2\,R_1\,(R_2 - R_1)^4}{4\,R_2^2 + 7\,R_2\,R_1 + 4\,R_1^2}$$

te beschouwen, waarin T_0 de aan h_0 beantwoordende absolute temperatuur is.

§ 14. Bij een der toestellen van KUNDT en WARBURG was R_1, de straal van den thermometerbol, die in een op 0^0 gehouden omhulsel afkoelde, 0,461 cM., R_2, de straal van het omhulsel zelf, 2,972 cM. Berekenen wij de waarde van $\frac{W_2}{W_1}$ voor dezen toestel in de onderstelling, dat hij bij 0^0 met lucht van 760 mM. spanning gevuld was. Dan is, wanneer wij het C. G. S. stelsel van eenheden bezigen,

$$D = 0{,}00129\,,$$
$$g = 981$$

en, daar het omhulsel op 0^0 werd gehouden,

$$T_0 = 273\,.$$

Verder is

$$\mu = 0{,}00017$$

terwijl de coëfficient der warmtegeleiding $=$ 0,000052 kan worden gesteld. Die coëfficient is daarbij echter in warmte-eenheden gegeven, terwijl in onze formules $\varkappa$ in arbeidseenheden moet uitgedrukt worden. Wij hebben dus te stellen

$$\varkappa = 0{,}000052 \times 42400 \times 981.$$

Door substitutie van de meêgedeelde waarden verkrijgt men

$$\frac{W_2}{W_1} = 0{,}0003\,,$$

zoodat bij dezen toestel, bij oneindig kleine temperatuurverschillen, de invloed der warmtestroomingen, zelfs bij de drukking van één atmospheer, onmerkbaar moet zijn. Dit neemt echter niet weg, dat in andere toestellen het tegendeel het geval kan zijn. Door R_2 grooter te kiezen, wordt $\frac{W_2}{W_1}$ grooter en wanneer dezelfde thermometerbol geplaatst was in een bolvormig omhulsel met een straal van 30 cM., zou

$$\frac{W_2}{W_1} = 0{,}7$$

worden en dus de invloed der warmtestroomingen, zelfs bij oneindig kleine temperatuurverschillen, zeer goed te bemerken zijn.

§ 15. Het is thans duidelijk dat, bij proeven als die van Kundt en Warburg, de invloed der warmtestroomingen volstrekt niet kan verklaard worden indien men het temperatuurverschil als oneindig klein beschouwt. Het is dan ook gemakkelijk aan te toonen, dat de snelheden, die bij deze proeven optreden, veel te groot zijn om nog van eene oneindig kleine evenwichtsverstoring te mogen spreken.

Om een oordeel over de grootte dier snelheden te verkrijgen, heb ik bij den toestel, waarvan in de vorige § sprake was, de waarde van de snelheid $w_1\,D$ berekend in een punt, dat in het horizontale vlak, door het middelpunt der bollen gebracht, op een afstand van 1 c.M. van het middelpunt

gelegen is. (Daarbij is ter vereenvoudiging $R_1 = 0,5$ en $R_2 = 3$ gesteld). Ik vind dan ongeveer

$$w_1 D = 0{,}04 \, \frac{D g}{\mu} \, q,$$

dus voor het geval van lucht met eene spanning (bij 0^0) van 1 atmospheer,

$$w_1 D = 300 \, q.$$

Reeds voor $q = \frac{1}{100}$, wat aan een temperatuurverschil van $2^0,73$ beantwoordt, zou dus deze snelheid 3 c.M. per secunde worden.

In het voor deze berekening gekozen punt is de snelheid grooter dan op de meeste andere plaatsen, maar men zal toch uit het resultaat kunnen besluiten dat, reeds bij temperatuurverschillen van eenige graden, snelheden kunnen optreden, die 1 c.M. per secunde overtreffen.

§ 16. Bij vraagstukken, waar de inwendige wrijving en de warmtegeleiding buiten spel blijven, b.v. bij de gewone geluidsbeweging in eene ruimte van groote afmetingen, mag men zulke snelheden zonder bezwaar als oneindig klein beschouwen. Zoodra echter, zooals hier, alles van de inwendige wrijving en de warmtegeleiding afhangt, is dat niet meer geoorloofd. Dit blijkt uit eene vergelijking van de grootte der termen, die wij in § 6 hebben verwaarloosd, met die, welke wij hebben behouden.

Beschouwen wij b. v. de grootheid S_x, die betrekking heeft op de hoeveelheid warmte, die per tijdseenheid door een vlak loodrecht op de x-as naar de eene zijde meer gaat dan naar de andere. In de volledige uitdrukking voor S_x komen voor de term

$$\tfrac{1}{2} \, \varrho u \, [\tfrac{5}{3} \, h + 2 \, \vartheta \, (h)],$$

die op de convectie der warmte, en de term

$$\frac{\varkappa}{e} \frac{\partial h}{\partial x},$$

die op de warmtegeleiding betrekking heeft. Wij hebben, na $h = h_0 (1 + k)$ gesteld te hebben, den term

$$\frac{1}{2} D u \,.\, \frac{1}{2} h_0 k$$

(wij laten eenvoudigheidshalve $\vartheta(h)$ buiten beschouwing) en daarmede de eigenlijke convectie buiten beschouwing gelaten; daarentegen den term

$$\frac{\varkappa h_0}{e} \frac{\partial k}{\partial x}$$

behouden.

Vergelijken wij deze beide termen. Wanneer ergens in de met gas gevulde ruimte $k = 0$ is en l eene lijn is van dezelfde orde als de afmetingen dier ruimte, is k van de orde $l \frac{\partial k}{\partial x}$, dus de verhouding der bovenstaande termen van de orde

$$\frac{D u l e}{\varkappa}.$$

Wil men nu dat de eerste term het tiende deel van den tweeden niet zal overtreffen, dan zal dus ongeveer

$$u < \frac{\varkappa}{10 D l e}$$

of

$$u < \frac{\varkappa T_0}{10 D l h_0}$$

moeten zijn. Voor lucht bij atmospheerische drukking en bij 0^0 C. wordt dit, als men $l = 5$ c.M. stelt,

$$u < 0{,}004 \text{ c.M. per sec.}$$

Het blijkt dus dat werkelijk kleine snelheden, ver beneden die welke bij temperatuurverschillen van eenige graden optreden, niet meer als oneindig klein beschouwd mogen worden.

De verkregen uitkomst maakt het zeer goed mogelijk dat zelfs bij de geluidstrillingen, die b.v. door eene stemvork opgewekt worden, de evenwichtsverstoring niet meer als oneindig klein mag worden opgevat, zoodra men wrijving en warmtegeleiding in rekening brengt. In hoeverre deze overweging kan bijdragen tot eene verklaring van de vertraging der geluidsgolven in nauwe buizen, zal ik later trachten te onderzoeken.

§ 17. Zoodra men de evenwichtsverstoring niet als oneindig klein mag aanmerken, wordt de oplossing van vraagstukken over de beweging der gassen zeer moeilijk. Men kan nu echter onderzoeken of het wellicht mogelijk is om, zonder die oplossing voor eenig geval uit te werken, toch aan te geven, hoe zij van verschillende omstandigheden afhangt.

Verbeelden wij ons, in eenig geval A, den bewegingstoestand van een gas, die aan de vergelijkingen (A_1), (B_1) en (C_1) en de grensvoorwaarden voldoet. Bepalen wij verder een tweeden bewegingstoestand B, voor eene andere gasmassa, op de volgende wijze. Laat bij B alle afmetingen α maal grooter zijn dan bij A, en verstaan wij onder overeenstemmende punten bij A en B die, waarvan de coördinaten zich verhouden als 1 en α. Op eene dergelijke wijze noemen wij overeenstemmende oogenblikken bij A en B die, waarvoor de tijden, sedert een vast oogenblik verloopen, tot elkander staan als 1 en β.

Eindelijk stellen wij ons voor dat, in eenig punt en op eenig oogenblik, bij B de snelheden u, v, w, γ-maal, de dichtheid δ-maal, het gemiddelde snelheidsquadraat ε -maal, en de grootheden $\mu, \frac{x}{e}$ en ν resp. η, ϑ, ζ-maal grooter zijn dan in het overeenkomstige punt en op den overeenkomstigen tijd in den toestand A. De grootheden α, β, γ, δ, ε, η, ϑ, ζ zijn daarbij constanten, en het is de vraag of men die zoo kan bepalen, dat ook de tweede bewegingstoestand mogelijk is, dus aan de bewegingsvergelijkingen voldoet.

Vooreerst blijkt nu uit (1) en (2), dat wanneer

$$\gamma = \sqrt{\varepsilon}$$

en

$$\alpha = \frac{\eta}{\delta \sqrt{\varepsilon}}$$

is, p_x, p_y, p_z, $q_{x,y}$, $q_{y,z}$, $q_{z,x}$ in B $\delta\,\varepsilon$-maal grooter zijn dan in A.

Uit (3) volgt eveneens, wanneer

$$\vartheta(h) = C h$$

is (C eene voor de beide gevallen even groote constante), dat, zoodra nog

$$\zeta = \eta$$

is, R in B $\delta\,\varepsilon$-maal grooter is dan in A.

Eindelijk vindt men uit (4), dat zoodra

$$\vartheta = \eta$$

is, S_x, S_y, S_z in B

$$\delta\;\varepsilon\;\sqrt{\varepsilon}$$

-maal grooter zullen zijn dan in A.

Uit de beschouwing der bewegingsvergelijkingen kan nu verder worden afgeleid dat, wanneer de versnellingen, door de uitwendige krachten veroorzaakt, bij B dezelfde moeten zijn als bij A,

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$$

en

$$\alpha = \varepsilon,$$

moet zijn, opdat ook de toestand B aan de bewegingsvergelijkingen voldoe.

De gevonden conditiën kunnen aldus worden samengevat

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \varepsilon,\quad \beta = \gamma &= \sqrt{\varepsilon}, \\ \eta = \zeta &= \vartheta, \\ \delta &= \frac{\eta}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (24)$$

Is aan deze voorwaarden voldaan, dan staan de hoeveelheden warmte, die in A en B door gelijkstandige oppervlakken per tijdseenheid passeeren, tot elkander als 1 tot $\eta \varepsilon^2$.

§ 18. De eerste vraag is nu, of men op deze wijze proeven kan vergelijken, waarbij hetzelfde gas met verschillende dichtheden in denzelfden toestel gebracht wordt tusschen oppervlakken, die in beide gevallen dezelfde temperaturen hebben. Dan zou $\alpha = 1$ en $\varepsilon = 1$, dus ook $\beta = \gamma = 1$ moeten zijn. Daar nu, bij gelijke temperatuur, de wrijvingscoëfficient niet verandert met de dichtheid, zou ook $\eta = 1$ moeten zijn, maar dan geeft onze laatste voorwaarde ook $\delta = 1$, zoodat de bedoelde toepassing niet mogelijk is. Men kan zelfs de dichtheid niet vergrooten, al wil men te gelijkertijd ook de afmetingen van den toestel wijzigen, zoolang ten minste de temperaturen dezelfde zullen blijven. Want uit dit laatste volgt $\varepsilon = 1$, hetgeen dan weder $\alpha = 1$ en $\delta = 1$ vereischt.

Wel kan men twee proeven vergelijken, waarbij hetzelfde gas, achtereenvolgens bij verschillende temperaturen en dichtheden, in toestellen van verschillende afmetingen, maar met elkander gelijkvormig, gebracht wordt, wanneer ten minste de coëfficienten μ, $\varkappa$ en ν op dezelfde wijze van de temperatuur afhangen, zoodat $\eta = \zeta = \vartheta$ is. Staan dan de absolute temperaturen in de beide toestellen tot elkander als 1 en ε, de afmetingen eveneens en de dichtheden als μ en $\frac{\mu'}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$ (waarbij μ en μ' de wrijvingscoëfficienten in de beide gevallen zijn) dan kan men door de boven meêgedeelde formules de stroomingssnelheden en de hoeveelheid overgevoerde warmte in het eene geval afleiden uit de waarden, die zij in het andere geval hebben.

Men kan ook proeven vergelijken, waarbij in verschillende toestellen verschillende gassen worden gebezigd, zoodat bij beiden dezelfde temperaturen voorkomen, ten minste, wanneer $\frac{\vartheta(h)}{h}$ bij beide gassen dezelfde waarde C heeft (m. a. w. wanneer bij beide gassen de verhouding der soortelijke warmte bij constanten druk en van die bij constant volume dezelfde

is) en wanneer de waarden van μ, $\frac{\varkappa}{e}$ en ν voor het eene gas uit die voor het andere door vermenigvuldiging met een zelfden van de temperatuur onafhankelijken factor worden verkregen (gelijk het geval is, wanneer de moleculen van beide gassen als veerkrachtige bollen beschouwd mogen worden). Die factor is dan de waarde van η, ζ en ϑ. Voor ε moet men klaarblijkelijk de omgekeerde verhouding der dichtheden van de gassen bij gelijken druk en gelijke temperatuur nemen, en de formules geven dan aan, hoe de afmetingen der toestellen en de dichtheden van het gas, waarmeê zij gevuld zijn, tot elkander moeten staan, om de beide gevallen geheel vergelijkbaar te maken.

Eindelijk ziet men gemakkelijk in dat, wanneer met twee verschillende gassen in denzelfden toestel geëxperimenteerd wordt, overeenkomstige gevallen zullen verkregen worden, wanneer men de temperaturen zoodanig regelt, dat in beide gevallen h dezelfde waarde heeft en wanneer de dichtheden evenredig met den wrijvings-coëfficient worden genomen.

§ 19. Natuurlijk kan men ook in andere vraagstukken over de beweging der gassen dergelijke beschouwingen over overeenstemmende bewegingstoestanden bezigen. Het verdient daarbij nog opmerking dat, zoodra van uitwendige krachten kan worden afgezien, de uit (B_1) volgende conditie $\alpha = \varepsilon$ wegvalt, waardoor eene ruimere toepassing van het beginsel mogelijk wordt.

Ten slotte zij het mij vergund op te merken, dat de bespreking van overeenstemmende bewegingstoestanden geheel onafhankelijk van de bewegingsvergelijkingen kan gemaakt worden, wanneer men de gasmoleculen als veerkrachtige bollen beschouwt, die geene aantrekking op elkander uitoefenen. Men kan dan op eene dergelijke wijze redeneeren als Dr. Kamerlingh Onnes bij de afleiding zijner »Algemeene vloeistoftheorie". Wanneer nl. een gas, dus een systeem veerkrachtige bollen, zich bewegen tusschen of rondom andere lichamen, die zelven zich kunnen bewegen of in rust zijn, kan men op verschillende wijzen andere bewegingstoestanden verkrijgen. Vooreerst kan men dezelfde plaatsveranderingen in

een tijd doen plaats hebben, die een zeker aantal malen grooter of kleiner is dan in den eersten toestand. Ten tweede is een bewegingstoestand mogelijk, waarbij het bewegelijke systeem op elk oogenblik gelijkvormig is met het systeem bij den eersten bewegingstoestand. De afmetingen der moleculen en die van de ruimte, waarin zij zich bewegen, zijn daarbij alle een zeker aantal malen vergroot of verkleind, en ook de bewegingssnelheden zijn in dezelfde verhouding veranderd. Eindelijk kan men nog, als een systeem een zekeren bewegingstoestand bezit, dezelfde bewegingen toekennen aan een tweede stelsel, dat zich van het eerste onderscheidt alleen doordat alle massa's in dezelfde verhouding zijn veranderd.

Werken er uitwendige krachten, zooals bij de in het voorgaande beschouwde warmtestroomingen, dan moet men in het oog houden dat, bij den overgang van den eenen bewegingstoestand tot den anderen, die krachten in het algemeen niet dezelfde moeten blijven.

RAPPORT OVER EENE VERHANDELING

VAN

Dr. T. J. STIELTJES Jr.,

GETITELD:

OVER LAGRANGE'S INTERPOLATIEFORMULE.

Uitgebracht in de Vergadering van 26 Nov. 1881.



De Commissie, in Uwe vergadering van 29 October ll. benoemd, ten einde rapport uit te brengen omtrent de aangeboden verhandeling van den Heer T. J. Stieltjes Jr : »Over Lagrange's interpolatieformule", heeft de eer het volgende mede te deelen.

De Schrijver stelt zich een onderzoek ten doel naar den restvorm der bekende interpolatieformule, en wel niet in de meest voorkomende gedaante eener bepaalde integraal, doch onder meer eenvoudigen vorm. En, evenals men veeltijds de rest van Taylor afleidt zonder van de hulpmiddelen der integraalrekening gebruik te maken, kan men hetzelfde voor den analogen restvorm der interpolatieformule verlangen. Zoodanige ontwikkeling wordt in het volgende gegeven.

Door middel eener eenvoudige hulpstelling: eene uitbreiding van het bekende theorema van Rolle, wordt die restvorm spoedig verkregen. Schrijver wijst op de overeenkomst van het resultaat met de genoemde reeks van Taylor, die nog meer uitkomt bij de behandeling van het interpolatieprobleem volgens Newton. Hij toont, naar aanleiding van diens onderzoekingen, aan, hoe eene functie $H(x)$ te vormen, het polynomium van laagsten graad, dat aan de voorwaarden voldoet; waarbij, naar aanleiding der door Newton ge-

volgde methode, eene meer algemeene gedaante wordt toegelaten dan LAGRANGE bezigde.

De rest, die aan dit polynomium moet worden toegevoegd om de waarde der gezochte functie te vinden, wordt opgemaakt en zoo algemeen mogelijk voorgesteld.

Een naschrift, waarbij wordt aangetoond dat slechts ééne functie $H(x)$ aan den eisch voldoet, laat, vooral aan het slot, aan duidelijkheid te wenschen over. Eene omwerking van dit deel schijnt zeer wenschelijk.

Wat de verdiensten der verhandeling betreft, het blijkt dat zij verschillende belangrijke uitkomsten bevat, meer dan in de inleiding beloofd wordt.

Als zoodanig kan men aangeven:

1⁰ de rest van de interpolatieformule van LAGRANGE (N⁰. 3);

2⁰ de algemeene definitieformule voor het n^e differentiaalquotient (N⁰. 4);

3⁰ den meer algemeenen vorm, aan het vraagstuk gegeven in het tweede gedeelte van N⁰. 5, en de rest voor dit geval (N⁰. 7);

4⁰ de algemeene formule voor den restvorm, in N⁰. 8 ontwikkeld, waaraan zich nog kan aansluiten de uitbreiding van het theorema van ROLLE, gegeven in N⁰. 2 en later in N⁰. 6.

In het algemeen kan gezegd worden, dat de verhandeling van het interpolatieprobleem eene heldere oplossing geeft. Zij getuigt van oorspronkelijkheid en gemakkelijkheid van behandeling.

De Commissie stelt daarom voor, de verhandeling in de werken der Akademie op te nemen, nadat de Schrijver van enkele opmerkingen van meer ondergeschikt belang zal hebben kennis genomen.

Amsterdam, 26 November 1881.

De Commissie voornoemd:
C. H. C. GRINWIS.
CH. M. SCHOLS.

De formule, welke Dr. Haga heeft geverifieerd, geldt alleen als de toestandsverandering isentropisch en omkeerbaar is, d. w. z. als, bij verlaging van temperatuur beneden de omgeving, door den draad geen warmte van buiten wordt opgenomen, en als de verandering van spanning zoodanig geschiedt, dat de draad elk oogenblik kan geacht worden in een toestand van evenwicht te verkeeren. De eerste voorwaarde is des te beter vervuld, naarmate de verandering der spanning korter duurt — de tweede daarentegen, naarmate die verandering langzamer geschiedt. Bij de proeven van den Schrijver duurde deze verandering der spanning ongeveer 2 sekunden. Ofschoon wij ons overtuigd houden dat, bij de omstandigheden der proeven, beide voorwaarden in voldoende mate vervuld waren, zou toch een opzettelijke bespreking van dit punt en een onderzoek, binnen welke grenzen de waargenomen temperatuursveranderingen onafhankelijk zijn van den tijdduur der verschuiving van de spannende gewichten, niet ongewenscht zijn geweest.

Wij zouden gaarne zien, dat, in geval de Akademie aan de conclusie van dit rapport hare goedkeuring schenkt, den Heer Haga afschrift van dit rapport toegezonden worde. Misschien geeft hem dit nog aanleiding, enkele woorden omtrent dit onderwerp aan zijne verhandeling toe te voegen.

Amsterdam, November 1881.

J. D. VAN DER WAALS.
D. J. KORTEWEG.

Maar ofschoon deze grootheden afhangen van den meerderen of minderen graad van spanning van den draad, en dus de bij gewone omstandigheden bepaalde waarde dezer grootheden niet volkomen gelijk zal zijn aan de veranderlijke waarde, welke in de formule zal moeten gebezigd worden, zijn er gronden te over bij te brengen om aan te nemen, dat daardoor zulk een groot verschil niet kan worden verklaard.

Daarom heeft de Heer HAGA het wenschelijk geacht, door nieuwe proeven te trachten de zaak tot klaarheid te brengen.

De temperatuursverandering der sterker of minder sterk gespannen draden werd door hem, evenals door JOULE en EDLUND, thermoëlectrisch bepaald. De sterkte der thermostroomen werd gemeten door een THOMSON'schen galvanometer met kleinen weerstand, en wel werd de terugwerpingsmethode gebezigd. Daar de voorwaarden, waaronder deze methode onveranderd kan toegepast worden, niet geheel vervuld waren, moest de grootte der door het temperatuurverschil teweeggebrachte afwijking, op andere wijze dan zulks bij deze methode gewoonlijk geschiedt, uit de waarnemingen worden opgemaakt. De daarvoor benoodigde formules zijn door Dr. KAMERLINGH ONNES berekend.

De waarnemingen van den Schrijver loopen over staaldraad en nieuwzilverdraad. Van beide stoffen zijn ook de uitzettingscoëfficiënt in gespannen toestand en de specifieke warmte bepaald geworden.

De overeenstemming der verschillende uitkomsten toont, dat de waarnemingen zeer nauwkeurig en de gevolgde methoden aanbevelenswaard zijn.

En de slotsom der waarnemingen is, dat er behoorlijke overeenstemming is tusschen de temperatuursveranderingen, welke door haar geleverd en die welke uit de formule worden berekend.

Wij hebben de overtuiging gekregen, dat deze waarnemingen een belangrijke arbeid mogen genoemd worden, en adviseeren de Akademie, deze verhandeling van Dr. HAGA voor hare werken aan te nemen.

Toch willen wij een enkele opmerking niet terughouden.

De formule, welke Dr. HAGA heeft geverifieerd, geldt alleen als de toestandsverandering isentropisch en omkeerbaar is, d. w. z. als bij verlaging van temperatuur beneden de omgeving, door den draad geen warmte van buiten wordt opgenomen en als de verandering van spanning zoodanig geschiedt dat de draad elk oogenblik kan geacht worden in een toestand van evenwicht te verkeeren. De eerste voorwaarde is des te beter vervuld, naarmate de verandering der spanning korter duurt — de tweede daarentegen, naarmate de verandering langzamer geschiedt. Bij de proeven van den Heer HAGA duurde deze verandering der spanning ongeveer [illegible] sekonde. Ofschoon wij ons overtuigd houden dat, bij de omstandigheden der proeven, beide voorwaarden in [illegible] mate vervuld waren, zou toch een opzettelijke bespreking van dit punt en een onderzoek, binnen welke grenzen de waargenomen temperatuursveranderingen onafhankelijk zijn van den tijdduur der verschuiving van de spannende gewichten niet ongewenscht zijn geweest.

Wij zouden gaarne zien, dat, in geval de Akademie aan de conclusie van dit rapport hare goedkeuring schenkt, den Heer HAGA afschrift van dit rapport toegezonden worde. Misschien geeft hem dit nog aanleiding, enkele woorden omtrent dit onderwerp aan zijne verhandeling toe te voegen.

Amsterdam, November 1831.

J. D. VAN DER WAALS.
D. J. KORTEWEG.

BEPALING

VAN DE

TEMPERATUURSVERANDERINGEN BIJ SPANNEN EN ONTSPANNEN VAN METAALDRADEN,

EN VAN HET

MECHANISCH AEQUIVALENT DER WARMTE.

DOOR

H. HAGA.

Uit het principe van CARNOT leidde in 1851 THOMSON de grootte der temperatuursveranderingen af, die op moeten treden wanneer de drukking op een lichaam plotseling gewijzigd wordt of wanneer — in een bizonder geval — een vast cilindervormig lichaam in de richting der as eene drukking of uitrekking ondervindt.

Is in dit geval

P de verandering van drukking op een vast lichaam, waarvan
α de uitzettingscoëfficiënt,
c de soortelijke warmte,
w het gewicht der lengte-eenheid is,
zoo is bij eene temperatuur τ de temperatuursverandering

$$\vartheta = -\frac{(273 + \tau)\,\alpha\, P}{A\, w\, c}$$

waarin A het mechanisch aequivalent der warmte voorstelt.

Reeds voordat JOULE de formule van THOMSON voor water en walvischtraan bevestigd vond, deed hij proeven met vaste lichamen: metalen, houtsoorten, caoutchouc *).

*) *Proceedings R. Soc.* vol. 8, pg. 355, 1857. *Phil. Trans.* 1859, deel 149.

De metalen werden als cilinders gebruikt van 3 d.M. lang en 6 m.M. diameter; het boveneinde was stevig bevestigd en het benedeneinde verbonden aan een hefboom, op welks uiteinde gewichten geplaatst konden worden. Om de temperatuursveranderingen te meten, werden op tegenovergelegen zijden der staaf een dun ijzer- en koperdraadje gebonden, of in een klein gaatje, door het midden der staaf geboord, de beide draadjes gezamenlijk doorgestoken. De andere uiteinden stonden met een gevoeligen galvanometer in verbinding. Om den uitslag in graden CELSIUS te meten, ging JOULE aldus te werk *): »Immediately after each experiment on the effect of tension, the thermometric value of the deflection was ascertained by immersing the bar to within one third of an inch of the junction in water of different temperatures. The deflections thus produced were about two thirds occasioned by the same changes of temperature when the junction was completely immersed. The diminishing effect in the former case is owing for the most part to the conduction of heat from the air by the thermo-electric wires. The experiments on tension were liable to be affected in the same way, but they were not subject to the loss arising from the conduction of heat from the surface of the bath to the junction. The error intervening from this latter circumstance could not be great and was moreover in all probability almost exactly neutralised by a small error in the tension experiments, arising from the escape of $\frac{1}{14}$ of the thermal effect from the quarter inch bars during the 40 sec., occupied by the swing of the needle."

M. i. zijn deze bepalingen niet vrij voor bedenkingen †); en te verklaren is het dat, al werd de formule van THOMSON in het algemeen bevestigd, eenig verschil bleef bestaan tusschen de waargenomen en berekende temperatuursveranderingen. Bij de uitrekkings-proeven waren de waargenomen veranderingen allen *grooter* dan die, welke berekend waren met

---

*) *Phil. Trans.* 1859, pg. 98.

†) Vergelijk: VERDET, *Théorie mécanique de la chaleur*, pg. 220—224.

$A = 425$; het mechanisch aequivalent zou dus uit deze proeven *kleiner* gevonden zijn dan 425.

Bij de proeven waarbij de metalen werden samengedrukt — soms door eene hydraulische pers — vielen de berekende waarden soms te groot, soms te klein uit, maar vrij aanzienlijke verschillen waren nog voorhanden *).

Verdet ziet den grond der afwijkingen in de onnauwkeurige waarde van den uitzettingscoëfficiënt, die afhankelijk kan zijn van de spanning.

In 1865 heeft Edlund over hetzelfde onderwerp proeven genomen †); verschillende metaaldraden werden gespannen en ontspannen; een thermoëlement, uit 2 metalen bestaande, diende voor de bepaling der temperatuursveranderingen, waartoe de draden tusschen de beide metalen geklemd werden. Edlund vond, bij 6 verschillende metalen, dat de relatieve waarden der temperatuursveranderingen zich wel door de formule van Thomson lieten voorstellen, maar dat dit met de absolute waarden niet het geval was. Uit de waargenomen temperatuursverandering bij staaldraad werd gevonden

$$A = 682.7 .$$

Deze uitkomst wil Edlund door inwendigen arbeid verklaren.

Rühlmann komt hiertegen op §); trouwens, inwendige arbeid kan de goede verklaring niet zijn, daar Thomson zijne formule uit een kringproces afgeleid heeft, waar men onafhankelijk is van inwendigen arbeid. Verder gaat Rühlmann na den invloed van eene onjuiste waarde van den uitzettingscoëfficiënt; nu hebben echter proeven van Dahlander **) bewezen dat bij metalen α toeneemt bij vermeerdering der spanning; eene grootere waarde van α zou A nog grooter maken. Eindelijk geeft Rühlmann de redenen op waarom het

*) Vergelijk o. a. Rühlmann, *Handbuch der mech. Wärmetheorie* I. pg. 521.

†) Pogg. *Ann.* Bd. 126, pg. 539.

§) l. c. pg. 529.

**) Pogg. *Ann.* Bd. 145, pg. 147.

niet waarschijnlijk is dat de soortelijke warmte van metalen in gespannen eene andere is als in ongespannen toestand, en is van meening dat alleen nieuwe proeven de vraag kunnen beslissen of de metalen zich aan de mechanische warmtetheorie onttrekken. Te dien einde heb ik, evenals EDLUND, metaaldraden gekozen, de temperatuursveranderingen bij spannen en ontspannen gemeten, en tevens van dezelfde draden den uitzettingscoëfficiënt in gespannen toestand en de soortelijke warmte bepaald.

I. TEMPERATUURSVERANDERINGEN BIJ SPANNEN EN ONTSPANNEN.

a. Methode.

De toestel, waardoor de draden gespannen konden worden, is in Fig. 1 afgebeeld: het houten blok en het koperen stuk werden in de tafel vastgeschroefd; in het koperen stuk bevonden zich stalen schroeven, wier kegelvormige uiteinden de horizontale as vormden, waarom de hefboom draaibaar was; de korte (10,5 c.M.) vertikaal geplaatste arm was een klem, waarin een ebonieten cilinder, welks as doorboord was, bevestigd werd; door deze opening en door eene gleuf in het houten blok ging de draad, die door twee op hem gesoldeerde koperen blokjes voldoende bevestigd kon worden.

De horizontale plaatsing van den draad was gekozen om eene gelijkmatige temperatuur te kunnen verkrijgen, hetgeen door een dak van watten, dat aan alle zijden op de tafel rustte, volkomen bereikt werd.

Door nu gewichten langs den langen (60 c.M.) hefboomsarm te verschuiven, werd de spanning veranderd; de grootte der verschuiving, kon geregeld worden door op den arm een koperen klem vast te schroeven. De gewichten werden dan van deze klem tot het uiteinde, of omgekeerd, verschoven, zoodat de draad tevens strak bleef.

De temperatuursveranderingen, die bij het spannen en ontspannen plaats grepen, moesten gemeten worden. Daartoe

werd een zeer dun draadje van een metaal, dat een groot thermo-electrisch verschil met den hoofddraad had, 2-maal om dezen gewonden; op deze contactplaats ontstond dus temperatuursverandering, die een thermostroom zal opwekken, indien men een der uiteinden van den hoofddraad met het dunne draadje verbindt, en welks sterkte bepaald kan worden door een galvanometer in den keten te voegen (Fig. 2). Om uit de afwijking (p) van den galvanometer de temperatuursverandering (ϑ) te vinden, moeten 2 grootheden bepaald worden:

1°. r de weerstand van den geheelen keten; dan is $p \times r$ de afwijking, in geval de weerstand 1 Siemens bedragen had.

2°. E de afwijking die, in geval de weerstand 1 $S.$ ware, een temperatuursverschil van 1° C. in de contactplaats zou veroorzaken; dan is:

$$\vartheta = \frac{p \times r}{E}.$$

De galvanometer was een van THOMSON, met kleinen weerstand; door het plaatsen van magneten werd de astasie verhoogd, zoodat de slingertijd (T) ongeveer 6 sec. bedroeg; daardoor was het mogelijk voor de bepaling van r de terugwerpingsmethode te gebruiken. Een kleine magneet-inductor werd in de geleiding gevoegd, alsmede een weerstandsbank; bij de terugwerpingsmethode kunnen de groote en kleine boog a en b met groote nauwkeurigheid bepaald worden; het logarithmisch decrement λ $\left(e^{\lambda} = \frac{a}{b}\right)$ en daarmede

$$\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \, e^{-\frac{\lambda}{\pi} \, bg \, tg \, \frac{\lambda}{\pi}}$$

kunnen berekend worden; nu is deze uitdrukking evenredig met de intensiteit van de inductiestroomen, door de beweging

van den magneet opgewekt *); bepaalt men dus a en b, als de weerstand $= r$ is, en daarna, door bijvoeging van 1 S., bij een weerstand $= r + 1$, dan is, door in beide gevallen bovenstaande uitdrukking te berekenen, de verhouding der weerstanden, en dus r, in SIEMENS-eenheden bekend. Wilde men echter a en b met eene nauwkeurigheid van minder dan ½ pCt. kennen, zoo moest de objectieve aflezing, die gewoonlijk bij THOMSON's galvanometer gebruikt wordt, door eene subjectieve vervangen worden; zonder het holle spiegeltje door een vlak te vervangen, kon men dit bereiken door een kleinen kijker (11 c.M. lang) te gebruiken, bestaande uit objectief ($f = 12{,}3$ c.M., opening 4,5 c.M.) en oculair ($f = 25{,}8$ c.M.), tusschen welke een cocondraad gespannen was; het kijkertje werd iets verder van den galvanometer geplaatst dan eene in m.M. verdeelde glazen schaal, wier beeld men scherp kon waarnemen, zoodat de aflezing tot op $^1/_{10}$ m.M. volkomen zeker was.

Ter bepaling van E (zie fig. 3) werd het dunne draadje op den hoofddraad gesoldeerd, en vooreerst deze zoowel als de overige contactplaatsen: hoofddraad en dun draadje, met de geleiddraden naar den galvanometer, door ze in een groot glas water van de kamertemperatuur te plaatsen, op dezelfde temperatuur (τ) gehouden; de weerstand (R) van den keten werd bepaald; daarna werd de contactplaats: hoofddraad — dun draadje, door smeltend ijs omgeven; ten einde de afwijkingen binnen de grenzen der schaal te houden, werd een bepaald aantal (S) S-eenheden ingevoegd.

Is de afwijking in dit geval u, zoo is

$$E = \frac{u\ (S + R)}{\tau}$$

Deze bepaling van E levert dus geen bezwaar op; anders is het met de eerst besproken grootheid: de afwijking p. Uit den eersten uitslag kan men n.l. wel met het logarith-

---

*) Zie WEBER: *Maassbestimmungen* ook WIEDEMANN II, 1, pag. 250.

misch decrement den blijvenden uitslag afleiden voor *constante* stroomen, maar de in ons geval optredende thermostroom is dit niet door twee oorzaken:

Vooreerst geschiedt de verschuiving der gewichten niet plotseling, en even lang als deze verschuiving duurt, verandert de evenwichtsstand, en vervolgens zal door geleiding en straling, zoodra er temperatuursverandering plaats grijpt, deze weder verminderen. Hierdoor en door den vrij korten slingertijd, schommelt de naald een paar maal heen en weer, en keert dan langzaam tot den oorspronkelijken stand terug. Men kan nog de drie eerste omkeerpunten x_1, x_2 en x_3 nauwkeurig waarnemen, benevens den evenwichtsstand op bepaalde oogenblikken gedurende het langzaam terugkeeren. Uit deze waarnemingen kan men p bepalen op de volgende wijze, mij door Dr. H. Kamerlingh Onnes aan de hand gedaan:

Het verschuiven der gewichten liep steeds in minder dan 2 sec. af; de schommeltijd van den magneet was ongeveer 6 sec.; heeft dus de magneet den eersten uitslag bereikt, zoo zal daarna zijne beweging volkomen voorgesteld worden door de differentiaalvergelijking, door Edlund opgesteld *):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -mx + q\frac{v}{wc} - 2n\frac{dx}{dt},$$

waarin m de richtkracht, $2n$ de kracht van demping bij snelheid $= 1$, q de kracht, die een thermostroom als $\frac{v}{wc} = 1$ is op den magneet uitoefent, voorstellen, allen gedeeld door het traagheidsmoment. Hierbij is v de hoeveelheid opgewekte warmte in den draad, welks gewicht w en soortelijke warmte c is, zoodat $\frac{v}{wc}$ de temperatuursverandering voorstelt. De verandering van v, door geleiding en uitstraling, kan met de temperatuursverandering zelve evenredig gesteld worden, dus:

*) l. c. pag. 546.

$$d v = - a \frac{v}{w c} d t$$

waardoor :

$$v = v_0 e^{-\frac{a t}{w c}}.$$

Deze waarde in de differentiaal-vergelijking stellende en integreerende, krijgt men:

$$x = \frac{C}{h^2 - 2 hn + m} \left(e^{-ht} + \frac{h-n}{l} \sin l t e^{-nt} - \cos l t e^{-nt} \right)$$

waarin $C = \frac{q v_0}{w c}$ $l = \sqrt{m - n^2}$ en $h = \frac{a}{w c}$.

Hieruit vindt men voor de omkeertijden:

$$\sin l T e^{-n T} = \frac{h l}{m - h n} (e^{-h T} - \cos l T e^{-n T})$$

en voor de omkeerpunten:

$$x = \frac{C}{m - h n} (e^{-h T} - \cos l T e^{-n T}).$$

Nu is h — de temperatuursafname (+ of —) in 1 sec. als het temperatuursverschil 1° C. bedraagt — zeer klein, bij mijne proeven 0.01, zoodat h^2 verwaarloosd mag worden.

Stel nu dat voor $h = 0$ de omkeertijden T_0, $2 T_0$ enz. gevonden zijn uit de vergelijking $\sin l T_0 e^{-n T_0} = 0$.

Voor de eerste omkeering zou dan $\cos l T_0 = -1$

» » tweede » » » $= +1$

enz.

Komt nu (daar h niet $= 0$) bij T_0 $d T_1$
$2 T_0$ $d T_2$
enz.

en voldoen T_1, T_2 enz. aan de vergelijking dan moet ook:

$$\frac{d \sin l\, T_1\, e^{-n T_1}}{d\, T_1} d\, T_1 = \frac{h\, l}{m - h\, n} (1 - \cos l\, T_1\, e^{-n T_1})$$

evenzoo voor T_2 enz. of:

$$d\, T_1 = - \frac{h}{m - h\, n} (1 + e^{-n T_1})\; e^{n T_1}$$

$$d\, T_2 = \frac{h}{m - h\, n} (1 - e^{-n T_2})\; e^{n T_2}$$

$$d\, T_3 = - \frac{h}{m - h\, n} (1 + e^{-n T_3})\; e^{n T_3}$$

Met deze waarde van T_1 gaat

$$x = \frac{C}{m - hn} (e^{-h T_0} - \cos l\, T_0\, e^{-n T_0})$$

over in

$$x + \frac{d\, x}{d\, T_1} d\, T_1;$$

evenzoo met T_2 en T_3, waardoor men na herleiding voor de omkeerpunten verkrijgt:

$$x_1 = \frac{C}{m} \left\{ (1 + e^{-n T_1}) \left(1 + \frac{2\, n\, h}{m}\right) - (1 - e^{-h T_1}) \right\}$$

$$x_2 = \frac{C}{m} \left\{ (1 - e^{-n T_2}) \left(1 + \frac{2\, n\, h}{m}\right) - (1 - e^{-h T_2}) \right\}$$

$$x_3 = \frac{C}{m} \left\{ (1 + e^{-n T_3}) \left(1 + \frac{2\, n\, h}{m}\right) - (1 - e^{-h T_3}) \right\}$$

De omkeerpunten voor $h = 0$ X_1, X_2 en X_3 noemende:

$$X_2 - X_1 = \left\{ (x_2 - x_1) + (e^{-h T_1} - e^{-h T_2}) \frac{C}{m} \right\} \left(1 - \frac{2\, n\, h}{m}\right)$$

$$X_3 - X_1 = \left\{(x_3 - x_1) + (e^{-hT_1} - e^{-hT_3})\frac{C}{m}\right\}\left(1 - \frac{2nh}{m}\right)$$

Zijn dus h, C, m, n, en T bekend, zoo kan men berekenen hoeveel bij $x_2 - x_1$ en $x_3 - x_1$ gevoegd moet worden om $X_2 - X_1$ en $X_3 - X_1$ te verkrijgen. Uit deze kan men berekenen hoe ver de evenwichtsstand (X) van x_1 verwijderd is op het oogenblik van den eersten uitslag. Deze evenwichtsstand moet dan nog twee verbeteringen ondergaan:

1° Voor de afkoeling (+ of —) gedurende T_1.

2° Wegens den tijd t' dat het spannen en ontspannen duurt.

Is de evenwichtsstand op elk oogenblik x_e dan is bij gelijkmatige snelheid van uitrekking (+ of —) en bij afkoeling (+ of —) volgens geometrische wet:

$$\frac{dx_e}{dt} = s - hx_e$$

waarin $s = \frac{p}{t'}$, daar p de afwijking voorstelde; integreerende:

$$x_e = \frac{p}{ht'} + \text{const } e^{-ht}$$

voor $t = 0$ is $x_e = 0$ dus const $= -\frac{p}{ht'}$ zoodat

$$x_e \text{ na } t' \text{ sec } = \frac{p}{ht'}(1 - e^{-ht'})$$

en

$$\text{na } t \text{ sec} = \frac{p}{ht}(1 - e^{-ht})$$

of

$$= \frac{p}{ht'}(1 - e^{-ht'})e^{-h(t-t')}$$

dus bij het eerste omkeeren van den magneet

$$X = \frac{p}{h\,t'}(1 - e^{-h\,t'})\,e^{-h\,(T_1 - t')}$$

of

$$X = p\left(1 - \frac{h\,t'}{2}\right)(1 + h\,t')\,e^{-h\,T_1}$$

of ook:

$$X = p\left(1 + \frac{h\,t'}{2}\right)e^{-h\,T_1}$$

dus:

$$p = X\left(1 - \frac{h\,t'}{2}\right)e^{h\,T_1}$$

Als eerste benadering kan $T_1 = T_0 + \frac{t'}{2}$ gesteld worden zoodat ten slotte:

$$p = X\,e^{h\,T}$$

Evenzoo zijn in de uitdrukkingen voor $X_2 - X_1$ en $X_3 - X_1$, in plaats van T_1, T_2 en T_3 respective T, $2\,T$, $3\,T$, — de gewone slingertijd — gebruikt.

Blijven ter bepaling over: h, C en T, daar m en n uit het logarithmisch decrement λ en T te berekenen zijn:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{m - n^2}} \qquad \lambda = n\,T.$$

Om h te bepalen, werden gedurende het langzaam terugkeeren tot den oorspronkelijken stand op bepaalde oogenblikken aflezingen gedaan; heeft men op de tijden t_1 en t_2 de afwijkingen x' en x'' waargenomen, zoo is

$$x' = C\,e^{-h\,(t_1 - t)} \qquad x'' = C\,e^{-h\,(t_2 - t)},$$

waarin t het oogenblik der eerste omkeering is. Hieruit vindt men:

$$h = \frac{\log x' - \log x''}{(t_2 - t_1)\log e}$$

C of $\frac{C}{m}$ vindt men uit de uitdrukkingen voor x_2 en x_1; door aftrekking verkrijgt men:

$$\frac{C}{m} = \frac{x_1 - x_2}{\left(1 + \frac{2\,n\,h}{m}\right)(e^{-n T_1} + e^{-n T_2}) + (e^{-k T_1} - e^{-k T_2})}.$$

T eindelijk werd op bekende wijze gevonden: de terugwerpingsmethode kon hiervoor dienen, door op een bepaald oogenblik den inductiestoot te geven, eenige malen terug te werpen en het oogenblik te bepalen waarop de magneet door den evenwichtsstand gaat. Uit het aantal malen, dat teruggeworpen is, vindt men gemakkelijk T.

b. Proeven.

1. Staaldraad.

De gebezigde staaldraad had een diameter van 1.6 m.M.; als dun draadje werd eerst nieuw-zilverdraad met een diameter van 0.105 m.M. gebruikt en hiermede op 2 dagen proeven genomen; vooral op den tweeden dag veranderde de weerstand nog al bij spannen en ontspannen ten gevolge der stugheid van het nieuwzilver; daarom werd een platinadraadje (diameter 0.08 m.M.) gekozen, waarmede, niettegenstaande het kleinere thermoëlectrisch verschil, toch beter onderling overeenkomende resultaten verkregen werden.

Als voorbeeld diene de volgende proef, de eerste van 26 Sept. 1880:

1°. Rustpunt galvanometer: 103.8

Door verschuiven der gewichten werd de draad gespannen; er ontstond afkoeling en als omkeerpunten werden waargenomen:

x_1	171.0	waaruit:	eerste uitslag:	67.2
x_2	138.3		$x_2 - x_1$	32.7
x_3	147.7		$x_3 - x_1$	23.3

2°. Gedurende het langzaam terugkeeren waren:

125.0 . . . 120.0 . . . 116.0 de evenwichtsstanden resp.
70^s. . . . 95^s.5 . . . 121^s. na het bereiken van den eersten uitslag.

3°. Met de terugwerpingsmethode werd gevonden:

$$a = 169.8$$
$$b = 71.1$$

en na invoegen van 1 S.

$$a = 88.6$$
$$b = 40.3$$

4°. de slingertijd was: 6^s.44.

Hieruit werden berekend:

Uit 2° en de gelijksoortige op denzelfden dag

$$h = 0.0114$$

Uit 3° $\quad r = 1.067$ S.

Met de waarde van λ:

$$\log m = 9.40663$$
$$\log n = 9.12552$$

en nu:

$$e^{-nT_1} = 0.4227 \qquad e^{-hT_1} = 0.9291$$
$$e^{-nT_2} = 0.1787 \qquad e^{-hT_2} = 0.8633$$
$$\frac{2hn}{m} = 0.01 \qquad e^{-hT_3} = 0.8021$$

waaruit:

$$\log \frac{C}{m} = 1.6856$$

$$X_2 - X_1 = 29.2 \qquad X_3 - X_1 = 17.0,$$

gevende als afstanden van X tot x_1 op het oogenblik van den eersten uitslag resp. *)

20.5 20.6

---

*) Hierbij werd de reeds bekende waarde van λ gebruikt.

zoodat:

$$X = 67.2 - 20.55 = 46.65.$$

Door deze waarde met $e^{hT} = 1.076$ te vermenigvuldigen:

$$p = 50.20$$

gereduceerd tot weerstand = 1 S.

$$p \times r = 53.55.$$

Door proeven, den volgenden dag, werd E, de uitslag dien een temperatuursverschil der contactplaats van 1° C. bij weerstand 1 S. geeft = 528 gevonden dus:

$$\vartheta = \frac{53.55}{528} = 0^{0}.1042$$

de waargenomen temperatuursverlaging.

Na deze eerste proef werden de gewichten teruggeschoven, waardoor de draad dus ontspannen werd en zulks werd eenige malen herhaald. Van de proeven en de uit deze berekende waarden zijn de voornaamste data in de onderstaande tabellen te vinden:

TABEL I.

SPANNEND GEW. 21.715 KILO. 26 Sept. 1880. TEMPERATUUR 17°.1.

Nommer.	Aard der proef.	Eerste uitslag.	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	a.	b.	1 Siemens ingevoegd.	
							a.	b.
1	Spannen	67.2	32.7	23.3	169.2	71.0	88.6	40.3
2	Ontspannen	68.1	32.7	23.8	167.8	70.6		
3	Spannen	66.8	32.4	22.9	166.7	70.3	87.6	40.2
4	Ontspannen	67.3	32.7	24.0	164.4	69.5	86.6	39.7
5	Spannen	65.0	31.6	22.2	165.0	69.9		
6	Ontspannen	66.5	32.3	23.8	163.15	69.65		
7	Spann n	64.4	31.8	20.4	163.15	69.65		
8	Ontspannen	66.0	32.5	23.9	162.1	69.2		

waaruit met behulp der reeds opgegeven waarden berekend werd:

TABEL 2.

Nommer.	$log \frac{C}{n}$.	X_2—X_1 en afstand van X tot x_1.		X_3—X_1 en afstand van X tot x_1.		$p = X e^{\lambda T}$.	Weerstand r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.68563	29.2	20.5	17.0	20.6	50.2	1.096	0.1042
2	1.68563	29.2	20.5	17.5	21.0	50.9	1.089	0.1050
3	1.68163	28.9	20.3	16.6	20.3	50.0	1.104	0.1046
4	1.68563	29.2	20.5	17.7	21.1	50.0	1.110	0.1050
5	1.67077	28.2	19.8	16.1	19.7	48.8	1.102	0.1018
6	1.68028	28.8	20.2	17.5	20.9	49.4	1.114	0.1043
7	1.67351	28.4	20.0	14.3	18.5	48.6	1.114	0.1026
8	1.68296	29.0	20.4	17.6	21.0	48.7	1.117	0.1030
							Gem.	0.1038

Het nieuwzilverdraadje werd iets verschoven; het spannend gewicht bleef hetzelfde.

TABEL 3.

27 Sept. 1880. TEMPERATUUR 17°.0.

Nommer.	Aard der proef.	Eerste uitslag.	x_2—x_1.	x_3—x_1.	a.	b.	1 Siemens ingevoegd. a.	1 Siemens ingevoegd. b.
1	Spannen	65.7	30.7	21.0	159.4	67.7	85.3	39 0
2	Ontspannen	64.0	30.2	21.1	152.8	65.4	83.3	38 3
3	Spannen	56.7	26.4	17.4	145.3	62.8		
4	Ontspannen	64.6	30.2	21.7	156.1	66.7		
5	Spannen	57.3	26.4	17.7	150.0	64.4		
6	Ontspannen	65.8	30.7	21.8	157.8	67.4		

$$h = 0.0093 \quad T = 6^s.44$$

waaruit:

$$e^{-nT_1} = 0.4281 \quad e^{-hT_1} = 0.9418$$
$$e^{-nT_2} = 0.1833 \quad e^{-hT_2} = 0.8870$$
$$\frac{2\,h\,n}{m} = 0.0096 \quad e^{-hT_3} = 0.8353$$
$$log\, n = 9.11904 \quad log\, m = 9.40575$$

Hiermede:

TABEL 4.

Nommer.	$log \frac{C}{m}$.	X_2—X_1 en afstand van X tot x_1.		X_3—X_1 en afstand van X tot x.		$p = X e^{hT}$.	Weerstand r.	$\vartheta = \frac{pXr}{E}$.
1	1.65971	27.9	19.55	15.95	19.55	49.0	1.15	0.1065
2	1.65258	27.5	19.25	16.15	19.65	47.35	1.20	0.1072
3	1.59417	24.0	16.8	13.05	16.35	42.6	1.26	0.1016
4	1.65258	27.5	19.25	16.75	19.95	47.8	1.73	0.1061
5	1.59417	24.0	16.8	13.35	16.55	43.1	1.22	0.1012
6	1.65971	27.9	19.55	16.75	20.1	48.85	1.16	0.1069
							Gem.	0.1049

Daarna werd op de bovenvermelde wijze E bepaald; de weerstand $R = 4.08\ S$.

TABEL 5.

Bijgevoegde weerstand S.	Temperatuur van het water τ.	Dubbele uitslag $2u$.	Dubbele uitslag voor 1 S. per 1° C.
150	17.6	121.45	1063.3
170	17.5	107.2	1066.4
270	17.4	66.9	1054
130	17.3	135.15	1047
110	17.2	158.6	1052

Gem. 1056 dus $E = 528$.

In plaats van het nieuwzilverdraadje werd nu het dunne platinadraadje genomen.

TABEL 6.

30 Sept. 1880. TEMPERATUUR 16°.7

Nommer.	Aard der proef.	Eerste uitslag.	x_2-x_1.	x_3-x_1.	*a*.	*b*.	1 Siemens ingevoegd. *a*.	1 Siemens ingevoegd. *b*.
1	Spannen	48.2	22.4	16.4	166.5	68.3	76.1	35.3
2	Ontspannen	48.4	22.4	16.7	166.4	68.7		
3	Spannen	46.5	21.8	16.0	165.5	68.4		
4	Ontspannen	48.4	22.8	17.0	166.1	68.6		
5	Spannen	46.7	21.8	16.0	165.1	68.1		
6	Ontspannen	48.2	22.6	17.0	166.0	68.3	76.3	35.5

$h = 0.0117 \qquad T = 6^s.55$

$log\, n = 9.13101 \qquad log\, m = 9.39503$

$e^{-nT_1} = 0.4125 \qquad e^{-hT_1} = 0.9202$

$e^{-nT_2} = 0.1701 \qquad e^{-hT_2} = 0.8467$

$\frac{2hn}{m} = 0.014 \qquad e^{-hT_3} = 0.7791$

TABEL 7.

Nommer.	$log \frac{C}{m}$.	X_2-X_1 en afstand van X tot x_1.		X_3-X_1 en afstand van X tot x_1.		$p = Xe^{hT}$.	Weerstand r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.52839	19.65	13.9	11.5	13.85	37.3	0.843	0.1066
2	1.52839	19.65	13.9	11.8	14.1	37.4	0.843	0.1069
3	1.51660	19.15	13.55	11.2	13.5	35.85	0.852	0.1036
4	1.53607	20.0	14.15	12.0	14.35	37 1	0.843	0.1060
5	1.51660	19.15	13.55	11.2	13.5	36.05	0.852	0.1041
6	1.53225	19.85	14.05	12.05	14.35	36.95	0.843	0.1056
							Gem.	0.1055

Voor de bepaling van E vond men $R = 3.17$ S.

TABEL 8.

1 October 1880.

Bijgevoegde weerstand S.	Temperatuur van het water τ.	Dubbele uitslag 2κ.	Dubbele uitslag voor 1 S. per 1° C.
150	16.15	62.9	596.6
125	16.1	74.0	589.1
100	16.05	91.6	588.8
80	16.0	112.7	585.8
		$2E$	590.0
		$E =$	295.0

Samenstellende:

datum	ϑ
26 Sept.	0.1038
27 Sept.	0.1049
30 Sept.	0.1055
Gemiddeld ϑ =	0.1046.

2. Nieuwzilverdraad.

De gebezigde nieuwzilverdraad had een diameter van 1.5 m.M.; als dun draadje werd weder platinadraad (0.08 m.M. diameter) gekozen. De proeven werden op dezelfde wijze als met staaldraad genomen; alleen werd de waarde van E direkt vóór of na de proeven bepaald; daartoe werd van andere stukken van denzelfden nieuwzilver- en platina draad een keten gevormd, en na afloop der proeven vergeleken met den keten uit de gebruikte draden zelven gevormd. Zoo werd gevonden:

	E.
14 Sept. op 3 verschillende tijden: gemiddelde	201.0
15 Sept. direkt na de proeven	204.55
terwijl 17 Sept. met keten van 14 en 15 Sept.	200.15
met keten uit gebruikte draden	202.3

waardoor dus:

$$14 \text{ Sept. } E = 201.0 \frac{202.3}{200.15} = 203.2$$

$$15 \text{ Sept. } E = 204.55 \frac{202.3}{200.15} = 206.8$$

TABEL 9.

SPANNEND GEW. 17.134 KILO. **14 Sept. 1881.** TEMPERATUUR 16.4.

Nommer.	Aard der proef.	Eerste uitslag.	x_2-x_1.	x_3-x_1.	a.	b.	1 Siemens ingevoegd.	
							a.	b.
1	Spannen	46.5	19.3	14.1	192.3	78.45	87.4	39.9
2	Ontspannen	44.9	19.7	13.8	189.8	78.0		
3	Spannen	45.2	19.1	13.4	190.95	78.25		
4	Ontspannen	44.8	19.8	13.5	191.15	78.1	87.0	39.9
5	Spannen	45.7	19.1	13.7	191.2	78.2		
6	Ontspannen	44.6	19.7	13.5	190.95	78.0		
7	Spannen	46.0	19.5	13.7	193.2	79.1	87.9	40.6
8	Ontspannen	44.8	19.8	13.8	192.65	78.9	88.4	40.45
9	Spannen	45.5	18.6	13.2	194.1	79.3		
10	Ontspannen	45.2	19.9	13.7	192.9	78.8		

$h = 0.0088 \quad T = 6^s.35$

$\log n = 9.14834 \quad \log m = 9.42254$

$e^{-n T_1} = 0.4092 \quad e^{-h T_1} = 0.9458$

$e^{-n T_2} = 0.1675 \quad e^{-h T_2} = 0.8945$ voor N⁰. 1 tot N⁰. 6

$\frac{2hn}{m} = 0.009 \quad e^{-h T_3} = 0.8460$

waaruit:

TABEL 10.

Nommer.	$log \frac{C}{m}$.	$X_2 - X_1$ en afstand van X tot x_1.		$X_3 - X_1$ en afstand van X tot x_1.		$p = Xe^{hT}$.	Weerstand r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.4841	17.6	12.5	10.95	12.9	35.75	0.826	0.1453
2	1.4930	17.95	12.75	10.6	12.75	34.0	0.846	0.1416
3	1.4795	17.4	12.35	10.3	12.35	34.75	0.836	0.1429
4	1.4952	18.05	12.8	10.25	12.5	34.0	0.836	0.1398
5	1.4795	17.4	12.35	10.6	12.6	35.15	0.836	0.1446
6	1.4930	17.95	12.75	10.3	12.5	33.85	0.836	0.1392
7	1.4898	17.8	12.65	10.6	12.7	35.1	0.838	0.1447
8	1.4965	18.1	12.85	10.6	12.8	33.65	0.838	0.1387
9	1.4693	17.0	12.05	10.25	12.25	35.1	0.828	0.1431
10	1.4987	18.2	12.9	10.55	12.75	34.1	0.838	0.1406
							Gem.	0.1421

Het Platinadraadje werd verschoven.

TABEL 11.

15 Sept. 1881. TEMPERATUUR 16°.0.

Nommer.	Aard der proef.	Eerste uitslag.	$x_2 - x_1$.	$x_3 - x_1$.	a.	b.	1 Siemens ingevoegd. a.	1 Siemens ingevoegd. b.
1	Spannen	46.7	19.1	13.9	196.5	80.3	88.75	40.7
2	Ontspannen	45.55	19.95	13.85	195.55	80.3		
3	Spannen	45.45	18.45	13.45	195.0	80.1		
4	Ontspannen	45.15	19.65	13.25	195.1	80.0	88.6	40.85

$$h = 0.00845 \qquad T = 6^s.35$$

$$\left.\begin{matrix} log\ n \\ log\ m \\ e^{-nT_1} \\ e^{-nT_2} \end{matrix}\right\} = 14 \text{ Sept.} \quad \left.\begin{matrix} e^{-hT_1} = 0.9478 \\ e^{-hT_2} = 0.8983 \\ e^{-hT_3} = 0.8513 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{ook voor} \\ \text{N}^0.\ 7 - \text{N}^0.\ 10 \\ 14 \text{ Sept.} \end{matrix}$$

$$\frac{2hn}{m} = 0.009$$

hiermede:

TABEL 12.

Nommer.	$log\frac{C}{m}$.	X_2-X_1 en afstand van X tot x_1.		X_3-X_1 en afstand van X tot x_1.		$p = Xe^{hT}$.	Weerstand r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.4808	17.45	12.4	10.9	12.8	35.95	0.819	0.1423
2	1.4998	18.25	12.95	10.7	12.9	34.35	0.829	0.1377
3	1.4658	16.85	11.95	10.55	12.45	34.45	0.829	0.1382
4	1.4932	17.95	12.75	10.15	12.4	34.3	0.829	0.1375
							Gem.	0.1389

Samenstellende vindt men dus voor de temperatuursverandering uit de proeven van

14 Sept. 0.1421
15 Sept. 0.1389
Gemiddeld $\vartheta = 0.1405$

Met denzelfden nieuwzilverdraad is nog onderzocht of de temperatuursverandering evenredig is met het spannend gewicht. Op 3 verschillende dagen zijn deze proeven genomen; de verandering in gevoeligheid werd in rekening gebracht en verkregen:

15, 16 en 17 Juni 1881.

Spannend gewicht.	ϑ gemiddeld uit 8 proeven.	ϑ per Kilo.
13.05 Kilo	0.1063	0.00814
21.30 "	0.1725	0.00812

Daar de uitzettingscoëfficiënt voor deze beide spanningen dezelfde bleek (zie later), is de evenredigheid van ϑ met P bewezen.

Tevens kan deze overeenstemming als bewijs dienen dat de draad gerekend kan worden steeds in een toestand van evenwicht te verkeeren, hetgeen reeds waarschijnlijk was, daar de tijd, gedurende welken de toestandsverandering plaats greep, zeer groot is ten opzichte van den tijd, dat eene trilling zich door den draad voortplant. Door de kleine waarde van h kan de afwijking van eene volkomen adiabatische verandering als onmerkbaar beschouwd worden, zoodat de THOMSON'sche formule, voor adiabatische, omkeerbare processen geldig, mag toegepast worden.

Door afzonderlijke proeven is voorts bewezen, dat bij de gebruikte contactplaatsen: staal-nieuwzilver, staal-platina, nieuwzilver-platina, evenredigheid bestaat tusschen de thermoëlectromotorische kracht en de temperatuur binnen de gebruikte grenzen: ijs — water van de temperatuur der omgeving — aetherdamp — stoom. Ook werd geen verschil gevonden tusschen de waarde van E, wanneer de hoofddraad gespannen was of niet, evenmin als, na het losmaken der contactplaatsen, de draden sterk verwarmd en opnieuw gesoldeerd werden, zoodat noch tegen de wijze waarop E bepaald, noch waarop ze in rekening is gebracht, bedenkingen gemaakt kunnen worden.

II. UITZETTINGSCOËFFICIËNTEN DER DRADEN IN GESPANNEN TOESTAND.

In denzelfden toestel als bij de bepaling der temperatuursveranderingen, werden de draden gespannen.

Om den draad op twee verschillende constante temperaturen te kunnen brengen, bevond hij zich in den as van eene koperen buis, die door eene wijdere omgeven was; de tusschenruimte kon óf door stroomend water uit de waterlei-

ding. óf door stoom doorspoeld worden, waardoor de lucht in de binnenste buis en de draad de temperatuur van het water of van den stoom aannamen; de uiteinden der binnenste buis waren gesloten door kurkjes, die over den draad gemakkelijk verschoven konden worden; de buitenste buis was nog omgeven door eene dikke kurklaag, om warmteverlies door uitstraling te voorkomen. Op 5 c.M. van de beide uiteinden waren op de binnenste buis een paar zijbuisjes gesoldeerd, die door een paar plaatjes spiegelglas gesloten waren en waardoor de draad te zien was. Op den draad werden nu, met eene uiterst fijne naald, streepjes getrokken en op deze werden twee microscopen gericht, met micrometerschroef voorzien.

Ten einde uit de gemeten verplaatsing der streepjes tot den uitzettingscoëfficiënt te besluiten, moesten de microscopen zoo opgesteld worden dat hun afstand niet veranderde of deze verandering in rekening te brengen was.

Bij de bepaling van α van staaldraad, werden de microscopen op houten blokken bevestigd, die op eene stevige steenen tafel waren vastgegipst; door watten en hout was de tafel beschut tegen temperatuursverandering. Bij nieuwzilverdraad werden de houten blokken op een koperen buis, die op koperen voeten steunde, gestoken en in een grooten bak met water geplaatst, zoodat alleen de microscopen er boven uitkwamen; de grootste verandering in temperatuur van het water tusschen 2 proeven was $0^{o}.1$.

Beide methoden bleken zeer voldoende. Als spanning werd de gemiddelde genomen tusschen die bij gespannen en die bij ongespannen toestand.

In December 1880 werd bepaald de

Uitzettingscoëfficiënt van staaldraad.

Spanning = 19 kilo.
Afstand der beide streepjes op den draad: 330.7 m.M.
1287 verdeelingen van den schroefkoptrommel gaven eene verplaatsing van 1 m.M.

Temperatuurs-verschil.	Verlenging in schroefkopdeelen.	Uitzettings-coëfficiënt.
86°.8	428.4	0.00001159
86°.4	425.0	1156
86°.65	425.5	1154

$\alpha = 0.00001156$

In October 1881 werd bepaald:

Uitzettingscoëfficiënt van nieuwzilverdraad

Spanning = 16 kilo
Afstand der beide streepjes op den draad 324 m.M.
Bij het eene microscoop 10 schroefgangen = 0.9293 m.M.
» » andere » » = 0.9689 »
(de trommel was in 100 deelen verdeeld)

$\alpha = 0.00001739$
1725
1731
1741

$\alpha = 0.00001734$

Dezelfde waarde werd gevonden bij spanningen van 12 en 20 kilo. *)

III. Soortelijke warmte.

Ter bepaling der soortelijke warmte kon de mengingsmethode gebruikt worden, daar de draden in zeer kleine stukjes verdeeld werden, waardoor de calorimeter binnen ½ minuut

*) c. f. Joule, *Proceedings, R. Soc.* VIII, pg. 564, Rühlmann, pg. 526.

de maximumtemperatuur aannam, hetgeen correctie-termen onnoodig maakte. *)

De calorimeter van uiterst dun koperblik was op 3 kurken wiggen binnen een wijder bakje geplaatst; de roertoestel was een stuk kopergaas aan 2 dunne koperdraden bevestigd.

Ten einde vrij te zijn van de nadeelen, aan het gebruik van een thermometer bij calorimetrische proeven verbonden (warmtecapaciteit, traagheid van aanwijzing, het bezwaar eene goede plaats te geven in den calorimeter), werd van eene thermonaald gebruik gemaakt, uit een dun nieuwzilver- en platina-draadje gevormd, wier soldeerplaats vlak onder den roerder geplaatst werd en met dezen op en neer ging. De beide andere uiteinden der draadjes waren aan de geleiddraden naar den galvanometer van THOMSON gesoldeerd en deze soldeerplaatsen bevonden zich in een groot glas met water, dat voortdurend rondgeroerd werd. De galvanometer werd zoo gesteld dat de slingertijd ongeveer 2 seconden bedroeg; toch gaf eene temperatuursverandering van 1° C. bij de soldeerplaats nieuwzilver—platina, eene afwijking van ongeveer 14 schaaldeelen, zoodat $\frac{1}{140}$ graad af te lezen was. Om dit aantal juist te bepalen werd, direkt na de calorimetrische proef, de soldeerplaats in smeltend ijs geplaatst; de afwijkingen vielen nog binnen de schaal, zoodat men den weerstand niet behoefde te kennen.

Uit afzonderlijke proeven bleek dat de thermoëlectromotorische kracht niet geheel evenredig was met het temperatuursverschil, maar een weinig sterker toenam dan het temperatuursverschil. Dit is in rekening gebracht.

Als verwarmingstoestel der stukjes draad werd dezelfde toestel gebruikt als bij de bepalingen der uitzettingscoëfficiënten; een zeer dun reageerbuisje werd in de binnenste buis gestoken en, nadat de stoom minstens 20 minuten gecirculeerd had, werden de stukjes in den calorimeter geworpen, terwijl de stoom steeds bleef doorstroomen.

---

*) c. f. MÜLLER-PFAUNDLER, II, 2, pg. 297,

Als voorbeeld diene de volgende proef met

staaldraad

28 Maart 1881.

Calorimeter met water	95.979	Gram
Calorimeter	16.101	»
	79.878	Gram
Correctie op luchtledig	85	»
Waterwaarde calorimeter.	2.057	»
Waterwaarde.	82.020	Gram.

12.462 Gram staal van 100^0.2 in den calorimeter, welks temperatuur 11^0.55 was, veroorzaakten eene afwijking van 21.3 schaaldeel.

Een temperatuursverschil van 1^0 veroorzaakte eene afwijking van 13.96 schaaldeel:

hierdoor $\frac{21.3}{13.96}$ de temperatuursverhooging en

$$c = 0.1133.$$

Op nog 3 andere dagen werd gevonden:

$c = 0.1139$ [½ gewicht]
0.1131
0.1120

$c = 0.1130$ staaldraad.

Voor nieuwzilver werd gevonden:

$c = 0.09611$
09624
09625
09621

$c = 0.0962$ nieuwzilverdraad.

IV. Berekening van het mechanisch aequivalent der warmte.

Om na te gaan in hoever de mechanische warmtetheorie rekenschap geeft van de gevonden temperatuursveranderingen, zullen we door middel van de formule van Thomson het mechanisch aequivalent berekenen.

$$\vartheta = -\frac{(273 + \tau).\ \alpha.\ P}{A.\ w.\ c}$$

a. Uit de proeven met staaldraad.

$$\vartheta = 0^{0}.1047\ C.$$
$$\tau = 17^{0}.0$$
$$\alpha = 0.00001156$$
$$P = 21.715 \text{ Kilo}$$

300 m.M. wogen 4.2159 gram dus:

$$w = 0.014053 \text{ kilo}$$
$$c = 0.1130$$

waaruit

$$A = 437.8$$

b. Uit de proeven met nieuwzilverdraad.

$$\vartheta = 0^{0}.1405\ C$$
$$\tau = 16^{0}.2\ C$$
$$\alpha = 0.00001734$$
$$P = 17.134 \text{ kilo}$$

263.25 m.M. wogen 3.909 gram dus:

$$w = 0.014849 \text{ kilo}$$
$$c = 0.0962$$

waaruit

$$A = 428.1$$

Daar EDLUND door zijne proeven heeft aangetoond dat de *verhouding* der temperatuursveranderingen, bij verschillende metaaldraden, door de formule van THOMSON werd weergegeven, was het voldoende voor slechts één metaal te onderzoeken of de *absolute* waarde zelve volgens die formule kon worden berekend.

Uit bovenstaande proeven, zoowel met staaldraad als met nieuwzilverdraad, geloof ik dat zulks het geval is en dus tot de gevolgtrekking gerechtigd te zijn:

De mechanische warmtetheorie geeft volkomen rekenschap van de temperatuursveranderingen, ontstaande door het spannen en ontspannen van metaaldraden.

Het is mij een aangename plicht hier mijn dank te betuigen aan Prof. BOSSCHA, directeur der Polytechnische School, zoowel voor de groote bereidwilligheid, waarmee mij de toegang tot het physisch kabinet verleend werd, als voor de belangstelling bij dit onderzoek betoond — en aan Prof. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, directeur der Leidsche Sterrenwacht, voor het ten gebruike afstaan der beide aflezingsmicroscopen ter bepaling der uitzettingscoëfficiënten.

Delft, October 1881.

Fig. 1

Lith. Gebr. Reimeringer, Amst.

H. HAGA. **Temperatuursveranderingen van metaaldraden.**

Fig. 2.

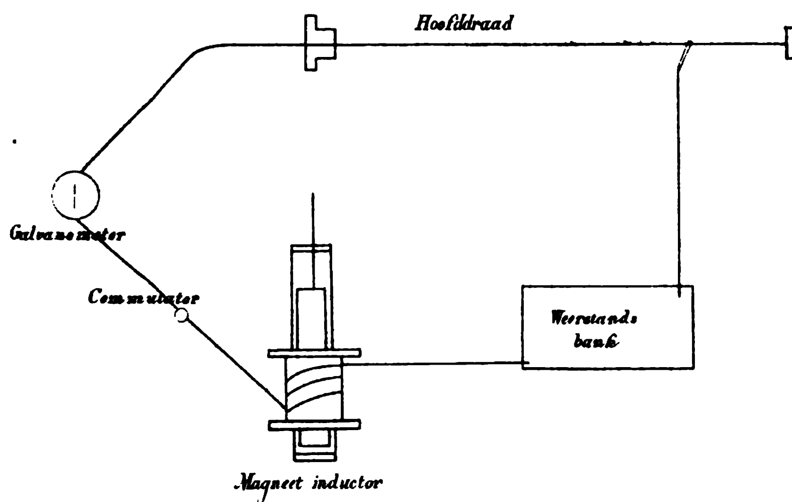


Fig. 3.

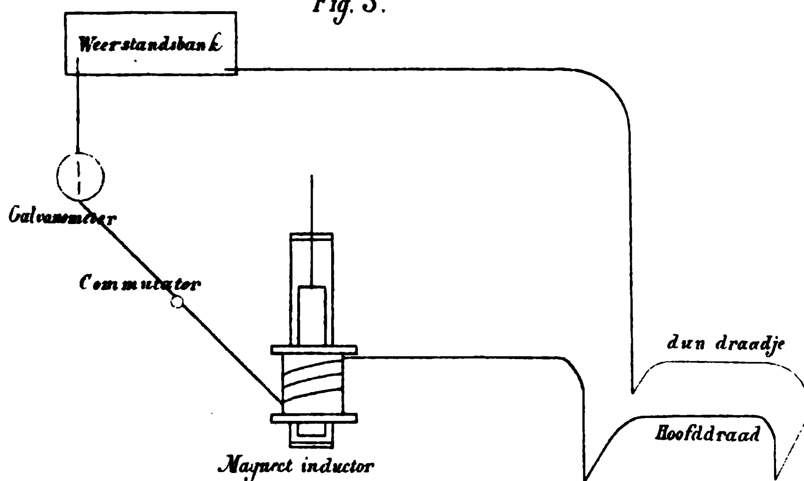


Fig. 2.

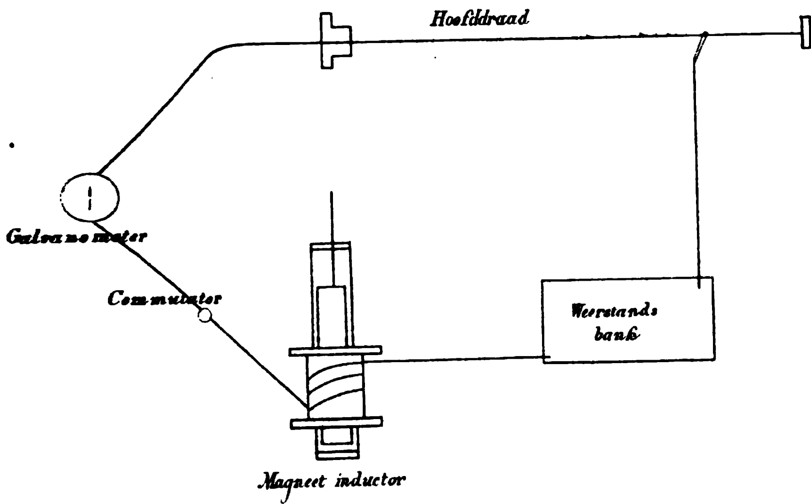
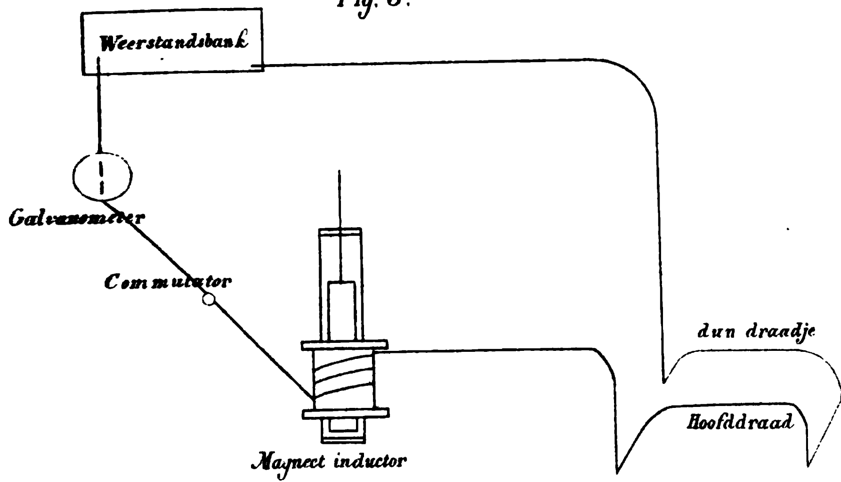

Hoofddraad
Galvanometer
Commutator
Weerstands bank
Magneet inductor

Fig. 3.


Weerstandsbank
Galvanometer
Commutator
dun draadje
Hoofddraad
Magneet inductor

OVER LAGRANGE'S INTERPOLATIE-FORMULE.

DOOR

T. J. STIELTJES Jr.



1. De gewoonlijk aldus genoemde formule leert de geheele rationale functie van x, van den $n - 1^{sten}$ graad hoogstens, die voor de n bijzondere waarden $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$ $x = x_n$ met een willekeurige functie $f(x)$ in waarde overeenkomt, onder den volgenden vorm kennen:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x - x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p)$$

waarin:

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

en $\varphi'(x)$ als gewoonlijk, de afgeleide functie van $\varphi(x)$ voorstelt.

Is de functie $f(x)$ zelf geheel rationaal, van niet hoogeren dan de $n - 1^{ste}$ graad dan is *identisch*:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x - x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p).$$

In het algemeen echter moet deze formule aangevuld worden door een *rest*, evenals dit bij het theorema van TAYLOR het geval is.

In het 84ste deel van het Journal für die reine und angewandte Mathematik, heeft HERMITE (pag. 70 e. v. v.) den

volledigen analytischen vorm van deze rest als een bepaald integraal gegeven en wel onder twee verschillende gedaanten; als grensgevallen ligt in deze formulen ook de rest van de reeks van TAYLOR opgesloten.

Evenals men onmiddellijk uit het bepaalde integraal, dat de volledige rest van de reeks van TAYLOR voorstelt, den LAGRANGE'schen *) restvorm kan afleiden, kan men ook een analogen restvorm voor de interpolatie-formule van LAGRANGE uit het veelvoudige integraal afleiden, waaronder HERMITE de rest voorstelt. Maar, evenals men veeltijds deze vereenvoudigde rest bij de reeks van TAYLOR afleidt zonder van de hulpmiddelen der integraal-rekening gebruik te maken, kan men hetzelfde ook voor den analogen restvorm van de interpolatie-formule verlangen. Eene zoodanige ontwikkeling wordt in het volgende gegeven.

Ik bemerk nog dat, hoewel de hier verkregen restvorm gemakkelijk uit HERMITE's formule afgeleid kan worden, deze toch niet dezen vereenvoudigden restvorm gegeven heeft. Het is hiertoe noodig een elementaire eigenschap van bepaalde enkelvoudige integralen tot veelvoudige integralen uit te breiden, wat echter geen bezwaar ontmoet.

De te bewijzen formule kan aldus geschreven worden:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x - x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p) + \frac{\varphi(x)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\, n} f^{(n)}(\xi) \,.\,.\,.\,. \quad (1)$$

waarin ξ eene waarde heeft, gelegen tusschen het grootste en kleinste der getallen x, x_1, $x_2 \,.\,.\, x_n$.

Hierbij moet ondersteld worden dat de functie $f(z)$ evenals $f'(z)\; f''(z) \,.\,.\; f^{n-1}(z)$ eindig en continue zijn voor alle waarden, van z, gelegen tusschen x, x_1, $x_2 \,.\,.\, x_n$ en dat voor deze zelfde waarden van z $f^{n-1}(z)$ een *eindig* en *bepaald* differentiaalquotient $f^n(z)$ heeft.

De formule (1) neemt een meer eleganten vorm aan wanneer men er $f^n(\xi)$ uit afzondert; men overtuigt zich gemakkelijk dat ze alsdan deze gedaante aanneemt:

---

*) *Théorie des functions analytiques.* In de 1ste editie van 1797 pag. 49.

$$\frac{f(x)}{\varphi'(x)}+\frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)}+\frac{f(x_2)}{\varphi'(x_2)}+\ldots+\frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)}=\frac{1}{1.2.3\ldots n}f^n(\xi)\ldots(2)$$

waarin:

$$\varphi(z)=(z-x)(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n).$$

Men herkent hierin een uitbreiding van de voor $n=1$ ontstaande elementaire formule $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi)$.

---

2. Het bewijs van de formule (1) berust nu op de volgende hulpstelling:

»Wanneer de functie $G(z)$ voor de $n+1$ verschillende waarden $z=x$, $z=x_1 \ldots z=x_n$ de waarde nul aanneemt, dan neemt het n^{de} differentiaal-quotiënt $G^n(z)$ de waarde nul aan voor een waarde $z=\xi$ gelegen tusschen het grootste en kleinste der getallen x, $x_1 \ldots x_n$."

Ondersteld wordt hierbij dat $G(z)$, $G'(z) \ldots G^{n-1}(z)$ eindig en continue zijn voor alle waarden van z gelegen tusschen x, $x_1 \ldots x_n$, en dat voor dezelfde waarden van z, $G^{n-1}(z)$ een *eindig* en *bepaald* differentiaal quotiënt $G^n(z)$ heeft.

Voor $n=1$ is dit een bekend theorema, waaromtrent het voldoende is te verwijzen naar DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, pag. 70.

Het bewijs van dit theorema, evenals dat van eenige nauw verwante, zooals het in de nog meest gangbare leerboeken voorkomt, bijv. SERRET, *Cours de calcul differential*, bevat een leemte die eerst aangevuld werd door eenige onderzoekingen van WEIERSTRASS, men zie DINI, pag. 43, 51. WEIERSTRASS zelf schijnt van deze onderzoekingen omtrent de grondslagen der functieleer, niets gepubliceerd te hebben.

Het is vooral noodig op te merken dat in dit eenvoudigste geval $n=1$ de grootheid ξ tusschen x en x_1 ligt, en *verschillend* zoowel van x als van x_1 aangenomen mag worden.

Het bewijs van de hulpstelling in het algemeene geval

volgt nu onmiddellijk uit de waarheid in het eenvoudigste geval $n = 1$. Is nam. $n = 2$ dus:

$$G(x) = 0 \qquad G(x_1) = 0 \qquad G(x_2) = 0$$

dan kan men onderstellen:

$$x < x_1 < x_2$$

en men heeft dan:

$$G'(\xi_1) = 0 \qquad x < \xi_1 < x_1$$
$$G'(\xi_2) = 0 \qquad x_1 < \xi_2 < x_2$$

en hieruit dan nog eens het theorema voor $n = 1$ toe te passen:

$$G''(\xi) = 0 \qquad \xi_1 < \xi < \xi_2.$$

Men kan op deze wijze voortgaan, en het blijkt dan tevens dat, in het algemeene geval, ξ ondersteld mag worden niet gelijk te zijn: noch aan het grootste, noch aan het kleinste der getallen $x\ x_1 \ldots x_n$. De voorwaarden van contiuniteit en differentieerbaarheid, die men aan de functie $G(z)$ en de afgeleide functies moet stellen, volgen zonder moeite uit die welke voor het geval $n = 1$ gesteld moeten worden.

---

3. Het bewijs van de formule (1) kan nu aldus gevoerd worden.

Ter bekorting moge het interpolatie-polynomium van Lagrange door $F(x)$ aangeduid worden:

$$F(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x - x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p). \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Onder de waarden $x_1,\ x_2 \ldots x_n$ komen geen twee gelijke voor, en daar de functiën $F(x)$ en $f(x)$ voor $x = x_1$, $x = x_2 \ldots x = x_2$, dezelfde waarden aannemen, en het ons te doen is om in het algemeen een beknopten vorm van het

verschil $f(x) - F(x)$ te vinden, zoo kunnen wij hierbij zonder nadeel de onderstelling maken dat de waarde x niet samenvalt met een der waarden $x_1\ x_2 \ldots x_n$.

Dit aangenomen, zij:

$$f(x) = F(x) + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) R \ldots (4)$$

De waarde van R is dan hierdoor volkomen bepaald. Terwijl nu verder, voor een oogenblik, $x\ x_1\ x_2 \ldots x_n$ als constanten gedacht worden en z een nieuwe veranderlijke is, beschouwen wij de functie:

$$G(z) = -f(z) + F(z) + (z - x_1)(z - x_2) \ldots (z - x_n) R \ldots (5)$$

waarin dus R de door (4) volkomen bepaalde, van z onafhankelijke waarde heeft.

Blijkbaar is nu, niet alleen:

$$G(x) = 0$$

maar ook:

$$G(x_1) = 0 \qquad G(x_2) = 0 \ldots \qquad G(x_n) = 0$$

waaruit dus volgens de hulpstelling van Art. 2 volgt:

$$G^n(\xi) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

waarin ξ een waarde heeft gelegen tusschen het grootste en kleinste der getallen $x\ x_1 \ldots x_n$. Maar daar $F(z)$ hoogstens van den $n-1^{sten}$ graad in z is, zoo valt bij de n-voudige differentiatie van (5) $F(z)$ weg, en is:

$$G^n(z) = -f^n(z) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot R$$

wegens (6) volgt nu:

$$R = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^n(\xi)$$

en dit in (4) gesubstitueerd:

$$f(x) = F(x) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{1.2.3\ldots n} f^n(\xi)$$

waarmede het bewijs van de formule (1) geleverd is.

---

4. Wanneer men, in de nu ook bewezen formule (2), de steeds ongelijke getallen $x, x_1, x_2 \ldots x_n$ allen tot eenzelfde limiet X laat convergeeren, dan volgt:

$$Lim. \left\{\frac{f(x)}{\varphi'(x)} + \frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)}\right\} = \frac{1}{1.2\ldots n} f^n(X) \ldots (7)$$

Behalve de onderstellingen die voor de geldigheid der formulen (1) en (2) gemaakt moeten worden, moet bij deze laatste formule *bovendien* nog $f^n(x)$ voor $x = X$ *continue* zijn, daar men anders niet kan besluiten dat $f^n(\xi)$ bij convergentie van ξ tot X, tot de limiet $f^n(X)$ convergeert.

Deze formule (7) die dus in het geval dat $f^n(x)$ voor $x = X$ continue is, een directe algemeene definitie van het n^{de} differentiaal-quotiënt van een functie $f(x$ geeft, schijnt nog niet in de hier gegeven algemeenheid bewezen te zijn Wel komt zij voor in het uitstekende werk van LIPSCHITSCH »*Differential- und Integralrechnung*", pag. 204 Form. 20, maar bij het dáár voorkomende bewijs moet men onderstellen dat $x\, x_1\, x_2 \ldots x_n$ bij hunne convergentie tot de limiet X, behalve dat zij steeds ongelijk blijven, nog aan andere condities moeten voldoen, die hier overbodig blijken. Zie t. a. p. pag. 203 regel 6 v. o.. En verder is daar het bestaan van een eindig en continue $n + 1^{ste}$ differentiaal-quotiënt aangenomen. Ook deze conditie ligt stellig in het geheel niet in den aard der zaak, en nadat WEIERSTRASS *continue* functies heeft leeren kennen die *niet* differentiëerbaar zijn, zou niets gemakkelijk zijn dan functiën op te stellen, voor welke de formule (7) geldig is, maar waarbij van geen $n + 1^{ste}$ differentiaal-quotiënt sprake kan zijn. *)

---

*) Men zie het *Journ. für Mathem.* Bd. 79, pag. 29 en vv., ook Bd. 90 pag. 221.

5. De overeenkomst van de formule (1) met het theorema van TAYLOR valt nog meer in het oog, wanneer men het polynomium $F(x)$ niet voorstelt onder de elegante en symmetrieke gedaante, door LAGRANGE gegeven, maar onder den vorm dien NEWTON in het 3de Boek der Principia bij gelegenheid van zijne behandeling van het kometen-probleem geeft.

De formule (1) neemt dan namenlijk deze gedaante aan:

$$f(x) = A_1 + A_2(x - x_1) + A_3(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$
$$+ A_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{1.2.3\dots n} f^{(n)}(\xi) \quad \dots \quad (8)$$

Hierin is:

$$A_1 = f(x_1) \qquad A_2 = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

en algemeen:

$$\left. \begin{array}{l} A_p = \dfrac{f(x_1)}{\varphi'_p(x_1)} + \dfrac{f(x_2)}{\varphi'_p(x_2)} + \dots + \dfrac{f(x_p)}{\varphi'_p(x_p)} \\ \varphi_p(z) = (z - x_1)(z - x_2)\dots(z - x_p) \end{array} \right\} \quad \dots \quad (9)$$

NEWTON geeft niet explicite deze algemeene uitdrukking voor A_p, maar wel de volgende rekenvoorschriften om achtereenvolgens A_1, $A_2 \dots$ te berekenen:

$$A_1 = f(x_1) \quad A_2 = \frac{B_1 - A_1}{x_2 - x_1} \quad A_3 = \frac{B_2 - A_2}{x_3 - x_1} \quad A_4 = \frac{B_3 - A_3}{x_4 - x_1}$$

$$B_1 = f(x_2) \quad B_2 = \frac{C_1 - B_1}{x_3 - x_2} \quad B_3 = \frac{C_2 - B_2}{x_4 - x_2} \dots$$

$$C_1 = f(x_3) \quad C_2 = \frac{D_1 - C_1}{x_4 - x_3} \dots$$

$$D_1 = f(x_4) \dots$$

Stelt men deze grootheden zooals zij achtereenvolgens gevonden worden, aldus te zamen:

$$\left.\begin{matrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ B_1 & & A_3 & \\ & B_2 & & A_4 \\ C_1 & & B_3 & \\ & C_2 & & \\ D_1 & & & \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

dan komt deze berekening geheel overeen met die van de gewone interpolatie in het geval dat $x_1\ x_2\ x_3 ..$ een rekenkunstige reeks vormen, met deze geringe wijziging dat de 1ste, 2de, 3de .. rijen van verschillen hier respectieve door de factoren $1.(x_2-x_1)$, $1.2.(x_2-x_1)^2$, $1.2.3.(x_2-x_1)^3 ..$ gedeeld voorkomen.

Volgens de formule (2) is:

$$A_p = \frac{1}{1.2.3..(p-1)} f^{p-1}(\xi_p)$$

waarin ξ_p een waarde heeft gelegen tusschen het grootste en kleinste der getallen $x_1\ x_2 .. x_p$. Laat men dus in de formule (8) $x_1\ x_2 .. x_n$ tot eenzelfde limiet convergeeren, dan ontstaat onmiddellijk de formule van Taylor met den restvorm van Lagrange.

---

6. De Newton'sche vorm van het interpolatie-polynomium:

$$F(x) = A_1 + A_2(x - x_1 + A_3(x-x_1)(x-x_2) .. + \\ + A_n(x-x_1)(x-x_2)..(x-x_{n-1})$$

heeft boven dien van Lagrange ook nog dit voordeel, dat hij onmiddellijk doet zien welken vorm $F(x)$ aanneemt wanneer er onder de grootheden:

$$x_1\ x_2\ ..\ x_n$$

meerdere tot eenzelfde limiet convergeeren of gelijk gesteld worden.

Convergeeren namenlijk $x_1\, x_2 \ldots x_p$ tot de limiet X dan is volgens (9) en (7):

$$lim.\ A_p = \frac{1}{1 \ldots 2\,(p-1)} f^{(p-1)}\,(X). \;.\;.\;.\;.\;.\; (11)$$

en daar alle in het tableau (10) voorkomende grootheden op dezelfde wijze als A_p .. samengesteld zijn, zoo kan men ook onmiddellijk in dit geval het geheele tableau (10) vormen. Men ziet namenlijk gemakkelijk dat men hierbij, om onbepaalde uitdrukkingen $\frac{0}{0}$ te ontgaan, slechts die grootheden $x_1\, x_2 \ldots x_n$ die ten slotte gelijk gesteld worden, onmiddellijk op elkaar behoeft te laten volgen. Men heeft dan verder de formule (11) en Newton's voorschriften te volgen om het geheele tableau te verkrijgen. Werden dus bijv. $x_1\, x_2 \ldots x_p$ allen $= X$, dan moet men in dit geval bekend onderstellen:

$$f(X),\ f'(X) \ldots \qquad f^{p-1}\,(X).$$

Hierin schijnt dan ook de meest geschikte methode te bestaan, om het polynomium van den laagst mogelijken graad $H(x)$ te vormen, dat aan deze voorwaarden voldoet:

$$\left.\begin{array}{l} H(x_1) = f(x_1),\ H'(x_1) = f'(x_1) .. H^{\alpha_1 - 1}\,(x_1) = f^{\alpha_1 - 1}\,(x_1) \\ H(x_2) = f(x_2),\ H'(x_2) = f'(x_2) .. H^{\alpha_2 - 1}\,(x_2) = f^{\alpha_2 - 1}\,(x_1) \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ H(x_n) = f(x_n),\ H'(x_n) = f'(x_n) .. H^{\alpha_n - 1}\,(x_n) = f^{\alpha_n - 1}\,(x_n) \end{array}\right\} \ldots (12)$$

welk polymonium $H(x)$ hoogstens van den $k-1^{\text{sten}}$ graad is:

$$k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Men verkrijgt op de boven beschreven wijze dit polynomium $H(x)$ onder dezen vorm:

$$H(x)=A+B(x-x_1)+C(x-x_1)^2..+L(x-x_1)^{\alpha-1}+M(x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)+..$$

$$+..R(x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\alpha_2}..(x-x_{n-1})^{\alpha_{n-1}}(x-x_n)^{\alpha_n-1}$$

waarin de constanten $A.B, C..R$ onmiddellijk aan het tableau (10) ontleend kunnen worden.

7. Voor het verschil $f(x)-H(x)$ bestaat weder een eenvoudige uitdrukking, en daar hierin een verdere uitbreiding ligt van de formule (1), zoo moge de hierop betrekking hebbende ontwikkeling nog in 't kort geschetst worden. Het zal, na het voorgaande, overbodig zijn de condities, waaraan men $f(x)$ te onderwerpen heeft, hierbij in extenso te vermelden.

In de eerste plaats dan is het noodig de hulpstelling van Art. 2 aldus uit te breiden:

Voldoet eene fuctie $G(z)$ aan de condities

$$\begin{array}{llll} G(x)=0 & G'(x)=0 & G''(x)=0\,.. & G^{\alpha-1}(x)=0 \\ G(y)=0 & G'(y)=0 & .. & G^{\beta-1}(y)=0 \\ G(z)=0 & G'(z)=0 & .. & G^{\gamma-1}(z)=0 \\ ..... & & & \end{array}$$

waarvan het aantal

$$\alpha+\beta+\gamma\,.=n$$

bedraagt, dan is

$$G^{n-1}(\xi)=0$$

waarin ξ gelegen is tusschen de grootste en kleinste der ongelijke waarden x, y, z...

Na hetgeen in Art. 2 gezegd is, schijnt het niet noodig, bij het bewijs hiervan lang stil te staan. Men kan eerst het geval dat het grootste der getallen α, β, γ... twee is, beschouwen, en vervolgens voor dit grootste onder die getallen 3, 4, 5... aannemen.

---

8. Zij nu $H(x)$ het polynomium van den $k-1^{sten}$ graad hoogstens dat aan de condities (12) voldoet, en

$$f(x) = H(x) + (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}R \quad \ldots \quad (13)$$

dan is, x verschillend van $x_1, x_2 \ldots x_n$ ondersteld, de waarde van R hierdoor volkomen bepaald. Beschouwt men nu verder de functie

$$G(z) = -f(z) + H(z) + (z-x_1)^{\alpha}(z-x_2)^{\alpha_2}\ldots(z-x_n)^{\alpha_n}R$$

dan is blijkbaar niet alleen

$$G(x) = 0$$

maar ook

$$G(x_1) = 0 \quad G'(x_1) = 0 \quad \ldots \quad G^{\alpha_1-1}(x_1) = 0$$
$$G(x_2) = 0 \quad G'(x_2) = 0 \quad \ldots \quad G^{\alpha_2-1}(x_2) = 0$$
$$\ldots\ldots$$
$$G(x_n) = 0 \quad G'(x_n) = 0 \quad G^{\alpha_n-1}(x_n) = 0$$

en derhalve

$$G^k(\xi) = 0$$

maar, daar $H(z)$ hoogstens van den $k-1^{\text{sten}}$ graad is

$$G^k(z) = -f^k(z) + 1.2.3\ldots k.R$$

en ten slotte

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{1}{1.2.3\ldots k} f^k(\xi) \\ f(x) &= H(x) + \frac{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}}{1.2.3\ldots k} f^k(\xi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (14)$$

Hierin ligt ξ tusschen het grootste en kleinste der getallen $x, x_1, x_2 \ldots x_n$.

In deze formule liggen zoowel de reeks van Taylor als de formule van Lagrange, door een restterm aangevuld, als bijzondere gevallen opgesloten.

In de aangehaalde verhandeling stelt Hermite ook voor dit geval het verschil $f(x) - H(x)$ met behulp van bepaalde integralen voor.

9. Het algemeenste resultaat dat door de, in het voorgaande ontwikkelde, methode verkregen kan worden, schijnt het volgende te zijn.

Laten $f(x)$ en $H(x)$ dezelfde beteekenis behouden als in Art. 6—8, verder $f_1(x)$ een nieuwe functie van x zijn en $H_1(x)$ die rationale functie van x van den $k-1^{sten}$ graad hoogstens, die aan de condities (12) voldoet, wanneer men daarin de functie $f(x)$ door $f_1(x)$ vervangt. Zij nu

$$f(x) = H(x) + R\,(f_1(x) - H_1(x)). \;.\;.\;.\; (15)$$

Zal de waarde van R hierdoor op ondubbelzinnige wijze bepaald zijn, dan moet x niet alleen van $x_1\, x_2 \,..\, x_n$ verschillen, maar bovendien mag niet $f_1(x) - H_1(x) = 0$ worden.

Dit nu onderstellende, zij:

$$G(z) = f(z) - H(z) - R\,(f_1(z) - H_1(z))$$

dan is niet alleen:

$$G(x) = 0$$

maar ook:

$$G(x_1) = 0 \qquad G'(x_1) = 0 \qquad G^{\alpha_1 - 1}(x_1) = 0$$

$$.\;.\;.\;.\;.$$

$$G(x_n) = 0 \qquad G'(x_n) = 0 \qquad G^{\alpha_n - 1}(x_n) = 0$$

en dus, volgens Art. 7:

$$G^k(\xi) = 0$$

maar daar $H^k(z)$ en $H_1{}^k(z)$ identisch nul zijn:

$$G^k(z) = f^k(z) - R f_1{}^k(z)$$

en derhalve:

$$R = \frac{f^k(\xi)}{f_1{}^k(\xi)}$$

of wel:

$$f(x) = H(x) + \left(f_1(x) - H_1(x)\right)\frac{f^k(\xi)}{f_1^k(\xi)} \dots \dots (16)$$

Deze algemeene formule gaat onmiddellijk in de formule (14) over, wanneer men aanneemt:

$$f_1(x) = x^k.$$

Dan is namenlijk:

$$f_1^k(x) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,..\, k$$

en zooals dadelijk te zien:

$$f_1(x) - H_1(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_1)^{\alpha_2} \,.\, (x - x_n)^{\alpha_n}$$

Leiden, October 1881.

NASCHRIFT.

Dat er altijd ééne en niet meer dan ééne functie $H(x)$ bestaat die aan de condities (12) voldoet en hoogstens van den $k-1^{\text{sten}}$ graad in x is, kan onmiddellijk aldus aangetoond worden.

Zij:

$$H(x) = a_0 + a_1 x + a_2 + a_{k-1} x^{k-1}$$

dan heeft men ter bepaling van de k onbekenden $a_0, a_1, a_2 \,..\, a_{k-1}$ de volgende k lineaire vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{rr}
a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \,.. & + x_1^{k-1} a_{k-1} = f(x_1) \\
1 a_1 + 2 x_1 a_2 + \,.. & + (k-1) x_1^{k-2} a_{k-1} = f'(x_1) \\
1.2.a_2 + \,.. & + (k-1)(k-2) x_1^{k-3} a_{k-1} = f''(x_1) \\
\dots & \dots \\
\multicolumn{2}{l}{(\alpha_1 - 1)!\, a_{\alpha_1 - 1} + \,..\, + (k-1)(k-2)\,..\,(k-\alpha_1+1) x_1^{k-\alpha_1} a_{k-1} =} \\
 & = f^{\alpha_1 - 1}(x_1) \\
a_0 + x_2 a_1 + x_2^2 a_2 + \,.. & + x_2^{k-1} a_{k-1} = f(x_2) \\
1.a_1 + 2 x_2 a_2 + \,.. & + (k-1) x_2^{k-2} a_{k-1} = f'(x_2) \\
\dots &
\end{array}\right\} \dots A$$

De te bewijzen stelling bestaat nu daarin, dat aan dit stelsel vergelijkingen steeds door één en door niet meer dan één stelsel van waarden voor $a_0\, a_1 \ldots a_{k-1}$ voldaan kan worden.

Vooreerst is nu te bemerken dat het systeem (A) nooit meer dan éénе oplossing kan toelaten, want waren er bijv. twee oplossingen, dan zoude men dus twee verschillende functies $G(x)$ en $H(x)$ hebben die beide aan de voorwaarden, in (12) uitgedrukt, voldoen en die beide van den k—1[sten] graad hoogstens zijn. Dit nu is onmogelijk, want uit die vergelijkingen (12) zou volgen dat het verschil:

$$G(x) - H(x)$$

algebraïsch deelbaar is door de uitdrukking van den k[den] graad:

$$(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}.$$

In de tweede plaats is het evident dat aan (A) door de waarden:

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \ldots \quad a_{k-1} = 0$$

voldaan wordt zoodra de tweede leden der vergelijkingen gelijk nul gesteld worden, en na het bovenstaande is dit ook de *eenige* oplossing in dat geval.

Uit de theorie der lineaire vergelijkingen volgt nu onmiddellijk dat de determinante van het stelsel vergelijkingen (A) niet $=$ nul is, want uit die theorie is bekend dat zoodra deze determinante $=$ nul is, aan de vergelijkingen (A), nadat daarin voor de tweede leden overal de waarde nul genomen is, voldaan kan worden door een stelsel waarden $a_0\, a_1 \ldots a_{k-1}$ die *niet* allen gelijk nul zijn, wat in strijd zoude zijn met het boven bewezene.

Uit het niet gelijk nul zijn van de determinante van het stelsel vergelijkingen (A), volgt nu onmiddellijk dat aan dit stelsel, bij willekeurige waarden der tweede leden, steeds door een *enkel stelsel* van waarden $a_0\; a_1 \ldots a_{k-1}$ voldaan kan worden.

Men kan overigens de waarde van die determinante gemakkelijk aangeven.

Door namelijk van deze bekende formule uit te gaan:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & .. & a^{k-1} \\ 1 & b & b^2 & .. & b^{k-1} \\ 1 & c & c^2 & .. & c^{k-1} \\ & & & & \\ 1 & p & p^2 & & p^{k-1} \\ 1 & q & q^2 & & q^{k-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (b-a)(c-a)(d-a)\,..\,(q-a) \\ \times\ (c-b)(d-b)\,..\,(q-b) \\ \times\ (d-c)\,..\,(q-c) \\ ... \\ \times\ (q-p) \end{array}$$

waarin ten slotte de α_1 eerste der grootheden $a, b, c \,..\, p, q$ tot de limiet x_1, de α_2 volgende tot de limiet x_2 enz. zullen convergeeren; de horizontale rijen op passende wijze te transformeeren, waarbij men te deelen heeft door de factoren die ten slotte gelijk nul worden, en bij den grensovergang van de formule (7) gebruik te maken, verkrijgt men de navolgende waarde voor determinante van het stelsel vergelijkingen (A):

$$\begin{array}{ll} 0!\,1!\,2!.\,(\alpha_1-1)! & (x_2-x_1)^{\alpha_1\alpha_2}(x_3-x_1)^{\alpha_1\alpha_3}\ldots(x_n-x_1)^{\alpha_1\alpha_n} \\ 0!\,1!\,2!..(\alpha_2-1)! & (x_3-x_2)^{\alpha_2\alpha_3}\ldots(x_n-x_2)^{\alpha_2\alpha_n} \\ 0!\,1!\,2!\ \ (\alpha_3-1)! & \ldots \\ & \ldots \\ 0!\,1!\,2!\ \ (\alpha_n-1)! & (x_n-x_{n-1})^{\alpha_{n-1}\alpha_n} \end{array}$$

De geheele bewerking blijkt genoegzaam uit het volgende bijzondere geval $k = 5$, $n = 2$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} \times (b-a)(c-a)(c-b)(e-d)$$

waarin

$$t_r = \frac{a^r}{a-b} + \frac{b^r}{b-a}$$

$$u_r = \frac{a^r}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^r}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^r}{(c-a)(c-b)}$$

$$v_r = \frac{d^r}{d-e} + \frac{e^r}{e-d} \qquad r = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Derhalve:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = (d-a)(d-b)(d-c) \times (e-a)(e-b)(e-c)$$

en voor:

$$lim.\ a = lim.\ b = lim.\ c - x_1$$

$$lim.\ e = lim.\ d = x_2$$

volgt nu met behulp van de formule (7):

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 4x_1^3 \\ 0 & 0 & 2 & 2.3x_1 & 3.4x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 4x_2^3 \end{vmatrix} = 2(x_2 - x_1)^6$$

VERSLAG

OVER DE

INRICHTING VAN BLIKSEMAFLEIDERS

OP

RIJKSGEBOUWEN TE MEDEMBLIK.

DOOR

J. BOSSCHA, J. D. VAN DER WAALS, C. H. C. GRINWIS.

De ondergeteekenden ontvingen bij missive van 10 December ll., N⁰. 87, van het bestuur der Natuurkundige Afdeeling de opdracht, in de vergadering van heden advies uit te brengen over een ontwerp van den aanleg van bliksemafleiders op de Rijksgebouwen te Medemblik, welke tot een krankzinnigengesticht worden verbouwd.

Het advies moet strekken ter beantwoording van eene vraag van den Minister van Binnenlandsche Zaken, die bij zijnen brief van 7 December ll., N⁰. 2826 Afdeeling Kunsten en Wetenschappen, aan de Koninklijke Akademie toezond het bestek der verbouwingen met de daarbij behoorende teekeningen, een brief van den heer A. Fünckler te Haarlem, het door eene teekening toegelichte plan van aanleg der bliksemafleiders inhoudende, en een advies van den architect A. F. van Wijngaarde, hetwelk den Minister van Binnenlandsche Zaken den aanleg volgens het voorstel van den heer Fünckler aanbeveelt.

Uit den brief van den heer Fünckler blijkt, dat zich thans op de gemelde gebouwen nog eenige afleiders van oude constructie bevinden. Volgens den heer Fünckler zijn zij meerendeels defect en is hunne samenstelling af te keuren,

Zij bestaan namelijk uit smalle dunne looden reepen. Ofschoon de ondergeteekenden niet in de gelegenheid waren deze afleiders te bezichtigen, is hetgeen de heer Fünckler daaromtrent mededeelt voldoende om ze onvoorwaardelijk af te keuren.

De heer Fünckler stelt voor, de oude afleiders allen op te ruimen en te vervangen door 20 nieuwe, elk bestaande uit eene roodkoperen opvangstang met platina punt, eene ijzeren stang en eene geleiding naar den grond van roodkopertouw van 36 in elkander gedraaide draden. In den grond zou elke afleider eindigen in een vierkante roodkoperen plaat, die in het water wordt geleid, 't zij in eene aanwezige gracht, wel of sloot, 't zij in daarvoor gegraven kleine putten. De kosten van aanleg zouden bedragen *f* 1638.-.

Neemt men in aanmerking dat de bestemming van het gebouw eene afdoende bescherming tegen bliksemgevaar noodzakelijk maakt, dan is het voorstel van den heer Fünckler geenszins overdreven te noemen. De lengte toch der gezamenlijke gebouwen bedraagt bijna 400 meter. Zij beslaan eene oppervlakte van meer dan 0.7 hectare. Het plan van aanleg kan ook, wanneer elk der afleiders goed vervaardigd is, als waarschijnlijk voldoende aangemerkt worden. Eindelijk zijn de kosten laag te noemen. Zij zullen ongeveer 25 cents per M^2 bedragen, wat ongeveer overeenstemt met de laagste opgaven, welke Prof. F. Neesen in zijn artikel over de Electrische Tentoonstelling te Parijs (*Electrotechnische Zeitschrift*, November-Heft van 1881 bladz. 462) mededeelt.

Toch achten de ondergeteekenden een doelmatiger inrichting, welke waarschijnlijk in onkosten niet veel van die van den heer Fünckler verschillen zal, wenschelijk. Zeer veel grootere veiligheid dan door enkele afleiders te bereiken is, verkrijgt men wanneer door ijzeren stangen van niet minder dan 12 millimeter middellijn, die over de nokken der daken loopen, het geheele gebouw als door een net- of raamwerk van goede, met de aarde verbondene, geleiders is ingesloten. Men verkrijgt zoodanig stelsel wanneer men de afleiders, door den heer Fünckler ontworpen, onderling verbindt, wat

nog om eene andere reden verkieslijk is Bij het inslaan namelijk van den bliksem in eene der vangstangen, vindt door deze verbinding de electriciteit meer dan éen weg om zich door afleider en grondplaat in de aarde te ontladen. Eene toepassing van dit stelsel op de Rijksgebouwen te Medemblik zou evenwel nog eenige andere wijzigingen medebrengen.

Blijkens de doorsnede der gebouwen, voorgesteld op de plaat N°. 5, behoorende bij het bestek, zijn het hoofdgebouw, de beide frontgebouwen en de beide vleugelgebouwen allen van dubbele daken voorzien.

De heer Fünckler schijnt de afleiders alleen te willen plaatsen op de nokken der buitenste daken. Het zal noodig zijn de ijzeren geleiders, die de afleiders verbinden, over *al* de nokken te plaatsen en die van het buitenste en binnenste dak aan de einden door stangen, evenwijdig aan de diepte van het gebouw, onderling te verbinden.

Het doelmatigst zal zijn, voor elk der vijf groote gebouwen en voor de twee kleine hoekgebouwen aan het einde van het oostelijk en westelijk frontgebouw, op die wijze een *afzonderlijk* stelsel van ijzeren geleiders met vangstangen en grondleiding aan te brengen.

Op het *hoofdgebouw* moet de nokgeleiding over de volle lengte doorloopen, aan de uiteinden moeten de — waarschijnlijk ijzeren — versieringen der schoorsteenen daarmede in goed verband gebracht worden; twee afleiders: één aan de west-, één aan de oostzijde, moeten over de hoekkepers en langs de hoeken der buitenmuren naar de grondleiding gaan. Een derde afleider met grondleiding moet in het midden van het hoofdgebouw worden aangebracht.

De vangstangen op het hoofdgebouw kunnen zich bepalen tot drie, op de plaatsen door den heer Fünckler aangewezen.

Wegens het opnemen der schoorsteenversieringen in het geleidend verband, zouden de beide buitenste vangstangen ongeveer vier meter meer naar het midden van het gebouw kunnen geplaatst worden.

De oostelijke en westelijke frontgebouwen moeten even-

eens door een raam van ijzeren stangen over de nokken gedekt zijn. Drie afleiders op elk dier gebouwen kunnen hier volstaan, te weten: *twee* aan de uiteinden der gebouwen over de hoekkepers en langs de hoeken der muren aan de buitenzijde, en *één* in het midden van het gebouw, aansluitende aan de ijzeren stangen van den binnensten nok en aan de achterzijde van het gebouw naar de grondleiding voerende. Vangstangen moeten geplaatst worden dáár, waar de eigenlijke afleider zich aansluit aan het geleidende raam dat het dak bedekt, derhalve aan de uiteinden van de gebouwen op het buitenste dak, en in het midden van het gebouw op het binnenste dak.

De twee kleinere hoekgebouwen aan de uiteinden der oostelijke en westelijke frontgebouwen kunnen van éene vangstang en van eenen afleider voorzien worden. De vangstang kan geplaatst worden volgens de aanwijzing van den heer Fünckler, de afleiders moeten daarentegen langs de buitenhoeken van het gebouw naar beneden gaan.

Een raamwerk van stangen over het dak mag hier niet gemist worden.

De beide vleugelgebouwen moeten op dezelfde wijze beschermd worden als de oostelijke en westelijke frontgebouwen.

Zij verkrijgen elk drie afleiders, met daarboven geplaatste vangstangen, op dezelfde wijze geplaatst als bij de frontgebouwen.

Wegens de lagere ligging van den nok der vleugelgebouwen en de onmiddellijke nabijheid der hoogere hoekgebouwen, kunnen de vangstangen op de buitendaken, aan de zijden dier hoekgebouwen, geplaatst worden zooals door den heer Fünckler werd aangeduid, op eenigen afstand van den nok. De afleiders aan dit gedeelte moeten evenwel over de hoekkepers naar beneden worden gevoerd.

Volgens ons voorstel zouden derhalve noodig zijn 17 afleiders en 17 vangstangen.

Het schijnt ons niet noodig de afleiders uit kostbaar koperdraad te doen bestaan. Kabels van gegalvaniseerd ijzer kunnen voldoende geacht worden. De ijzerdoorsnede dezer kabels moet minstens een c.M^2 inhoud hebben. Daarentegen

dient bijzondere zorg besteed te worden aan de grondleiding. Er moet bepaald worden dat elke grondplaat minstens 1 M^2 groot moet zijn en uit roodkoper moet bestaan. Zooveel mogelijk moeten de grondplaten, in het water der omringende grachten, behoorlijk tegen aanvaring of diefstal beschermd, uitkomen.

Het schijnt ons nuttig dat aan het koperen uiteinde van elke vangstang een 3 millimeter dikke koperdraad blijvend worde bevestigd. De koperdraad moet om de stang in éene winding rondloopen en beneden om de staug door rondbuiging worden vastgemaakt.

Hij is bestemd dienst te doen bij de beproeving der bliksemafleiders.

Delft, *Amsterdam*, *Utrecht*, 24 December 1881.

RAPPORT OVER DE VERHANDELING

VAN DEN HEER

Dr. M. W. BEYERINCK,

GETITELD:

„BEOBACHTUNGEN UEBER DIE ERSTEN ENTWICKELUNGS-PHASEN EINIGER CYNIPIDENGALLEN".

Uitgebracht in de Vergadering der Afdeeling Natuurkunde der Kon. Akad. v. Wet. van 24 December 1881.

De verhandeling van den Heer BEYERINCK, getiteld: »Beobachtungen über die ersten Entwickelungsphasen einiger Cynipidengallen", aan de Koninklijke Akademie van Wetenschappen ter opneming in hare werken aangeboden, en waaromtrent de ondergeteekenden in de vorige vergadering zijn uitgenoodigd advies te geven, is een uitgebreid, in het Hoogduitsch geschreven stuk van meer dan 300 folio bladzijden tekst, met een 35tal gedeeltelijk gekleurde platen voorzien. Zij behandelt de onder den naam van galnoten of gallen bekende uitwassen en misvormingen, door galwespen te weeg gebracht, welke bij eiken en andere planten voorkomen, en waarvan de nauwkeurige kennis alleen te verkrijgen is door zelfstandige studie en wetenschappelijk onderzoek, zoowel van de levenswijze en den lichaamsbouw van het insect, dat de galnoot heeft veroorzaakt, als van de ontwikkeling en structuur van het vervormde plantendeel.

Het onderwerp behoort alzoo, wanneer beide gedeelten der vraag tot hun recht komen, zoowel tot het gebied der entomologie als tot dat der botanie. Zoodanige gelijktijdige studie nu van twee verschillende, ieder zeer uitgebreide, wetenschappen wordt, tenzij daartoe, gelijk in casu, eene bijzon-

dere aanleiding bestaat, bij denzelfden natuuronderzoeker slechts zelden aangetroffen. Voor het zuiver entomologische gedeelte der verhandeling acht de eerste ondergeteekende zich dan ook geen bevoegd beoordeelaar, en op zijn verzoek heeft de tweede ondergeteekende, die voor zich dit bezwaar niet maakte, de redactie van dit onderdeel van ons Rapport op zich genomen.

De bijzonderheden van den inhoud der verhandeling te vermelden, mag overbodig heeten, na de uitvoerige mededeeling daarvan door den tweeden ondergeteekende, bij de aanbieding van het stuk in onze vergadering gedaan. Wel willen wij echter doen uitkomen, dat de schrijver de klippen eener eenzijdige, hetzij botanische, hetzij entomologische behandeling van het onderwerp (waarop de meeste vroegere onderzoekers vervallen zijn), heeft vermeden, en dat hij reeds daardoor in staat is geweest om sommige tot dusverre duistere punten tot klaarheid te brengen.

De methode van zijn onderzoek is de tegenwoordig algemeen als juist erkende, om zich niet bij den volwassen toestand van het orgaan te bepalen, maar om de geheele ontwikkeling uit den jongsten waarneembaren toestand na te speuren. Daartoe heeft hij zoowel de in de vrije natuur voorkomende wespen en gallen opgezocht, en waar het kon gefixeerd, als door eigen culturen, op vernuftige en eenvoudige wijze, de vorming en ontwikkeling der gallen, door bepaalde diersoorten te weeg gebracht, stap voor stap nagegaan.

Een der voornaamste verdiensten van de verhandeling des Heeren Beyerinck is namelijk gelegen in de volledige beschrijving van de ontwikkelingsgeschiedenis der gallen, van het oogenblik af waarop de eieren gelegd worden. Voor zulk een behandeling van zijn onderwerp was het natuurlijk noodzakelijk, over een zeer rijk materiaal te beschikken, en wel vooral van de allerjongste toestanden, welke uit den aard der zaak het moeilijkst te vinden zijn. Vroegere onderzoekers, zooals Lacaze-Duthiers eu Prillieux, kenden deze eerste ontwikkelings-stadiën niet, en het is grootendeels daaraan toe te schrijven, dat voor hen de belangrijkste

vragen over de oorzaken der galvorming onoplosbaar bleven.

Het lag in den aard der zaak, dat slechts eene nauwkeurige kennis van de levenswijze der galwespen, en vooral van de gewoonten, die zij bij het leggen der eieren volgen, de middelen aan de hand kon doen om de galvormingen in haar jongste toestanden te leeren vinden.

In de allereerste plaats moet hier het tot voor weinige jaren voor galwespen onbekende verschijnsel der generatie-wisseling genoemd worden. De vormen, door LINNAEUS en anderen als afzonderlijke soorten beschreven, werden nog algemeen als zoodanig beschouwd, toen in het jaar 1873 BASSETT de waarneming deed, dat galwespen, uit bepaalde galvormen te voorschijn gekomen, door het leggen van eieren in eikenknoppen of op andere deelen van den eik, aanleiding geven tot het ontstaan van andere gallen, waaruit zich later wespen met andere soortelijke kenmerken dan die van het moederdier ontwikkelen. De juistheid van BASSETT's waarneming werd door BEYERINCK voor een inlandsche soort bevestigd gevonden, toen hij zag dat de gallen, door Teras terminalis veroorzaakt, volkomen gelijk waren aan die van Biorrhiza aptera, en dat dit dier op zijn beurt weer als het moederdier der terminalis-gallen beschouwd moet worden. Nadat deze waarnemingen gedaan waren, verscheen een uitvoerige verhandeling van ADLER over de generatie-wisseling der galwespen, waaruit bleek dat bijna alle zoogenoemde soorten twee aan twee slechts generatiën eener zelfde soort zijn. Voor een aantal der door ADLER beschreven gevallen levert de onderzoeking van BEYERINCK een zeer gewenschte bevestiging.

Het groote belang van de kennis van dit feit voor de studie van de ontwikkelingsgeschiedenis der gallen springt gemakkelijk in het oog, wanneer men bedenkt, dat men, om den aanvang der vorming van een bepaalde galsoort te bestudeeren, de knoppen opzoeken moet, waarin door een dier, uit een geheel anderen vorm voortgekomen, eieren gelegd zijn. Wil men dus in den tuin de ontwikkeling der gallen nagaan, dan moet men daartoe alzoo vooraf galwespen van een andere soort verzamelen. Zoolang men niet weet, welke

soorten bij elkander behooren, is dus het onderzoek uiterst onzeker, zoo niet onmogelijk.

De generatie-wisseling der meeste galwespen is van dien aard, dat men eene voorjaars- en eene najaarsvorming van gallen kan onderscheiden; uit de voorjaarsgallen plegen mannelijke en vrouwelijke individuen te voorschijn te komen, die in Juni of Juli op het jonge eikenloof of in de zomerknoppen eieren leggen (de vroegere geslachten Andricus, Spathegaster). Uit de najaarsgallen pleegt een ongeslachtelijke generatie (de vroegere geslachten Neuroterus, Dryophanta, Aphilothrix partim) te komen, die de rustende knoppen aanboort, en daartoe van een veel sterker ontwikkeld legboor-apparaat voorzien is. De betrekking tusschen den bouw van de legboor en de organen, waarin de eieren gelegd worden, is in alle behandelde soorten door den Heer Beyerinck met zorg bestudeerd, terwijl de anatomische bijzonderheden van de legboor, met de daarbij behoorende organen, in vele gevallen door teekeningen weergegeven zijn.

Uit het medegedeelde blijkt, dat de studie van de generatiewisseling, de levenswijze en den lichaamsbouw der galwespen, door den Heer Beyerinck is dienstbaar gemaakt aan het onderzoek van de ontwikkelingsgeschiedenis der gallen. Doch hieruit mag geenszins afgeleid worden, dat deze punten slechts terloops of als bijzaak behandeld zijn. Integendeel, de verhandeling ontleent een niet onbelangrijk deel harer wetenschappelijke waarde juist aan de talrijke waarnemingen, die door den Heer Beyerinck op dit tot nu toe nog zoo weinig beoefende gebied verzameld en beschreven zijn. Daarenboven stelt de uitvoerige behandeling van dit gedeelte van zijn stuk anderen, die zijne waarnemingen mochten wenschen te herhalen, in staat dit te doen, zonder eerst zelf alle daaraan verbonden bezwaren te behoeven te overwinnen. De methode van het onderzoek mogen wij dus, ook voor de oplossing van latere vragen, van nu af als gegeven beschouwen.

En wat nu het onderzoek naar de vorming en de anatomische structuur der gallen zelve betreft, ook hieraan is

groote zorg besteed. Van ongeveer 50 inlandsche vormen van Cynipidengallen, door den Heer BEYERINCK in de laatste vijf jaren levend onderzocht, heeft hij steeds kunnen bepalen, waar en hoe het ei gelegd werd, waaraan zij hun ontstaan te danken hadden, en welke plantaardige weefsels voor hunne vorming gebruikt werden. Het belangrijkst zijn echter de gevallen, waarin hij de galvorming van den aanvang bespied, de ontwikkeling daarvan trap voor trap gevolgd, en in afzonderlijke hoofdstukken, naar de soorten der bladwespen betiteld, beschreven heeft.

Op de gedetailleerde beschrijving van het geheele proces der eilegging volgt dan een uitvoerig onderzoek van het jeugdige plantenweefsel (meristeem van het vegetatiepunt, of van het blad in knoptoestand, of phloëem van wortel of stengel in procambialen staat), dat met het dierlijk voorwerp in aanraking is gekomen. Wel blijft ook voor den schrijver de eigenlijke oorzaak verborgen van de merkwaardige wijzigingen in celdeeling, wandverdikking en differentieering der elementen, welke onder den invloed van het insect, en bij elke species in eigen vorm ontstaan, maar uit zijn onderzoek blijkt alvast de onjuistheid van sommige vroegere meeningen. Hij toont aan, dat de genoemde verandering geen gevolg is van verwonding, maar uitgaat van de groeiende en nog in de eischaal besloten larve; dat zij op één punt begint en, van daar allengs zich uitbreidende, een eigen vormingsweefsel, door hem *galplasteem* genoemd, doet ontstaan; dat die werking der larve niet eene momentane, maar eene langdurige moet zijn, want zoo de larve sterft kan de gal hare volledige ontwikkeling niet bereiken.

Merkwaardig is evenzoo de beschrijving der verdere ontwikkeling van dat galplasteem, hetwelk door om- en overwalling de zoogenaamde larvenkamer vormt, en later zich differentieert in verschillende cellenlagen, reeds door LACAZE-DUTHIERS ontdekt, welke tot voedsel en beschutting voor de larve dienen.

In één woord, in de verhandeling van den Heer BEYERINCK zien wij het resultaat van een grondig, wetenschappelijk onderzoek, dat, al zij het ook niet gesloten, en al zouden

wij ook niet alle uitspraken en voorstellingen geheel willen onderschrijven, toch naar onze meening de kennis van een belangrijk en moeilijk onderwerp eene schrede voorwaarts brengt en tot nieuwe onderzoekingen den weg baant. Wij aarzelen dan ook niet, om aan de Afdeeling voor te stellen, de genoemde Verhandeling in de werken in 4⁰ der Akademie op te nemen.

Wat aangaat het van het Bestuur der Afdeeling ontvangen verzoek, om, met het oog op de financieele krachten der Akademie, uit de vele platen, die de verhandeling vergezellen, eene keus te doen en diegene buiten te sluiten, welke, zonder aan de duidelijkheid van den tekst te kort te doen, gemist kunnen worden, zoo komt het ons bezwaarlijk voor, om uit de figuren, die toch door den Schrijver niet zonder reden zijn bijgevoegd, een greep te doen. Wij zouden daardoor allicht schade toebrengen aan de duidelijkheid der voorstelling, en wij zouden het ook betreuren, zoo de gekleurde figuren, welke niet alleen de natuur getrouw weergeven of onbekende zaken afbeelden, maar zelfs eene artistieke waarde hebben, alleen om financieele redenen achterwege bleven. Maar wij geven het Bestuur der Afdeeling in overweging om ons te machtigen, in overleg met den Schrijver na te gaan, of niet wellicht een paar platen des noods geheel weggelaten, en onderscheiden figuren minstens op de helft verkleind konden worden, zonder in duidelijkheid te verliezen, waardoor dan de drukkosten belangrijk verminderd zullen worden.

N. W. P. RAUWENHOFF.
HUGO DE VRIES.



DE OEVERAFSCHUIVINGEN IN ZEELAND

EN HAAR VERBAND MET DEN

AARD DER GRONDLAGEN

DOOR

G. VAN DIESEN.

De oevers langs de Zeeuwsche stroomen vertoonen een verschijnsel, waarvan de gevolgen soms zoo noodlottig zijn, dat een ernstig nagaan van de oorzaak en het opsporen van middelen van bedwang veler hoofden al vóór tijden hebben bezig gehouden.

Het verschijnsel, dat met den naam van *oeverafschuivingen* kan worden bestempeld, heeft van ouds velerlei namen gehad, naarmate van den omvang, de wijze van afschuiving, de soort van afgeschoven grond en de plaats; zooals: grondbraak, val, grondval, slikval, dijkval enz. Laatstgenoemde naam duidt de afschuiving aan in haar meest gevreesden vorm, waarbij zij zich tot een dijk uitstrekt, die gedeeltelijk mede wordt verzwolgen, zoodat de polder, die door den dijk wordt beschermd, met den eerstvolgenden vloed kan worden overstroomd, kan »vloeijen".

De oeverafschuivingen nemen aan de stroomen in en nabij Zeeland afmetingen en vormen aan, die in andere deelen van Nederland niet bekend zijn. Dit, zoowel als het veeltijds nog onverwachts voorkomen der afschuiving, maakt het wenschelijk, dat niet alleen in materieel opzigt de aandacht op het verschijnsel blijve gevestigd, maar dat ook de wetenschap er nader kennis van neme.

Voldoende kennis van het wezen der afschuivingen in Zeeland wordt nog gemist; is althans niet in zoodanig algemeen bezit als het belang der oeververdediging zou vorderen. De kennis der middelen van verdediging is meer vooruitgegaan dan die van de wegen des vijands, waartegen die middelen worden aangewend.

In het belangrijke in 1862 uitgegeven Verslag van den Raad van den Waterstaat voor de oeververdediging in Zeeland, benoemd in 1860, worden wel vele wenken gegeven en verbeteringen aanbevolen, die sedert bij de oeververdediging met vrucht zijn nagekomen, maar van vermeerderde kennis in deze eeuw omtrent het wezen der oeverafschuivingen geeft dat verslag geen blijken. Het verschijnsel wordt op blz. 16 van dat Verslag door den Raad nog aangeduid door de volgende bewoordingen van het op 20 September 1771 door het Zeeuwsch Genootschap der wetenschappen bekroond antwoord van B. Nebbens op de uitgeschreven prijsvraag naar de redenen, middelen van voorkoming en van herstel der oeverafschuivingen.

»Het zijn die schadelijke en meesttijds zonder eenige »voorteekens, onverwagte en schielijke wegvallingen van ge»heele vakken in de voor de zee liggende gronden of weij»landen, 't zij schorren, onbegroeide slikken of zandgron»den, waarmede dikwijls de zeedijken in het tallu, ja tot »in de kruin en somwijlen geheel in een oogenblik, met »derzelver zate en voorschreven voorgrond wegvallen, breken »en hunne plaats in meerdere of mindere diepte veranderen, »zoodat de polders en landen, voor of omtrent welke zoo»danige vallen gebeuren, in meerder of minder gevaar van »overstrooming gebragt worden en zelfs somwijlen daardoor »geheel komen te inunderen."

Op de juistheid dezer beschrijving van het verschijnsel is trouwens niets af te dingen.

Als bijzondere omstandigheden, waaronder de vallen plaats hebben, noemt Nebbens de volgende op.

1°. Zij geschieden meestijds zonder voorteekens, doorgaans onverwachts en op 't schielijkst.

2°. Alles wat ondermijnd of tot den val geschikt is

valt niet eensklaps weg, maar dikwijls met stukken en brokken, het eene voor en het andere na.

3°. De kolken of grondgaten door de vallen gevormd hebben meerendeels steile oevers of kanten, onregelmatige figuren en ook een ongelijken grondslag.

4°. Die kolken zijn doorgaans voorzien van een of meer uitgangen of geuten, naar de diepte en het digtst bijgelegen kanaal of vaarwater gaande en in dezelve uitkomende.

5°. De grondbraken geschieden veelal bij lage ebben in stil weder met aflandige winden en gierstroom.

6°. Zij hebben meest plaats waar sterke stroomen of tijen langs en op den wal henen schieten of daar draaijingen en malingen van het tije of zoogenaamd neer gaan.

7°. Daar veel val van water, namelijk hooge vloeden en lage ebben plaats hebben, gelijk ook daar meer eb dan vloed gaat.

8°. Waar steile oevers en diepe kanalen of vaarwaters plaats hebben.

9°. Waar de gronden met doorgaande lagen vaste derry, klei of andere vaste stoffen en daaronder losse derrij, spier, kwijlzand, schulpzand of andere losse stoffen zamengesteld zijn.

10°. Vallen of grondbraken gebeuren zelden waar zware zeeën of slag van water op den wal en de oevers staat.

In de opgaven der oorzaken van een val bepaalde Nebbens zich tot algemeene trekken, zooals de ongelijksoortigheid der grondslagen, de meer of mindere beweegbaarheid en vloeibaarheid dier lagen. Ook kende hij aan onderaardsche wateraderen of wellen, »holten of wulven", ontstaan door de wegstrooming van losse stoffen onder »vast zamenhangende lagen, die bleven hangen" invloed toe, en vooral aan de verdieping, die door de vloed- en ebstroomen nabij den oever werd gebragt.

Bij gemis aan verzameling van naauwkeurige opgaven kwam de opsporing der oorzaken niet verder, nadat die verhandeling te gelijk met twee andere van B. Renou en van C. de Kanter in het Derde Deel van de Verhandelingen van het Zeeuwsch genootschap het licht had gezien.

Ofschoon slechts in grove trekken door Nebbens aange-

geven worden de bijzonderheden, die volgens zijne opgave met de afschuivingen gepaard gaan, grootendeels ook nu nog aangetroffen. Bij eene wetenschappelijke behandeling der zaak zal van dienst kunnen wezen de opgaaf van de wateren, waaraan in zijn tijd de afschuivingen zich *niet* en die waaraan zij zich *wel* vertoonden *).

---

*) Nebbens zegt dat geene afschuivingen voorkomen in:

het Goese diep;

Welsingen;

aan de Zuid-Watering sedert 1745 (dus, zegt hij, sedert 25 à 26 jaar) niet meer;

en aan den Westkappelschen Zeedijk.

Het eerstgenoemde diep en dat langs Welsingen, destijds geene belangrijke vaarwaters, liggen thans grootendeels als aangeslibt land binnendijks.

In vroegere tijden dan die Nebbens op het oog heeft, namelijk in het begin der 15de eeuw, hebben blijkens de „stadsrekeningen van Middelburg van 1365 tot 1449" door H. M. Kesteloo, opgenomen in het *Archief* van het Zeeuwsche genootsshap, Deel V, 2de stuk, blz. 251, toch afschuivingen in den oever bezuiden Arnemuiden plaats gehad.

De Zuidwatering werd ontzet door de verplaatsing van den Zuidelijken mond van het Sloe oostwaarts. Zij is door de afneming van de Kaloot thans weder meer blootgesteld aan uitschuring.

Voor den Westkappelschen dijk ligt een onderzeesch breed strand.

Of aan het Oostgat, dat er langs loopt, nimmer afschuivingen onder water plaats grijpen is niet bekend. De peilingen strekken zich zoo ver niet uit.

In het algemeen kan men ook met A. Caland in de noot op blz. 143 van zijn „Handleiding tot de kennis der dijksbouw en zeeweringkunde" aannemen, dat aan de stranden aan zee vallen of oeverafschuivingen weinig voorkomen.

Dit is waarschijnlijk, zooals daar ook gezegd wordt, hieraan toe te schrijven, dat de stroomen, in de ruime zee zich vrijer bewegende, minder diepe geulen en minder steile glooijingen vormen dan waar zij tusschen oevers gedrongen zich bewegen.

Dat die gunstige omstandigheid zich ook bij „oude oevers" zou voordoen, zooals in dezelfde noot van genoemd werk wordt gezegd is minder gegrond en wordt ook door de ondervinding tegengesproken.

Als oevers, die in zijn tijd door de afschuivingen werden geteisterd, noemt Nebbens die van de eilanden Schouwen, Duiveland, Zuid- en Noordbeveland en de Noordzijde van Walcheren. Hij wijst nader als punten aan:

Burgt;

de Zuidhoek bij Zierikzee;

het Zijpe;

Ten einde het wezen der afschuivingen nader te leeren kennen is het wenschelijk, dat van iedere afschuiving de bijzonderheden naauwkeurig worden nagegaan, aangeteekend en met die van andere afschuivingen worden verzameld op eene wijze. die vergelijking gemakkelijk maakt.

Mijn werkkring in Zeeland gaf mij de gelegenheid met zoodanige verzameling van gegevens een aanvang te doen maken.

De daardoor vervaardigde lijst van 90 vallen is hierbij gevoegd (Bijlage I). Zij is op verre na niet volmaakt. doch beantwoordt althans eenige vragen en zal, indien zij wordt bijgehouden en op peilingen gegrond is, waaraan de noodige zorg wordt besteed, meer en meer tot opheldering van menige nog duister gebleven omstandigheid kunnen bijdragen.

Het is aan te bevelen daartoe o. a., een opgaaf van de grootste steilte er aan toe te voegen.

Diepte, gevormd vóór een oever, tengevolge van de uitschuring door sterke stroomen van eb en vloed, ofschoon niet volstrekt vereischt, bevordert ontegenzeggelijk de afschuivingen. Over groote uitgestrektheid langs den oever behoeft de diepte, voor de afschuiving gevorderd, niet altijd te zijn uitgeschuurd. Bij de aanzienlijke afschuiving van 1856 aan den Wilhelminapolder was slechts plaatselijk de diepte voor den wal gevormd of genaderd. Ditzelfde is bij den grooten val van 11 Augustus 1881 voor den Oud Noôrdbevelandpolder waargenomen.

Ouwelecq of West-Orizand;
Oud-Noordbeveland;
Ellewoutsdijk;
en de oever tusschen de stad Veere en 't fort den Haak.

Burgt mag thans als in rust worden beschouwd, ofschoon in 1878 of 1879, blijkens de jaarlijksche peiling, onder water nog een grondverplaatsing moet zijn geschied. Bij den Zuidhoek van Schouwen evenals aan de geheele Zuidkust van dien polder heerscht nog geen volmaakte rust, evenmin als aan het Zijpe en bij het fort den Haak. De polder van Ouwelecq is sedert een eeuw de prooi der golven. Van Ellewoutsdijk is voor het tegenwoordige het gevaar gekeerd. De oever voor Oud-Noordbeveland, die een halve eeuw in rust gelaten werd, wordt in den laatsten tijd opnieuw aangevallen.

Zijn de opgaven vertrouwbaar dan zouden afschuivingen ook wel bij eene flauwe helling hebben plaats gegrepen. Zeker is het dat zij soms wegblijven ter plaatse, waar zij op grond van waargenomen steile hellingen. konden verwacht worden.

Ontbreekt althans van het eerste, zoo dat waar is. nog eene aannemelijke verklaring, merkwaardig is de vorm van het gat, dat door de afschuiving veeltijds in den oever zich afteekent.

De vorm is namelijk niet altijd die van een flaauw gebogen cirkelsegment met de koorde aan de zijde van den stroom, welken vorm men bij eene afschuiving gewoonlijk mag verwachten, maar veelal die van een landwaarts inspringend en zich verbreedend, oploopend gat met eene betrekkelijk naauwe opening aan de rivierzijde.

Het gat, waaruit de grond is weggeschoven, dringt zich zelfs wel zijdelings achter een zinkstuk of achter een op andere wijze bekleed of bezwaard gedeelte van den bodem.

Om een juiste kennis te verkrijgen van de grondverplaatsing zou men in het bezit moeten zijn van naauwkeurige peilingen digt bij elkander en over groote uitgestrektheid verrigt, zoowel kort vóór als kort na den val. Zoodanige volkomen opneming is nog niet gedaan en is ook moeijelijk.

De bekleeding van den bodem houdt, waar zij zwaar genoeg is belast, de voortschrijding van een val dikwerf tegen en ontneemt dan daaraan den regelmatigen komvorm.

Evenzoo doen vaak dijken en dammen; vermoedelijk door de zamendrukking van den grond onder hun gewigt. Voornamelijk doen zij dit waar de grootste diepte van de afschuiving niet digt bij den dijk is, maar deze alleen door het achterste ondiepe gedeelte van den val wordt aangeraakt.

De kanten van het gat, zoover zij boven water zigtbaar zijn, gaan gewoonlijk steil naar beneden; de bodem onder water ligt, behoudens ongelijkheden door afgeschoven stukken gevormd, onder eene helling buitenwaarts. Hebben de peilingen, voor dat de val plaats greep, zich ver genoeg buitenwaarts uitgestrekt, dan kan den eersten tijd de afgeschoven grond in de diepte worden weergevonden.

Het wel eens geuit vermoeden dat de verzinking loodregt

geschiedt wordt door geen waarneming gesteund, en is welligt ontstaan door dat men tengevolge van onvoldoende peiling, den weggeschoven grond in de diepte niet terugvond.

Het steile beloop van den boven water zigtbaren kant der afschuiving, de groote verdieping, die gepeild wordt in het beloop der afschuiving en de onvolledige wijze, waarop het dwarsprofil van de afschuiving veelal wordt geteekend, kunnen mede tot dat vermoeden aanleiding hebben gegeven.

Op de profillen eener afschuiving ziet men meestal als grenspunt aangegeven het punt, waar voor en na den val dezelfde diepte gepeild werd, ofschoon het mogelijk en veelal zelfs zeer waarschijnlijk is, dat het vlak van afschuiving lager ligt.

Aannemelijk is de meening dat de afschuiving meestal aanvangt bij eb en wel te eerder naarmate deze, zooals in springtijen, lager afloopt dan gewoonlijk

Onder dien invloed kan de afschuiving ook op een ander tijdstip van het getij intreden, zoo als laatstelijk het geval was met den belangrijken val bij Glasjesnol aan den Oud Noordbevelandpolder. Deze had wel plaats in het springtij (11 Augustus 1881) maar nog twee uur voor L. W. toen het water nog een meter moest dalen, en wordt toegeschreven, door den ingenieur H. E. de Bruijn, aan den bijzonder hoogen vloed, die was voorafgegaan.

Daar de afschuiving, ofschoon gewoonlijk plotseling en schielijk geschiedende, eenigen tijd noodig heeft, indien zij, zooals somtijds het geval is, brokswijze van de diepte bovenwaarts zich uitbreidt, zoo kan het gebeuren, dat de vloed reeds eenigen tijd is ingetreden op het oogenblik, dat men het verschijnsel bovenwater waarneemt.

Men meent wel den aanvang eener afschuiving nog voor zij zigtbaar was door een geluid als het rommelen van den donder gepaard met dreuning te hebben waargenomen. Deze en andere verschijnselen bevestigen de meening, dat de afschuiving niet altijd over den geheelen omvang van de wegschuivende massa in eens zich uitstrekt, maar ook wel brokswijze, beginnende bij het laagste gedeelte, kan plaats grijpen.

Het onderzoek, aangewend om bekend te worden met het gevaar dat een oever liep van door afschuiving te worden vernield, bestond tot nog toe in *peilingen*, *grondboringen* en *duikingen*.

De *peilingen* zijn van de oudste dagteekening. Door de zorg der besturen van de polders geschieden zij eens of meermalen 's jaars, naarmate van de grootte of van de nadering der diepte voor den wal.

Diepten van 40 en 50 Meter zijn in Zeeland geene zeldzaamheid. De krachtige in- en uitstrooming van de zee veroorzaakt voor een aangevallen oever soms verdiepingen van 6 à 10 Meter tusschen de tijdstippen van twee peilingen, die om het jaar of om het halfjaar gedaan worden.

Wil men de peiling tot de grootste diepte uitstrekken dan moet men zich meestal ver van den wal verwijderen, hetgeen ten nadeele kan zijn van de naauwkeurigheid, daar het dan moeijelijk is de draad of lijn, waarmede men den afstand uit den wal meet, strak en in de goede rigting te houden. Het peilen door de polderbesturen geschiedde dus veelal niet tot de grootste diepte, maar tot den afstand uit de laagwaterlijn, waartoe de meetdraad strekte.

De nadering der geul of van de grootste diepte werd dan niet altijd waargenomen, en hieraan is misschien het onverwachte van menige afschuiving toe te schrijven, waarvan men melding vindt gemaakt.

Aan aansporing der polderbesturen tot het uitstrekken der peiling tot in en liefst voorbij de grootste diepte heeft het den laatsten tijd niet ontbroken. Daar men meer en meer gevolg geeft aan de aanbeveling, om den afstand uit den wal door middel van hoekmeting te verifieeren, mag men op den duur eene verzameling van meer naauwkeurige gegevens dan de vroegere te gemoet zien.

In de laatste jaren zijn ook *grondboringen* verrigt tot nasporing of in de hoedanigheid der grondlagen welligt kan gevonden worden eenig verband met het voorkomen van afschuivingen. Dit onderzoek naar de gesteldheid van den bodem was reeds aanbevolen door den Raad van den wa-

terstaat voor de oeververdediging in Zeeland, benoemd in 1860 (§ 128 van het Verslag).

De bedoelde boringen zijn gedaan voor polders, wier oevers door afschuivingen te lijden hadden, namelijk voor den:

Bruinisse polder;
Scherpenisse polder;
Vliete polder;
Oostbeveland polder;
den polder Breede Watering bewesten Yerseke;
Borssele polder;
Hoofdplaat polder;
Nieuwe Neuzen polder;
Margaretha polder;
Kleine Huissens polder,
en Eendragt polder.

Tot voortzetting van het wetenschappelijk onderzoek zou het wenschelijk zijn, dat aan enkele polders nog meer en dat ook nog aan andere oevers boringen geschiedden en de opgeboorde stoffen op dezelfde wijze wierden onderzocht.

Eene aanvankelijke uitkomst van het onderzoek, dat van de opgeboorde grondsoorten met naauwkeurigheid door Dr. F. Seelheim plaats had, en waarvan een Verslag onder den titel : *De grondboringen in Zeeland*, in 1879, in de Verhandelingen der Akademie is opgenomen, is deze, dat inzonderheid hetgeen hij noemt het diluviale zand, hetwelk veel werd aangetroffen, zich tot afschuiving gemakkelijk leent, daar dat zand weinig zamenhang heeft, gemakkelijk beweegbaar en voor water doordringbaar is.

Eene naauwkeurige vergelijking van de diepte, waarover eene afschuiving plaats had, met de waargenomen hoedanigheden en dikte der grondlagen kan, zooals nader zal worden aangetoond, zamenvalling van omstandigheden doen ontdekken, die tot eenige verklaring kan leiden.

De *derde* wijze van onderzoek van den onderzeeschen bodem, namelijk door iemand, uitgerust met helm en duikerpak, in het water te doen nederdalen, is door het bestuur van den polder van Schouwen in het werk gesteld en later ook door

enkele andere polderbesturen nagevolgd. Dit onderzoek moest zich natuurlijk bepalen tot de oppervlakte van den bodem en tot het vernemen van de mondelinge mededeelingen, die men van de bevinding des duikers verkreeg.

Het hoofddoel daarbij was na te gaan of de bodem nog bekleed was met het rijshout en den steen, die er in vroegere jaren op gebragt waren, en of men dus den bodem als nog genoegzaam beschermd tegen wegschuring mogt beschouwen.

Voor het leeren kennen van den aard, het wezen en de nadering van eene oeverafschuiving zijn van de drie middelen ongetwijfeld met zorg uitgevoerde peilingen der diepte, vergeleken met de uitkomst van de grondboringen, de meest geschikte.

Voor eene zoodanige vergelijking heb ik de aan het einde dezer verhandeling geplaatste tabel (Bijlage II) zamengesteld uit de opgaven van Dr. Seelheim en bekende diepten, en heb ik daaraan toegevoegd hetgeen omtrent belangrijkheid van oeverafschuivingen in de nabijheid der boringen mij bekend was.

Eene inzage van die tabel, van bijlage I en van de profillen in de Verhandeling van Dr. Seelheim kan, naar het mij voorkomt, reeds tot enkele gevolgtrekkingen leiden, die door voortgezette verzameling van waarnemingen later meer uitgebreid moeten worden.

In de *eerste* plaats blijkt dat *groote* diepte der geul in de nabijheid van den oever wel een belangrijke faktor is in den toestand, die eene oeverafschuiving veroorzaakt, maar niet een onmisbare en ook niet de eenige faktor.

Al dadelijk moet ik doen opmerken dat de uitdrukking »groote diepte" in betrekkelijken zin moet worden verstaan, omdat in vergelijking met die, welke in de stroomen en vaarwaters elders in Nederland voorkomen, de diepten, waarvan hier sprake is, *alle* groot mogen genoemd worden.

Dat ook bij diepten, die in Zeeland niet tot de aanzienlijke behooren, afschuiving van den oever kan plaats vinden, blijkt o. a. bij de oevers voor den Elisabeth polder en den Nieuwen Neuzen polder aan den Brakman, voor den

Hoofdplaat polder en den Eendragt polder aan de Westerschelde en voor den Anna polder aan de Zandkreek.

De diepte voor den eerstgenoemden polder bedroeg hoogstens 13.50 M. beneden L. W., en niettemin werden de oever en de dijk van dien in 1866 bedijkten polder van 1868 tot 1870 door aanhoudende afschuivingen zeer verontrustend bedreigd. Deze afschuivingen, waarvan het ontstaan welligt is toe te schrijven aan de vernaauwing van den mond van den Brakman, door de genoemde bedijking, zijn in de laatste jaren gevolgd door vele afschuivingen aan de overzijde, namelijk aan het gedeelte van den oever voor den Nieuwen Neuzen polder, dat aan den Brakman gelegen is, waar bij diepten van 15 M. beneden L. W. en minder, in vrij belangrijke afmetingen, het verschijnsel plaats vond. Aan den Hoofdplaatpolder deden zich bij geringe diepten, tot van 10 à 12 M. beneden L. W., verscheidene afschuivingen voor.

De oever van Eendragtpolder onderging 27 Februarij 1876 eene afschuiving van vrij aanzienlijken omvang, nadat kort te voren op 220 M. uit de L. W. lijn eene diepte van 22.50 M. onder L. W. of van 24.55 M. beneden A. P. en dus een zeer flaauw beloop, althans bij vergelijking der uiterste punten, was gevonden.

Bij den Anna polder, voor welken eene diepte van 25.53 M. A. P. was gepeild, viel den 12 Januarij 1878 eene belangrijke afschuiving voor, die geheel het karakter bezat, dat aan afschuivingen in diluviaal zand eigen schijnt te zijn; van welke grondsoort de aanwezigheid bij den Anna polder mag worden ondersteld uit de boring bij de Vliete en Oostbeveland polders (zie profil 5). Vóór den soortgelijken val van 1866 aan den Anna polder was eene diepte van slechts 17.93 M. beneden A. P. waargenomen.

Zijn groote diepten alzoo niet onmisbaar, evenmin kan men zeggen, dat zij eene afschuiving veroorzaken overal waar zij voorkomen. Een voorbeeld daarvan levert het gedeelte van den oever voor Borssele, waar de boringen 28, 29, 30, 31 en 32 gedaan zijn, en waar eene diepte zelfs van ruim 50 M. beneden A. P. wordt gevonden, zonder dat er afschuivingen voorkomen.

Een ander sterk sprekend voorbeeld is dat van den oever voor Ellewoutsdijk, die vroeger zeer geteisterd werd, maar afschuivingen van eenige beteekenis sedert vele jaren hebben opgehouden zich voor te doen, ofschoon daar vroeger weinig en in den laatsten tijd in het geheel geene verdedigingswerken werden gemaakt, nog in 1860 eene diepte van 36 tot 41 M. onder A. P. stond (zie Verslag van den Raad van oeververdediging bl. 58) en thans nog eene diepte van 32 M. beneden A. P. wordt gevonden, blijkens het profil N⁰. 2 van Dr. SEELHEIM's verhandeling.

De tegenwoordige rust aan den oever voor Ellewoutsdijk is vooral merkwaardig, indien men met Dr. SEELHEIM (zie de profilen 2 en 6) mag aannemen, dat de geul eene belangrijke dikte diluviaal zand doorsnijdt. Het langzaam verondiepen der geul en het flaauwer worden der glooijngen onder water, door de afwending van den hoofdstroom, moeten dan als verklaring gelden, zoolang boring bij dezen oever geen ander licht verspreidt.

Een *tweede* gevolgtrekking, die men uit de vergelijking van de uitkomst der boringen met het voorkomen van vallen kan maken is deze, dat de kans van afschuiving zeer vergroot schijnt te worden naarmate de laag van diluviaal zand over groote dikten doorsneden en vooral, wanneer zij met den bovenkant hoog gelegen is.

Bij de oevers van de Vliete-, Oud Noordbeveland-, Oostbeveland- en Wilhelminapolders, waar de grootst bekende afschuivingen werden ondervonden, geven de boringen en dieptepeilingen ook de grootste doorsneden dikten der diluviale zandlagen aan, namelijk dikten van 33.50 M., 36.25 M. en 35 M., gepaard met eene hooge ligging van het bovenvlak.

Dit bovenvlak bereikt bij den Vlietepolder bij een der boorpunten zelfs de hoogte van 1.03 M. — A. P. en bij den Oostbeveland polder die van — 3.20.

De afschuivingen bij deze polders hebben den eigenaardigen landwaarts zich verbreedenden en inspringenden vorm, die haar zoo gevaarlijk maakt.

Bij den Stavenissepolder wordt de diluviale zandlaag mede

over aanzienlijke dikte doorsneden, en hebben vooral in vroegere jaren belangrijke oeverafschuivingen plaats gehad; echter vindt men er geene omschreven van zoo grooten omvang als bij de zoo even genoemde polders, hetgeen welligt aan de mindere hoogte van den bovenkant van het diluviale zand, dat niet hooger dan — 6.63 M. is aangetroffen, mag worden toegeschreven. De zorgvuldige onderzeesche verdediging van den oever heeft ongetwijfeld bovendien veel bijgedragen tot het wegblijven der afschuivingen, die in de laatste jaren weinig voorkwamen.

De aanzienlijke dijk- en oeverval van 16 December 1876 aan den Nieuwen Neuzenpolder viel voor ter plaatse, waar boring N⁰. 14 het dikste gedeelte der door de geul geheel doorsneden en met den bovenkant vrij hoog gelegen diluviale zandlaag heeft doen kennen.

De grootste oeverafschuiving, tijdens mijn verblijf in Zeeland, is die van October 1874, bewesten de Noordnol, tusschen de peilraaijen LIV en LXII van den Borssele polder, in de onmiddellijke nabijheid der boringen N⁰. 24 en N⁰. 25 *). Welke diepte de geul bereikt had op het tijdstip dier afschuiving is niet bekend, dewijl voor den breeden vooroever destijds geene peilingen gedaan werden. De afschuiving moet dezelfde geaardheid gehad hebben als eene, die in 1864, in de raaijen LIII en LIV, dus beoosten de eerstgenoemde, is voorgekomen. De laag diluviaal zand bereikt bij den oever voor Borssele niet de diepte, die genoemde laag bij de Vliete-, Oostbeveland-, en andere polders, aan groote afschuivingen onderhevig, bereikt. Daarentegen komt die laag, ter plaatse van de afschuivingen van 1864 en 1874 nagenoeg aan de oppervlakte, en wordt dus in hare beweging door geen bedekking weerhouden, zooals het geval is bij den meer oostwaarts gelegen oever, waar de boringen 28 tot 32 eene bedekking aangeven met 6,50 tot 8 M. dikte. Aan die bedekking, die gedeeltelijk ook uit een veenlaag bestaat,

*) Bij deze punten is het diluvium *niet* door een veenlaag gedekt, zoo als foutievelijk in profiel 6 is aangegeven.

is waarschijnlijk de omstandigheid toe te schrijven, dat, als tegenhanger tegenover het westelijk eind, in den oostelijken oever voor Borssele ondanks de steile kanten van $1^1/_2$ à 2 op 1, zoover bekend is, nimmer afschuivingen of vallen hebben plaats gehad. (Prov. verslag uitgebragt in 1876 Hoofdst. XI, bl. 77).

Eene *derde* gevolgtrekking, die aan het zooeven medegedeelde de hand reikt, is deze, dat naarmate de diluviale zandlaag meer bekleed of bedekt is, hare neiging tot het vormen van afschuivingen beter wordt beteugeld en door hulpmiddelen beter kan worden bedwongen.

Tot staving van deze gevolgtrekking levert Zeeland vele voorbeelden op. Na herinnering aan het hierboven aangestipte omtrent den oever van Stavenisse polder, waar de dekkende laag eene dikte van 9 tot 10 M. bereikt, kan o. a. gewezen worden op hetgeen bij den oever van den Bruinisse polder aan het Zijpe wordt waargenomen.

Ofschoon de geul daar eene vrij aanzienlijke diepte heeft, die in de laatste jaren nog schijnt toegenomen, de oever steil staat en er een felle stroom gaat, komen er slechts zelden afschuivingen voor, en zijn deze, althans de laatst bekende, van geen aanzienlijken omvang.

De laag, die op het diluvium rust, heeft eene dikte van 16 tot 21 M., en het verdient opmerking, dat de afschuiving, die na eenigen tijd van rust laatstelijk 30 October 1875 heeft plaats gehad, is gevallen waar de laag diluviaalzand het dikste was, namelijk in den oever tusschen de boringen n⁰. 43 en 44. In den oever daarentegen nabij den »blinden dam", waar volgens het Verslag van den Raad van Oeververdediging, bl. 48, verdediging wenschelijk werd geacht wegens den beduidenden teruggang van 1855 tot 1860, en thans eene diepte van — 26.74 M. gepeild wordt, doch het diluvium volgens boring n⁰. 43 slechts over eene dikte van 6.84 M. wordt doorsneden, en het onder een alluvium-laag van 21 M. bedekt ligt, is mij geen afschuiving bekend.

De achteruitgang, die vooral het Noordelijk gedeelte van dezen polder aan het Zijpe en den Stoofpolder in het laatst

der vorige en het begin van deze eeuw heeft bedreigd, heeft hoogst waarschijnlijk in vele afschuivingen in de bovenste of alluviumlaag bestaan, tengevolge van het toenemend vermogen van het vaarwater.

Vermoedelijk zou hij door doelmatig aangewende verdedigingsmiddelen, waaraan het blijkens de berigten van deskundigen ontbroken heeft, zijn te keeren geweest.

De havendammen voor Terneuzen hebben aan hun voet een diepte van 35 tot 60 M. beneden A. P, en ondervinden geen letsel.

Het verdedigen van de glooijing onder water met steenstorting, de geringe dikte van 5.40 en 13.10 M. en de diepe ligging van het diluvium zijn daarbij ongetwijfeld te zamen zeer dienstig.

De aanzanding van den bodem eener afschuiving, waarvan het vermoedelijk uit den val afkomstige zand, dat men aan den voet gewoonlijk kan weervinden, eén groot deel vormt, schijnt mede tot beschutting te kunnen dienen. Bij verdere inscharing en afschuiving van den oever ter wederzijde blijft het ten minste langer zitten dan de ongeroerde grond er neven. Een aangrenzende val stuit gewoonlijk af op de in den vroegeren val neergezette aanzanding.

Het schijnt als of het neergezette zand niet meer ten tweedenmale het verschijnsel kan voortbrengen, en eerst moet zijn weggespoeld alvorens voortgaande uitschuring van den grond onder die neerzetting een nieuwen val kan doen ontstaan.

De door den Raad van oeververdediging aanbevolen en thans veelal gevolgde wijze van verdediging van den oever door bekleeding der glooijing ter wederzijde van den val, instede van er binnen, waarin men vroeger heil zocht, komt aan de zooeven genoemde eigenschap van een val te gemoet, ofschoon die aanbeveling uit eene andere overweging voortsproot, dan die om de eigenschap te benuttigen.

De zooeven geuite onderstelling omtrent de beschermende werking van eene bedekking met nedergezette stoffen kan misschien ook als verklaring dienen voor het ophouden van afschuivingen bij diepe geulen, waar eenige verondieping is ingetreden, zoo als bijv. bij den oever voor Ellewoutsdijk.

Hoe dit ook zij, aan geen twijfel is het onderhevig dat eene doeltreffend aangebragte kunstmatige zware bekleeding van de aan afschuiving blootstaande grondlagen een behoedmiddel is dat proefondervindelijk gebleken is goed te zijn.

Van het *alluvium*, dat bij de meeste boringen in meerdere of mindere dikte als bovenlaag is gevonden, kan met het oog op afschuivingen weinig worden medegedeeld. Het vertoont niet de bewegelijkheid van het diluvium. Als dekkende laag is het gebleken de omvangrijke afschuivingen in het onderliggende diluviale zand te kunnen tegenhouden of verkleinen, en door zijn zamenstelling voor de verdediging van den oever gemak te kunnen opleveren. Een veen- of derrielaag, zooals bij Borssele is gevonden, schijnt bijzonder gunstig als bekleeding te werken. De afschuivingen, waaraan het alluvium zelf bloot staat, zijn gewoonlijk niet van den vorm, die het gevaar oplevert van de afschuivingen in diluviaalzand. De verdediging daartegen geschiedt met weinig bezwaar.

Of de *tertiaire* grond, die alleen bij de boringen aan de Westerschelde is bereikt (zie de profillen 1, 2, 3, 4, 6 en 7), aan afschuiving meer of minder onderhevig of bevorderlijk is, kan niet op grond van waarneming worden uitgemaakt; het ligt te diep om te kunnen nagaan hoe het in omstandigheden, waarin het diluviale zand zich bevindt, zich gedraagt.

Tegen uitschuring door den stroom blijkt deze grondsoort al reeds niet bestand, zoo als de diepte der geul bij Borssele (Profil 1), bij Hoofdplaat polder (boring 1—7), bij den Nieuwen Neuzen polder (boring 13, 14 en 15) en bij Margaretha polder (boring 18 en 19) bewijst.

Vraagt men ten slotte hoe aan een oever, die door geringe diepte en flaauwe glooijing onder schijnbaar gunstige omstandigheden verkeert, eene afschuiving kan voorkomen, dan weet ik daarvan bij gemis aan meer gegevens geen andere verklaring te geven, dan deze dat in de diluviale zandlaag ergens onder water door wegschuring vermoedelijk een gedeelte onder een steil beloop is komen te staan; iets wat

Bijlage I.

Volgnummer.	Rivier of Zeearm waaraan de oever gelegen is.	Naam van de… en verdere aandui… van den…
1	**BROUWERSHAVENSCHE GAT.**	**Schouwen.** Ossenhoo…
2		**Schouwen.** Kloostern…
3	**ZIJPE.**	**Bruinisse.** Tusschen … en XXV.
4		**Bruinisse.** Bij peilra… de dijkp. 60 en 61
5	**HET KEETEN.**	**Stavenisse.** Westhave…
6		**Stavenisse.** Aan de … schen de peilraaijen
7		**Stavenisse.** Oostnol.
8	**OOSTER SCHELDE.**	**Burgh en Westland.** …
9		**Schouwen.** District … de peilraaijen LV… dijkp. 36 en 37.
10		**Schouwen.** District … de peilraaijen LV… dijkp. 35 en 36.
11		**Schouwen.** District … de peilraaijen XL… dijkp. 28 en 29.
12		**Schouwen.** District … den Plaatdijk.
13		**Vier bannen van Dui…** den Zuidbout, Zui…
14		**Scherpenisse.** Oostno…

bij de peiling niet altijd wordt waargenomen, en dat bij dat gedeelte de afschuiving is begonnen, die ook achterliggende, vooral bij doorweeking gemakkelijk beweegbare zandmassa's heeft doen volgen. Bij de beoordeeling der uitkomst van een peiling zal dus inzonderheid er op moeten gelet worden of ook een gedeelte van den oever in de diluviale laag onder eene helling van ongeveer 2 op 1 of steiler staat.

Afschuivingen voor de Kortgeensche nol aan den Annapolder hebben in 1828, 1857, 1866 en 1878 plaats gehad nadat eene voorafgaande peiling hellingen van 2, 2.3, 2.3 en 2.1 op 1 had doen kennen. Bij het nagaan der peilingen, die vóór den Oostbevelandpolder waren voorafgegaan aan den val van 1856, heb ik daarin dergelijk steile gedeelten in den onderzeeschen oever gevonden.

Is voor eene laag gemakkelijk beweegbaar zand zekere helling der glooijing te steil, dan kan een val ontstaan tengevolge van eene slechts geringe verdieping, die de gevaarlijke steilte voortbrengt. Met het oog op grootere verdiepingen in dezelfde raai kan bij de vele cijfers, die men te overzien heeft, alligt de schijnbaar onbeduidende verdieping, zoo die al is waargenomen, aan de aandacht ontsnappen.

Het streven naar de meest mogelijke naauwkeurigheid en volledigheid in de peilingen en een naauwlettend onderzoek der uitkomst met het oog op de doorsneden grondlagen zullen naar mijn inzien op den duur de beste middelen zijn tot vrijwaring tegen de onaangename verrassing van eene onverwachte verschijning van een val.

's Gravenhage, December 1881.

BIJDRAGE

TOT DE

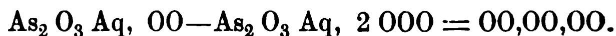
THERMO-CHEMISCHE KENNIS VAN OZON.

DOOR

E. MULDER en H. G. L. VAN DER MEULEN.

TWEEDE GEDEELTE.

Ter bepaling der thermo-chemische waarde van den vorm OO,OO,OO, of anders uitgedrukt, der hoeveelheid warmte in calorieën, die wordt gebonden bij omzetting van 3 OO in 2 OOO, derhalve van drie moleculen gewone zuurstof in twee moleculen ozon (moleculaire verdichtingswarmte niet medegerekend; zie later), werd vroeger *) uitgegaan van de vergelijking:



$$As_2 O_3 Aq, OO - As_2 O_3 Aq, 2 OOO = OO,OO,OO.$$

De waarde van $As_2 O_3$ Aq, 2 OOO (de verbindingswarmte van twee atomen zuurstof, afkomstig van twee moleculen ozon, met één mol. arsenigzuur in watervrije oplossing tot arsenikzuur †) kan door een direkte proef worden bepaald, dat niet het geval is met die van $As_2 O_3$ Aq, OO. In navolging van BERTHELOT werd voor de waarde hiervan genomen 78280^c, maar het was ons voornemen dit punt later

---

*) *Verslag en Mededeelingen*, 2de Reeks, Deel XVI, p. 286.

uitvoerig te behandelen; de waarde toch van 00,00,00 wordt voor een goed deel bepaald door die van $As_2 O_3$ Aq, 00. De vraag zou zelfs kunnen worden gedaan, of de waarde van $As_2 O_3$ Aq, 00 wel valt onder het bereik der waarneming. Voordat we overgaan tot de mededeeling van een nieuwe reeks van waarnemingen betreffende de bepaling der waarde van $As_2 O_3$ Ag, 2 000, zal een poging worden aangewend, om deze zaak meer of min tot een oplossing te brengen.

Over de calorische waarde van $As_2 O_3$ Aq, 00.

De thermo-chemische uitdrukking $As_2 O_3$ Aq, 00 heeft een andere beteekenis dan die van $As_2 O_3$ Aq, 2 O, en hierop valt zeer te letten. De laatste heeft namelijk betrekking op de verbindingswarmte van twee *vrije* atomen zuurstof met $As_2 O_3$ Aq, terwijl bij eerstgenoemde uitdrukking bedoeld werdt *gewone* zuurstof en wel één molecuul.

De waarde nu van $As_2 O_3$ Aq, 00 werd geacht indirect te kunnen bepaald worden, door arsenigzuur in waterige oplossing te oxydeeren b. v. met ioodzuur, maar dan tevens gebruik te maken van vele andere constanten (zie later). Het was langs dezen nader te ontwikkelen weg, dat THOMSEN *) meende te kunnen aannemen voor de waarde van $As_2 O_8$ Aq, 00 = 78360^c, terwijl FAVRE en SILBERMANN †) daarvoor gaven 78200^c.

Ter beantwoording der vraag, in hoeverre de constante van $As_2 O_3$ Aq, 00 wel zou kunnen bepaald worden, heeft men in de eerste plaats te letten op die van $As_2 O_3$ Aq, 2 O, om redenen, die later duidelijk zullen zijn. Om nu te vinden de waarde van $As_2 O_3$ Aq, 2 O worden met ioodzuur vijf thermo-chemische vergelijkingen vereischt, en wel:

1. $2 I O_3 H Aq, 3 As_2 O_3 Aq = 3 (As_2 O_3 Aq, 2 O) - (I H Aq, 3 O).$
2. $I H Aq, 3 O = I, 3 O, H, Aq - I, H, Aq.$

*) J. f. pr. Ch. w. F, 11. 147, 177.

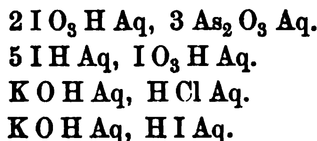
†) *Journ. Pharm. Chim.* Vol. 24, 24 (welk stuk niet werd gelezen).

3. $5\,IH\,Aq,\ IO_3H\,Aq = 3\,(2\,H,\ O) - 5\,(I, H,\ Aq) -$
$- I,\ 3\,O,\ H, Aq.$

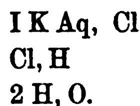
4. $IK\,Aq, Cl = Cl, H, Aq - I, H, Aq + KOH\,Aq, HCl\,Aq$
$- KOH\,Aq,\ HI\,Aq.$

5. $Cl,\ H, Aq = Cl,\ H + Cl\,H,\ Aq.$

Door de proef kunnen direct bepaald worden:

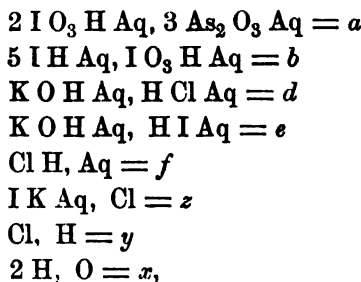

$2\,IO_3H\,Aq,\ 3\,As_2O_3\,Aq.$
$5\,IH\,Aq,\ IO_3H\,Aq.$
$KOH\,Aq,\ HCl\,Aq.$
$KOH\,Aq,\ HI\,Aq.$

Niet direct te bepalen door de waarneming zijn:


$IK\,Aq,\ Cl$
Cl, H
$2\,H, O.$

Ook andere waarden als $3\,IH\,Aq,\ 3\,O$ enz. zijn wel niet vatbaar voor een directe bepaling door de proef, maar zij kunnen afgeleid worden uit voorgaande waarden (zie later).

Noemen we kortheidshalve:


$2\,IO_3H\,Aq, 3\,As_2O_3\,Aq = a$
$5\,IH\,Aq, IO_3H\,Aq = b$
$KOH\,Aq, H\,Cl\,Aq = d$
$KOH\,Aq,\ HI\,Aq = e$
$Cl\,H, Aq = f$
$IK\,Aq,\ Cl = z$
$Cl,\ H = y$
$2\,H,\ O = x,$

dan wordt vergelijking 5 (zie boven):

5. $Cl,\ H,\ Aq = y + f,$

en verder:

4. $z = y + f - I,\ H,\ Aq + d - e$

en:

3. $b = 3x - 5(y + f + d - e - z) - (\text{I, 3 O, H, Aq})$;

daarenboven:

2. $\text{I H Aq, 3 O} = 3x - 5y - 5f - 5d + 5e + 5z - b$
$- (y + f + d - e - z) = 3x - 6y - 6f - 6d +$
$+ 6e + 6z - b,$

en eindelijk:

1. $a = 3(\text{As}_2\text{O}_3\text{Aq, 2 O}) -$
$- 2(3x - 6y - 6f - 6d + 6e + 6z - b),$

derhalve is:

$$\text{As}_2\text{O}_3\text{Aq, 2O} = \frac{1}{3}a + 2x - 4y + 4z - 4f - 4d + 4e - \frac{2}{3}b.$$

De waarden van x, y en z zijn aldus theoretisch te bepalen *):

$$\text{2 HH, OO} = 2(\text{2 H, O}) - \text{O, O} - 2(\text{H, H})$$
$$\text{HH, Cl Cl} = 2(\text{H, Cl}) - \text{Cl, Cl} - \text{H, H}$$
$$\text{2 I K Aq, Cl Cl} = 2(\text{I K Aq, Cl}) - \text{Cl, Cl}.$$

Hieruit zijn af te leiden de waarden van $x = \text{2 H, O}$ en $y = \text{H, Cl}$ en van $z = \text{I K Aq, Cl}$, en wel aldus:

$$\text{2 H, O} = \frac{1}{2}(\text{2 HH, OO}) + \frac{1}{2}(\text{O, O}) + \text{H, H}$$

$$\text{H, Cl} = \frac{1}{2}(\text{HH, Cl Cl}) + \frac{1}{2}(\text{Cl, Cl}) + \frac{1}{2}(\text{H, H})$$

$$\text{I K Aq, Cl} = \frac{1}{2}(\text{2 I K Aq, Cl Cl}) + \frac{1}{2}(\text{Cl, Cl}).$$

Schrijven we kortheidshalve:

---

*) *Scheikundige Aanteekeningen* van E. MULDER, Dl. II, (1871), p. 156 enz.

$$\left.\begin{array}{r} 2\,HH,\ OO = m \\ HH,\ Cl\,Cl = p \\ 2\,I\,K\,Aq,\ Cl\,Cl = q \end{array}\right\}$$ allen direct te bepalen door de waarneming,

en substitueeren de waarden van $2\,x$, $-\,4\,y$ en $+\,4\,z$ in vergelijking 1, dan komt men tot den vorm (daar $2\,x - 4\,y + 4\,z = m - 2\,p + 2\,q + O,\,O$ is):

$$As_2\,O_3\,Aq,\ 2\,O = \frac{1}{3}\,a - 4\,f - 4\,d + e - \frac{2}{3}\,b + m - 2p + 2\,q + O,\,O,$$

en door substitutie der oorspronkelijke waarden van a, b enz.:

$$As_2O_3Aq,\ 2\,O = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}(2\,IO_3H\,Aq,\ 3\,As_2O_3Aq) - 4\,(ClH,\ Aq) \\ -\ 4\,(KOH\,Aq,\ H\,Cl\,Aq)\ + \\ \qquad +\ 4\,(KOH\,Aq,\ HI\,Aq) \\ -\ \frac{2}{3}\,(5\,IH\,Aq,\ IO_3\,H\,Aq) \\ +\ 2\,HH,\ OO - 2\,(HH,\ Cl\,Cl) \\ +\ 2\,(2\,I\,K\,Aq,\ Cl\,Cl,) + O,\,O. \end{array}\right\} .\,(I)$$

De waarde van O, O (niet direct te bepalen) volgt uit de vergelijking:

$$As_2\,O_3\,Aq,\ 2\,O - O,\ O = As_2\,O_3\,Aq,\ OO \qquad (II)$$

Deze waarde van O, O overgebracht in (I) leidt ten slotte tot de vergelijking:

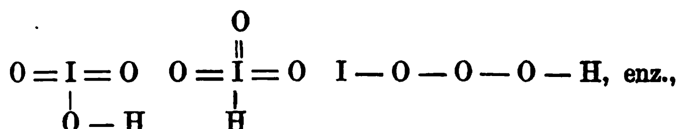
$$As_2\,O_3\,Aq,\ OO = \left\{\begin{array}{l} 2\,HH,\ OO - 2\,(HH,\ Cl\,Cl) \\ +\ 4\,(KOH\,Aq,\ HI\,Aq)\ - \\ \qquad -\ 4\,(KOH\,Aq,\ H\,Cl\,Aq) \\ +\ \frac{1}{3}\,(2\,IO_3\,H\,Aq,\ 2\,As_2\,O_3\,Aq) \\ -\ 4\,(ClH,\ Aq) + 2\,(2\,I\,K\,Aq,\ Cl\,Cl) \\ \qquad -\ \frac{2}{3}\,(5\,IH\,Aq, IO_3\,H\,Aq). \end{array}\right\} ..\,(III)$$

Voor de waarde nu van $As_2\,O_3\,Aq$, OO vond THOMSEN 78360[c] en FAVRE met SILBERMANN 78200[c], dus gemiddeld 78283[c], de waarde door BERTHELOT aangenomen. Behalve

de oxydatie-warmte van arsenigzuur in waterige oplossing door ioodzuur, alzoo de constante van: $2\,IO_3\,H\,Aq,\,3\,As_2\,O_3\,Aq$, zijn er dus nog *zeven* constanten noodig ter bepaling van de waarde van $As_2\,O_3\,Aq,\,OO$, gelijk blijkt uit de vergelijking (III).

Het medegedeelde moge voldoende wezen om te doen uitkomen — en dit was het doel dezer thermo-chemische ontwikkeling, tot nog toe niet verricht, — dat de constante der uitdrukking $As_2\,O_3\,Aq,\,OO$ vatbaar is bepaald te worden, zonder toevlucht te nemen tot deze of gene veronderstelling, die aan gemelde getalswaarden meer een theoretische beteekenis zou geven.

Volledigheidshalve moet er op gewezen worden, dat men ioodzuur verschillende structuurformules kan toekennen, en wel die van:



en ieder der drie atomen zuurstof niet een zelfde hoeveelheid cal. zullen geven bij oxydatie (zie vergelijking 1 en 3). Evenwel stellen de atomen zuurstof, die oxydeerend optreden in vergelijking 1 en 3 (tweede lid) voor: *vrije atomen zuurstof*, die dus onafhankelijk moeten zijn met betrekking tot de verbindingswarmte van ieder dezer atomen zuurstof, afgestaan door ioodzuur; en wij meenen, dat de gegeven vergelijkingen inderdaad mogen beschouwd worden juist te zijn.

Tweede reeks van bepalingen der constante van $As_2\,O_3\,Aq,\,2\,OOO$.

Methode. De wijzigingen, die werden aangebracht in de methode, zijn de volgende:

1. De glazen buizen, die de ozonhoudende zuurstof leidden naar de calorimetrische kolf, waren niet verbonden met zegellak naar de wijze van BERTHELOT, maar hare uiteinden, voor zooverre noodig, in elkander geslepen.

2. De calorimetrische kolf bezat een veel kleiner gewicht, noodwendig met het doel de waterwaarde van het glas te verminderen.

3. Door vereeniging van een glazen gashouder, bestemd voor de ozonhoudende znurstof, met een tweeden dergelijken gashouder door middel van een glazen buis (voorzien van een glazen kraan), was men in staat een betrekkelijk groote hoeveelheid van dit gasmengsel te leiden door de cal. kolf, en dientengevolge een verhooging in temperatuur van ongeveer één graad Celsius te bekomen.

4. Er werd een nieuw stel haarbuisjes, grooter in aantal, genomen, met het doel, de opname van ozon door het arsenigzuur in de cal. kolf te bevorderen.

5. Er werd gebruik gemaakt van een anderen thermometer voor de cal. kolf.

Ten overvloede werd nagegaan, of de lucht tegen het einde der proef geleid door de cal. kolf, teneinde de vloeistof in de kolf te vermengen (gedurende de proef geschiedde dit als gevolg van het instroomen der ozonhoudende zuurstof), en daarenboven ozon uit kolf en aanvoerbuis te verwijderen, ook eenigen thermischen invloed uitoefende. Dit was ook daarom van belang te weten, daar gedurende de eigentlijke proef, als gevolg van een niet voldoende sluiting, bij het aspireeren, lucht van buiten zou kunnen dringen (door de verbindingen der buizen en glazen kranen) en zich vermengen met de ozonhoudende zuurstof, gaande in de oplossing der cal. kolf, als mede lucht door de kurk der kolf in de kolf zou kunnen komen (waarin, ook na de oplossing te zijn doorgegaan, altijd wat ozon zal wezen, daar niet alles zal worden ontleed door het arsenigzuur). De mogelijkheid bestaat namelijk, dat eenig gevormd salpeterzuur en salpeterigzuur aanleiding zou kunnen geven tot een noemenswaardige bron van fouten. Gemelde contrôle-proef werd aldus genomen.

Gewone dampkringslucht (niet gezuiverd) in een glazen gashouder, bevond zich in de onmiddellijke nabijheid van ozonhoudende zuurstof in een anderen glazen gashouder bevat. De calorimetrische kolf hield in: *gedestilleerd water*. Aanvankelijk nu werd lucht aangewend (altijd gebruik makende van het stel haarbuisjes en aspirator), daarna ozonhoudende zuurstof en ten slotte weder lucht, terwijl de temperatuur der kolf werd waargenomen. De uitkomst nu was, dat bij

het doorvoeren gedurende 4 minuten van lucht, de temperatuur bleef op 19,70°, en zich constant hield onder het doorleiden gedurende 3 minuten van ozonhoudende zuurstof, en tevens onveranderd bleef gedurende 20 minuten, toen er weder lucht werd doorgevoerd. Het is duidelijk, dat men aanvankelijk eenige lucht liet doorgaan, alvorens de eigentlijke proef te beginnen en daarmede de temp. op te schrijven. Zoo was deze laatste, bij wijze van schatten, even voor het opschrijven 19.7025°, om weldra te dalen tot 19,7°. Het behoeft overigens niet gezegd, dat met betrekking tot den calorimeter vele voorzorgen werden in acht genomen.

De uitkomst van gemelde proef is derhalve:

a. dat vorming van salpeterigzuur en salpeterzuur, aangenomen eens, dat deze in geringe mate geschiedde, geen merkbaren invloed uitoefent. We hebben er ons trouwens eenigermate van overtuigd, door ozonhoudende zuurstof geruimen tijd te laten staan met een betrekkelijk groote hoeveelheid dampkringslucht, dat ozon zich met stikstof, zelfs bij aanwezigheid van water, niet schijnt te verbinden, zooals reeds Carius en Berthelot hadden aangetoond.

Met recht zou men de opmerking kunnen maken, waarom geen zuurstof werd genomen in plaats van lucht. De reden daarvan is in de eerste plaats deze, dat zuurstof gemaakt naar de gewone wijze uit kaliumchloraat (vermengd met koperoxyde), in den regel eenig chloor bevat (soms zelfs is de reactie met ioodkaliumpapier zeer duidelijk). De zuurstof gebruikt ter bereiding van ozon werd dan ook niet alleen gedroogd met zwavelzuur, maar daarenboven geleid door een buis met natronkalk. Bij het maken van zuurstof in 't groot is dit zuiveren van eenig chloor nog al lastig; dat zou evenwel geen overwegend bezwaar wezen, ware het niet dat een vermenging der zuurstof met eenige lucht, als gevolg onder anderen van een niet voldoende sluiting, in ieder geval hoogst moeielijk is te ontgaan.

Om terug te keeren tot de laatst medegedeelde proef, zoo leert deze daarenboven:

b. dat de thermische invloed van ozon en water van geen beteekenis schijnt te wezen;

c. dat de kurk der calorimetrische kolf evenmin invloed schijnt uit te oefenen op de temperatuur der vloeistof. Duidelijkheidshalve mag men er aan herinneren (zie vroeger: Eerste Gedeelte), dat de cal. kolf is voorzien van een kurk, waardoor gaan aan- en afleidingsbuizen voor ozonhoudende zuurstof, benevens de breede glazen buis van den thermometer (daarin bevestigd met een kleine kurk). Laatsgenoemde glazen buis reikt in de vloeistof der kolf (ozon kan derhalve de kleine kurk niet direct bereiken), en daar, tenminste in den regel, niet alle ozon zal worden opgenomen, kan het wel niet anders, of wat ozon zal in aanraking komen met de kurk der cal. kolf, terwijl ozon kurk aantast (kurk wordt door ozon gebleekt, terwijl vorming plaats heeft van water). De kurk der cal. kolf bleef evenwel op 't oog ongedeerd; men mag dus wel aannemen, dat er al betrekkelijk weinig ozon in aanraking kwam met de kurk. Het valt evenwel niet te ontkennen, dat desniettegenstaande een glazen sluiting aanbevelenswaard is, al is deze onderhevig aan niet weinig praktisch bezwaar. Na eenige inspanning is het mogen gelukken, om deze inrichting meester te worden; proeven zijn evenwel hiermede nog niet genomen.

Proefnemingen. Gaan we thans over tot een mededeelen der verrichte thermo-chemische waarnemingen betreffende ozon en arsenigzuur. Vooraf evenwel eenige kleine bizonderheden.

Bij het titreeren werd de arsenigzuur-oplossing *gewogen*, en die van iodium in ioodkalium *gemeten*, op de wijze zooals vroeger met twee van het drietal proeven geschiedde. Een hoeveelheid van 0,245 gr. arsenigzuur was in water (zonder zoutzuur) opgelost tot 53,5575 gr., welke oplossing was de *normaal-oplossing*. Hiermede werd namelijk de sterkte bepaald der iodium-oplossing, en met de laatste het gehalte aan arsenigzuur der oplossing, bestemd voor de calorimetrische kolf. Als contrôle zooveel mogelijk der zuiverheid van het voor de normaal-oplossing gebruikte arsenigzuur, werd, evenals bij de eerste reeks *) van proeven, het iodium door sublimatie (na vermengd te zijn met ioodkalium) ge-

*) l. c., p. 5.

zuiverd, en hiervan 1,27 gr. met ioodkalium in water opgelost tot 500 C.C. Nu vereischten 9,4675 gr. der normaal-oplossing van arsenigzuur aan deze iodium-oplossing 43,82 C.C.. Theoretisch zouden de 9,4675 gr. normaal-oplossing vereischt hebben 43,74 C.C. der iodium-oplossing (aangenomen in de eerste plaats, dat arsenigzuur en iodium zuiver waren); een betere overeenstemming is wel niet te wachten. Het behoeft niet gezegd, dat men zich hield aan 43,82 C.C..

Terwijl het gewicht van de cal. kolf bij de eerste reeks van proeven bedroeg 121,122 gr., was dat van de kolf bij deze reeks niet meer dan 81,7 gr..

Het aantal calorieën betrekking hebbende op As_2O_3Aq, 2 000 werd berekend naar de formule (reeds vroeger *) medegedeeld):

$$R = \frac{2m}{b}(b + p)q, \text{ waarin voorstelt:}$$

b. De gew.-hoev. in gr. aan oplossing der cal. kolf.

b. De som der waterwaarden van thermometer, absorptie-toestel en glazen kolf.

q. Het verschil in graden Celcius der oplossing in de kolf vóór en na de proef.

f. De hoeveelheid ozon in gr. verbruikt door het arsenigzuur in de kolf.

m. Het mol.-gew. van ozon: OOO = 48.

R. Het aantal calorieën berekend op: As_2O_3Aq, 2 000.

De s. w. der oplossing werd genomen = 1; zooals bekend, is dit streng genomen niet het geval, en wel door het gehalte van arsenigzuur en arsenikzuur, als wat betreft de s. w. van het water als zoodanig.

In de proeven was:

		b	*p*	*q*	*f*		R
Proef	I	692,2	12,8	1,075	0,502	gr.	144900
»	II	671,55	12,8	1,0	0,4673	»	140600
»	III	691,2	12,8	1,115	0,52588	»	143300

*) l. c., p. 5.

Bij deze werden ongeveer 14—16 liters ozonhoudende zuurstof doorgevoerd.

Het verloop der temperatuur (na iedere 20 seconden werd afgelezen, ten einde den gang der proef te kunnen kennen), was als volgt:

Proef I.		Proef II.			Proef III.		
13.88°	14.40	18.16°	18.66	19,16	18.925°	19,19	19.79
13.88	14,42	18.16	18.68	19.16	18.925	19,21	19.82
13.88	14,46	18,16	18.70	19,16	18.925	19,23	19.84
13.88	14,49	18,16	18.715	19,16	18,925	19,25	19,865
13,88	14,52	18.46	18.73	19,16	18,925	19,27	19,89
13,88	14,54	18,16	18.75	19,16	18,925	19.28	19.92
13,88	14 57	18,16	18,76	19,16	18,925	19.30	19,94
13,88	14,60	18 16	18,78	19,16	18,925	19,32	19,965
13,88	14,63	18,16	18,79	19,16	18,925	19,34	19,98
13,88	14,66	18,16	18,81	19,16	18,925	19,36	20,01
13,88	14,69	18,16	18,83	19,16	18,925	19,375	20,03
13,88	14,72	18,16	18,85	19,16	18,925	19,39	20,04
13,88	14.74	18,16	18,87		18,925	19,415	20,04
13,88	14,76	18,16	18,89		18,925	19,42	20,04
13.88	14,79	18,16	18,905		18,925	19,44	20,04
13,88	14,82	18,16	18,92		18,925	19,46	20,04
13,88	14,85	18,19	18,94		18,925	19,48	20,04
13,91	14,87	18,21	18,96		18,95	19,50	20,04
13,95	14,89	18,24	18,98		18,99	19,515	20,04
13,99	14,92	18,27	18.995		19,01	19,535	20,04
14,02	14.94	18,30	19,01		19,03	19,555	20,04
14,06	14,95	18,32	19,02		19,05	19,57	20,04
14,08	14,95	18,34	19,04		19,07	19,59	20,04
14,11	14,955	18,36	19,055		19,08	19,615	20,04
14,14	14,955	18,36	19,07		19,09	19,635	20,04
14,17	14,955	18,40	19,08		19,10	19,66	20,04
14,21	14,955	18,42	19,095		19,11	19,68	20,04
14,24	14,955	18,45	19,10		19,12	19,70	20,04.
14,27	14.955	18,47	19,12		19,135	19,72	
14,30	14,955	18,49	19,13		19,15	19,74	
14,335	14,955	18,50	19,14		19,17	19,765	
14,36	14,955	18,52	19,15				
	14,955	18,54	19,16				
	14,955	18,56	19,16				
		18,58					
		18,60					
		18,62					
		18,64					

Vergelijken we de uitkomsten van de eerste en tweede reeks van proeven, met betrekking tot de constante:

		$As_2 O_3 Aq, 2 000$
Reeks I. Proef	I	133000[c]
»	II	141600
»	III	145000
Reeks II. Proef	I	144900
»	II	140600
»	III	143300.

Van Proef I, Reeks I, werd reeds vroeger *) medegedeeld, dat de ozonhoudende zuurstof zeer waarschijnlijk te snel werd doorgevoerd; daarenboven werd bij deze proef de arsenigzuur-oplossing niet gewogen bij het titreeren. Deze proef zal daarom buiten rekening worden gelaten, in welk geval het gemiddelde van Reeks I en Reeks II is:

Gemiddelde	$As_2 O_3 Aq, 2 000$:
Reeks I (zonder Proef I)	143300[c]
Reeks II	142900
verschil	400[c].

Het gemiddelde van Reeks I (zonder proef I) en Reeks II is verder:

	$As_2 O_3 Aq, 2 000$:
Gemiddelde van Reeks I en Reeks II	143100[c].

In Reeks II was de verhooging in temp. van de cal. kolf betrekkelijk veel grooter dan in Reeks I. De ozonhoudende zuurstof werd langzamer doorgevoerd, de waarde 142900[c] is dus hoogst waarschijnlijk wat te laag.

Berthelot †) vond in twee bepalingen:

I	$As_2 O_3 Aq, OOO$ =	137600[c]
II	» =	125600
	gemiddeld =	131600[c].

*) l. c. p. 7.
†) l. c., p 3.

Het verschil met BERTHELOT bedraagt derhalve:

$$143100 - 131600 = 11500^c.$$

Met recht hecht BERTHELOT evenwel de meeste waarde aan 137600°, maar ook wij vertrouwen vooral op de hoogste waarde, die is gevonden, derhalve op die van 145000°, dat dan een verschil geeft met BERTHELOT van:

$$145000 - 137600 = 7400^c.$$

De uitkomst, waartoe we voorloopig zijn gekomen, is derhalve, dat de waarde van $As_2\,O_3$ A, 2 OOO door ons aanmerkelijk hooger werd gevonden dan door gemelden thermoscheikundige.

Neemt men voor de constante van $As_2\,O_3$ Aq, OO = 78280° (zie pag. 288), dan wordt de waarde voor OO,OO,OO, voor die van $As_2\,O_3$ Aq, 2 OOO = 143100 nemende:

$$As_2\,O_3\,Aq,\ OO - As_2\,O_3\,Aq,\ 2\,OO\bar{O} = OO,OO,OO$$
$$78280 - 143100 = OO,OO,OO$$
$$-\ 64820^c = OO,OO,OO.$$

De gemiddelde waarde van BERTHELOT voor $As_2\,O_3$ Aq, 2 OOO, namelijk die van 131600°, leidt tot:

$$-\ 53320^c = OO,OO,OO.$$

De waarde 137600° (zie boven) tot:

$$-\ 59320^c = OO,OO,OO$$

en onze maximumwaarde van 145000° geeft:

$$-\ 66720^c = OO,OO,OO.$$

De laatste waarde, die van OO,OO,OO = — 66720, komt waarschijnlijk het digst bij de waarheid om redenen vroeger medegedeeld.

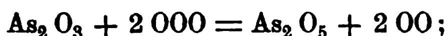
Aan het voorgaande moet nog worden toegevoegd, dat de vorm OO,OO,OO betrekking hebbende op de warmte gebon-

den bij omzetting van 3 OO in 2 OOO, in ons geval *niet* insluit de verdigtingswarmte, welke hierbij plaats heeft van *drie moleculen* gewone zuurstof tot *twee moleculen* ozon, en de reden hiervan is eenvoudig deze, dat bij de thermo-chemische reactie:



$$As_2\,O_3\,Aq,\ 2\,OOO,$$

de chemische reactie is:



$$As_2\,O_3 + 2\,OOO = As_2\,O_5 + 2\,OO\,;$$

anders gezegd, *twee moleculen* ozon geven bij dit proces *twee moleculen* gewone zuurstof, en er is dus geen verandering in het aantal gasmoleculen.

We behouden ons voor, nog vele reeksen van proeven te doen ter nadere bepaling der constante van OO,OO,OO, en zullen daarbij gebruik maken zoowel van een directe als een indirecte methode. Wat de eerste betreft, hierbij heeft men meer bepaald op 't oog de methode met platinazwart, welke laatste bij nader onderzoek *) zich in werkelijkheid deed kennen als hoogst waarschijnlijk de eigenschap te bezitten, ozon gemakkelijk om te zetten in gewone zuurstof. Wat aangaat de indirecte methode, zullen we, ten minste vooreerst, blijven bij die met arsenigzuur, welke door ons nog een weinig kan verbeterd worden. Onder meer, hopen we in staat te zijn, in een derde reeks van waarnemingen, behalve de ozonhoudende zuurstof, tevens de lucht te kunnen leiden uit glazen behouders, zoodat beiden onder nagenoeg gelijke omstandigheden kunnen verkeeren. Tevens zal worden zorg gedragen voor een meer regelmatig werken van den aspirator, dat in verband staat met het zooeven genoemde; alleen dan kan blijken, of er ook sprake kan wezen van een toepassen der afkoelingsformule.

---

*) l. c., pag. 8.

EENIGE THEORETISCHE BESCHOUWINGEN.

Aan het voorgaande, dat zich in hoofdzaak bepaalt tot de waarneming, wenschen we het een en ander te verbinden van theoretischen aard. Zoo heeft het onderwerp aanleiding gegeven, de allotropieën van eenige grondstoffen te bezien uit een thermo-chemisch oogpunt.

Atomistische en moleculaire allotropie. Het betrekkelijk verschil in gehalte aan energy tusschen de allotropieën van zuurstof in verband met dit verschil bij de betreffende allotropieën bijv. van koolstof en zwavel, is niet weinig opvallend. Zoo is dit verschil voor graphiet en amorphe koolstof, berekend op één atoom, dus 12 gew.-d. = C, niet grooter dan ongeveer 3000^c; voor allotropieën van zwavel schijnt dit betrekkelijk verschil aan energy zelfs te gering te zijn, om met genoegzame nauwkeurigheid te worden aangegeven. Met betrekking tot gewone zuurstof en ozon, kan het betrekkelijk verschil in gehalte aan energy, berekend op één atoom zuurstof O = 16 gew.-d., gerekend worden ongeveer te bedragen niet minder dan 11000^c, zooals uit het vroeger medegedeelde blijkt. De hypothese nu, dat een scheiden van koolstofatomen een grooter aantal calorieën zal vereischen dan van zuurstofatomen, is wellicht niet al te gewaagd. Maar de mogelijkheid bestaat, dat bijv. de moleculen koolstof en zwavel in vasten (en bij zwavel ook in vloeibaren) staat zeer veel atomen bevatten, en het verschil der allotropiën in aantal atomen gering is. De bekende feiten noodzaken ons in ieder geval in geenen deele om dit laatste aan te nemen. En letten we op de allotropieën van zuurstof, en hoe ozon, dat slechts één atoom meer bevat dan gewone zuurstof, in eigenschappen van deze laatste zeer afwijkt, zoo bijv. weinig standvastig is, dan wordt het, al heeft men hier te doen met gassen, niet onwaarschijnlijk, dat in de eerste plaats de standvastige allotropieën van koolstof wellicht een zelfde aantal atomen bevatten in het molecuul. Wat de zwavel aangaat, voor de allotropieën dezer. bijv α-, β- en γ-zwavel, is dit, naar het voorkomt, niet minder waarschijnlijk, in aanmerking genomen, dat γ-zwavel.

ie de meeste energy zou bevatten, uit α-zwavel ontstaat bij looge temperatuur (ja zwavel in dampvorm boven het kookpunt, moet beschouwd worden te zijn γ-zwavel en te hebben twee atomen in het molecuul); daarenboven gaat α-zwavel bij verhitten over in β-zwavel, die betrekkelijk meer energy zou bezitten. In 't algemeen nu mag worden aangenomen, lat verhooging in temperatuur een verminderen in hoeveelheid atomen van het molecuul zal bevorderen. Ook bij de zwavel schijnt geen reden te zijn een groot aantal atomen in de mol. der allotropieën aan te nemen, en een klein verschil in aantal atomen dezer mol. onderling. Integendeel schijnen de geringe verschillen in energy bij allotropieën van koolstof en vooral van zwavel, eenigermate te zijn verklaard in vergelijking met het groote verschil bij de allotropieën van zuurstof, door als waarschijnlijk aan te nemen, dat het aantal atomen in de allotropieën van koolstof en zwavel eenzelfde is. Deze laatste allotropieën zouden dan hun grond hebben in verschil in rangschikking der moleculen, en daarmede te onderscheiden zijn twee soorten van allotropie *), en wel:

1. atomistische en
2. moleculaire allotropie.

Van *atomistische* allotropieën zijn als 't ware de moleculen allotropisch, *niet* zoo bij *moleculaire* allotropieën, waarbij verschil in betrekkelijke plaatsing der moleculen als hoofdzaak van verschil in eigenschappen is te beschouwen. Het medegedeelde moge strekken, om hierop meer de aandacht te vestigen.

Ozon nader beschouwd. In al het vorige zijn we uitgegaan van de veronderstelling, dat het s. g. van zuurstof en ozon zijn 16 en 24, dus de mol. gew. 16 × 2 en 24 × 2, alzoo de formules OO en OOO. In affiniteiten heeft men, O aangenomen te zijn bivalent, derhalve: O = O en

$$\begin{array}{ccc} O & - & O \\ & \diagdown \; \diagup & \\ & O & \end{array}$$

of O—O—O, in welk laatste geval vrije affiniteiten zouden

*) Zie *Handwörtb.* Fehling, Art. Isomerie.

aanwezig zijn. Wordt aangenomen, dat de verbindingswarmte van één affiniteit zuurstofatoom met één affiniteit van een ander zuurstofatoom steeds dezelfde is, namelijk in gewone zuurstof en ozon, en dit alzoo aangeduid: $\overset{I}{O},\overset{I}{O} = y$, dan wordt men van zelf geleid tot de formule O—O—O *) voor ozon, daar in 3 (O = O) en 2 $\left(\begin{array}{c} O—O \\ \diagdown\ \diagup \\ O \end{array}\right)$ twaalf affiniteiten elkander twee aan twee neutraliseeren, en bij omzetting van gewone zuurstof in ozon derhalve geen warmte zou kunnen gebonden worden, terwijl de proef dit anders leert. Uitgaande van de hypothese der affiniteiten als basis voor de betrekkelijke structuur, hier van gewone zuurstof en ozon, zou ook kunnen aangenomen worden, dat de waarde $\overset{I}{O},\overset{I}{O}$ niet altijd eenzelfde is. Aangezien de atomen in gewone zuurstof en ozon niet op gelijke wijze tegenover elkander geplaatst kunnen zijn, is dit laatste, ook afgescheiden van de hypothese der affiniteiten, niet onwaarschijnlijk. Vooralsnog kan men evenwel niet veel anders doen dan voorloopig aan te nemen, dat $\overset{I}{O},\overset{I}{O} = y$, derhalve eenzelfde waarde bezit, en zooals gezegd, moet dan ozon worden beschouwd als O—O—O,* waarvoor tevens pleit de weinige stabiliteit van ozon, terwijl de structuur $\begin{array}{c} O \\ \diagup\ \diagdown \\ O—O \end{array}$ zou duiden op meer stabiliteit.

Dat warmte noch licht, maar alleen electriciteit vermag, gewone zuurstof om te zetten in ozon, laat zich in zooverre verklaren, als gasmoleculen met ongelijknamige electriciteit geladen, tijdelijk in rust kunnen komen, waardoor de mate van dusgenaamde aantrekking van moleculen en atomen wordt bevorderd, en niet minder door de electriciteit als zoodanig.

Hypothese betreffende de structuur der grondstoffen. Vooral

*) l. c. l.

in de laatste jaren werd niet alleen bij herhaling gehandeld over de wijze, waarop de grondstoffen zouden kunnen geconstruëerd zijn, maar werden zelfs pogingen gedaan ten einde experimenteel in de structuur der grondstoffen eenigermate door te dringen. Zooals bekend, is er tot nog toe geen feit aan te wijzen, dat eenigermate noodzaakt aan te nemen, dat eenige grondstof, en zoo ook het atoom. kan worden ontleed, gebruik makende van de hulpmiddelen, waarover de wetenschap thans heeft te beschikken; zelfs is onwaarschijnlijk, dat de electriciteit met haar maximum van tensie vermag het atoom te ontleden. Dit neemt niet weg, dat het eenigermate van belang kan wezen na te gaan, welke hypothesen aangaande de structuur der stof eenig recht kunnen hebben van bestaan. De volgende hypothese was, voorzooverre bekend, nog niet uitgesproken, — maar we voegen er bij, de waarde hiervan is uit den aard der zaak zeer betrekkelijk — deze namelijk, dat het dusgenaamde atoom is te beschouwen als het atoom van den *eersten rang*, dat is opgebouwd uit atomen van den *tweeden rang*, deze laatste uit atomen van den *derden rang*, en zoo tot.... in het *oneindige*. De hypothese sluit noodwendig de eenheid van stof niet buiten. Naar deze hypothese zou dus het atoom oneindig samengesteld zijn, en iedere poging, een volkomen kennis te bekomen van de stof, afstuiten op de onmogelijkheid, een oneindig langen weg van onderzoek af te leggen.

Utrecht, 24 December 1881.

VERSLAG

OVER EENE VERHANDELING VAN

Dr. J. D. R. SCHEFFER:

ONDERZOEKINGEN OVER DE DIFFUSIE VAN EENIGE ORGANISCHE EN ANORGANISCHE VERBINDINGEN.

Uitgebracht in de Vergadering van 28 *December* 1881.



Dr. SCHEFFER deelt in deze verhandeling de uitkomsten mede van zijne bepalingen betreffende de diffusieconstanten van eenige stoffen in waterige oplossing. Zooals bekend is, wordt onder de diffusieconstante eener stof verstaan: de hoeveelheid dier stof, die in de eenheid van tijd door de eenheid van doorsnede der vloeistof zich beweegt, wanneer het sterkteverval de eenheid bedraagt en een standvastige toestand is ingetreden, alles bij dezelfde temperatuur.

De schrijver heeft de diffusie van zoutzuur het uitvoerigst onderzocht, ter contrôle zijner methode, en ter vergelijking met GRAHAM's uitkomsten; en vervolgens zijne proefnemingen over nog 8 stoffen uitgestrekt: chloorammonium, azijnzuur, natriumacetaat, citroenzuur, wijnsteenzuur, barnsteenzuur, mannite en chloralhydraat.

Zooals de schrijver aan het einde zijner verhandeling mededeelt, was het zijne bedoeling om de verhouding tusschen de diffusieconstanten der stoffen en haar moleculair gewicht na te sporen, en is het zijn voornemen daartoe van nog andere verbindingen de diffusieconstanten te bepalen.

De methode van proefneming, door hem gevolgd, is dezelfde

welke GRAHAM bij zijne oudere diffusieproeven in 1851 heeft aangewend, met de wijziging die SIMMLER en WILDT in 1857 hebben voorgesteld. Cylinderglazen van 9,5 c.M. hoogte en 1,8 c.M. wijdte werden tot $^2/_3$ met de oplossing der stof (van bekende sterkte) gevuld, in een ruimen bak gesteld op een grooten afstand van den bodem, en vervolgens (met de bekende voorzorgen om alle menging te voorkomen) met water aangevuld. In het vat werd daarna voorzichtig zooveel water van dezelfde temperatuur gebracht, totdat de cylinder $^1/_2$ c.M. onder den waterspiegel stond. Het vat was met een warmte-isolator omgeven. De temperatuur van den kelder, waarin de proefnemingen geschiedden, wisselde zeer weinig af.

Na eenige dagen werd de cylinder met eene glazen plaat gesloten en uit het vat gelicht. Uit de analyse van den inhoud werd bepaald hoeveel van de stof door diffusie was verwijderd geworden. De schrijver berekent daaruit op juiste wijze de waarde van de diffusieconstante naar de wet van FICK (1855), met behulp der formulen van SIMMLER en WILDT (1857), waarbij het geval wordt verondersteld, dat de diffusie plaats heeft in water, welks sterkte = 0 is, of althans = 0 kan gesteld worden, omdat de watermassa om den cylinder zeer groot is in vergelijking tot de hoeveelheid stofs die er tijdens de diffusieproef intreedt.

Aangezien de schrijver de methoden en de uitkomsten zijner voorgangers niet beredeneert of met de zijne vergelijkt (enkele proefnemingen van GRAHAM uitgezonderd) en evenmin een overzicht geeft van de tot nog toe bepaalde diffusieconstanten, zoo achten wij het wenschelijk eene korte beschouwing daaromtrent aan onze beoordeeling van den arbeid des Heeren SCHEFFER te doen voorafgaan.

Het getal der stoffen, van welke diffusieconstanten bepaald zijn, is nog zeer beperkt. Uit de reeks diffusieproeven van GRAHAM van 1851 kunnen geene diffusieconstanten berekend worden, zooals reeds SIMMLER en WILDT in 1857 terecht hebben opgemerkt. Uit de nieuwere reeks van 1862, bij welke GRAHAM eene andere methode heeft aangewend, zijn de diffusieconstanten door STEPHAN vóór twee jaren

(1879) berekend. Zij betreffen slechts het zoutzuur, drie minerale zouten en vier organische stoffen *). De bereikte nauwkeurigheid laat te wenschen over. De bepalingen van BEILSTEIN, die een diffusieglas gebruikte van den vorm van een vogelkooidrinkglas, hetwelk hoog in een vat met water werd gesteld, verdienen weinig vertrouwen.

Zijne diffusieconstanten van 10 minerale zouten †), wijken meestal belangrijk af van die van GRAHAM en van latere waarnemers. De bepalingen van HOPPE-SEYLER, VOIT en JOHANNISJANZ, naar de optische methode verricht, moeten na STEPHAN's kritiek als onjuist ter zijde gesteld worden.

MARIGNAC's proefnemingen van 1874 geven slechts de betrekkelijke waarden voor het diffusievermogen van twee zouten, die te zamen in oplossing zijn; zij zijn naar GRAHAM's oudere methode verricht, waarbij het diffusieglas niet hoog in het watervat staat, maar op den bodem.

Zoo blijven er dan slechts over de bepalingen van de diffusieconstanten uit den allerlaatsten tijd: die van WEBER betreffende het zinksulphaat (1879) en die van SCHUHMEISTER (1879) betreffende 17 alkalizouten en 4 zouten van zware metalen §); terwijl LONG in 1880 het betrekkelijke diffusievermogen bepaald heeft van 19 alkalizouten, 4 ammoniakzouten en 5 zouten van zware metalen. Geen dezer drie waarnemers heeft echter GRAHAM's methode gevolgd.

STEPHAN heeft terecht opgemerkt dat daarbij fouten kunnen gemaakt worden, die een merkbaren invloed hebben.

---

*) $NaCl$, KCl, $MgSO_4$, albumine, looizuur, arabische gom, rietsuiker en twee zoutmengsels.

†) Proeven met KCl, $NaCl$, KNO_3, $K_2Cr_2O_7$, K_2CO_3, K_2SO_4, Na_2SO_4, Na_2CO_3, $MgSO_4$, $CuSO_4$.

§)

Kaliumzout	van	Cl,	Br,	I,	NO_4,	CO_3,	SO_4.
Natriumzout	"	"	"	"	"	"	"
Lithiumzout	"	"	"	"	"		
Calciumzout	"	Cl.					
Magnesiumzout	"	O_4.					
Koperzout	"	Cl en SO_4.					
Zinkzout	"	SO_4.					
Kobaltzout	"	Cl.					

Als de proef eenigen tijd geduurd heeft, wordt de veronderstelling niet meer voldoende benaderd, dat het bovengrensvlak van de diffundeerende oplossing eene sterkte = 0 bezit; en bij het eindigen der proef is het niet mogelijk den cylinder met eene glazen plaat te sluiten zonder stroomingen teweeg te brengen. Bij GRAHAM's tweede methode zijn storende stroomingen onder het uithevelen niet te vermijden.

SCHUHMEISTER heeft daarom, op raad van STEPHAN, de diffusieproeven zoo ingericht dat de diffusie plaats had:

of in eene waterzuil, waarvan bij de berekening van k de lengte = oneindig groot kon aangenomen worden;

of, terwijl een zeer langzame stroom water over het bovengrensvlak werd gevoerd, zoodat dit voortdurend de sterkte = 0 moest bezitten.

Het laatste beginsel werd ook door LONG bij zijne vergelijkende diffusieproeven toegepast, maar in een anderen toestel (naar LOTHAR MEIJER).

SCHUHMEISTER experimenteerde met oplossingen van verschillende sterkte en meestal bij twee of drie temperaturen (tusschen 2° en 21°). Zijne uitkomsten voor dezelfde temperatuur en sterkte geven zelden onderlinge verschillen van 10 pCt. (op de laagste waarde berekend), meestal geringer. Daar hij de sterkte der oplossingen steeds afleidde uit zijne bepalingen van haar specifiek gewicht, met behulp van GERLACH's tabellen, heeft hij zich van de nauwkeurigheid dezer tabellen afhankelijk gemaakt, hetgeen voor sommige zouten wellicht een bezwaar tegen zijne uitkomsten kan opleveren.

WEBER heeft een geheel anderen weg ingeslagen en de diffusieconstante van het zinksulphaat berekend uit de bepalingen van de elektromotorische kracht des strooms, die tusschen twee zinkplaten ontstaat, welke met de zoutoplossing in aanraking zijn, wier sterkte in de aan de platen grenzende vlakken verschillend is. Zijne bepaling is ongetwijfeld met de meeste strengheid uitgevoerd, berekend en beredeneerd. Zij stemt, naar ons uit de vergelijking blijkt, vrij goed overeen met SCHUHMEISTER's bepaling *).

*) Bij 10° vindt SCHUHMEISTER $k = 0{,}20$ (sterkte der opl. aanv. 0,1 pCt.).
Bij 9,6° 〃 WEBER $k = 0{,}1816$ 〃 〃 〃 〃 0,2 〃

Ook heeft hij de diffusieconstante bepaald voor meer uiteenloopende temperaturen (1,2^0, 18,5^0, 44,7^0).

Uit het gegeven overzicht blijkt, hoe gering en hoe beperkt nog het aantal stoffen is, waarvan de diffusieconstanten met eenige nauwkeurigheid bepaald zijn. Eene uitbreiding van onze kennis op dat gebied kan niet anders dan zeer welkom zijn; vooral omdat de vergelijking van het diffusievermogen met moleculair gewicht, moleculair volumen, oplossingswarmte, galvanisch leidingsvermogen en andere physische eigenschappen, belangrijke uitkomsten schijnt te beloven.

Aangezien nu Dr. SCHEFFER's proefnemingen hebben gediend om volstrekte waarden voor diffusieconstanten te bepalen, zoo mag het de vraag zijn, welke nauwkeurigheid door hem bereikt is, ook in vergelijking met GRAHAM's en SCHUHMEISTER's uitkomsten.

Daar de schrijver echter zelf zijne uitkomsten niet nader beredeneerd heeft, moge die beschouwing hier kortelijk plaats vinden.

Zoutzuur.

Met uitzondering van proef I die slechts een dag geduurd heeft, en van eene proef waarbij het zoutzuur de dubbele sterkte bezat, wisselen de uitkomsten van 13 proefnemingen (bij 7$^1/_2$ à 9^0 C.) tusschen + 10 en — 5 pCt. van het midden. Binnen die nauwkeurigheid wordt de wet van FICK bevestigd.

Bij de overige stoffen, waarvoor het aantal proefnemingen kleiner is, wijken de uitkomsten niet boven 10 pCt. van de laagste waarde af *); ook als de sterkten der oplossingen

*) Wij berekenden bij:

		Sterkte	Temp.	Afwijking tusschen de uitkomsten onderling.
Zuringzuur:	3 proefnemingen	4 en 6 pCt.	7$^1/_2$^{0}	8 pCt.
Azijnzuur:	6 „	8 „	8 en 14$^1/_2$^{0}	7 en 11 pCt.
Citroenzuur:	3 „	5 en 9 „	9^0	10 pCt. (+ 5^5 tot —4 pCt. v. h. midden)
Wijnsteenzuur:	4 „	4 en 7 „	9^0	11 pCt (+ 5^5 tot —5^{5}pCt. v.h. midden)

verschillend genomen zijn. Alleen bij natriumacetaat, in drie sterkten, zijn de verschillen vrij groot: ± 9 pCt. ongeveer van het gemiddelde

Aangezien nu alleen voor het zoutzuur de door STEPHAN berekende diffusieconstante uit GRAHAM's proef met Dr. SCHEFFER's cijfers te vergelijken is — en deze zelfs nog gebrekkig, aangezien de temperaturen aanmerkelijk verschillen *) — zoo is het niet uit te maken of Dr. SCHEFFER's bepalingen nauwkeuriger zijn dan die van GRAHAM. Onder de proefnemingen van SCHUHMEISTER vonden wij er eene, die ook door Dr. SCHEFFER bij ongeveer dezelfde temperatuur ingesteld is, namelijk chloorammonium; en deze stemmen vrij goed overeen:

SCHUHMEISTER	bij $20^1/_2{}^0$:	$k = 1{,}33$	(sterkte der opl. 12 pCt.)
SCHEFFER	» $17^1/_2{}^0$:	$k = 1{,}32$	(» » » 4,66 »)

Mogen wij uit alles aannemen, dat de bereikte nauwkeurigheid bij Dr. SCHEFFER zeker niet minder is dan die van GRAHAM en niet veel verschilt van die van SCHUHMEISTER, zoo blijven er toch bezwaren tegen de methode van experimenteeren over, die zelfs eene strenge beredeneering der uitkomsten beletten, vooral als men in aanmerking neemt, dat het den schrijver om volstrekte cijfers te doen is.

De hoogte van het water boven den cylinder was zeer gering: slechts 5 mM. — GRAHAM bracht bij zijne proeven van

---

		Sterkte	Temp.	Afwijking tusschen de uitkomsten onderling.
Barnsteenzuur:	3 proefnemingen	5 pCt.	15°	onbeduidend
Manniete:	3 "	44 "	10°	onbeduidend
Natriumacetaat:	7 "	±2,6 en 9 "	14 à 15°	—9 pCt. tot +8 pCt. v. h. middencijfer
Chloralhydraat:	4 "	5 en 8 "	9°	10 pCt.
Chloorammonium:	3 "	4,65 "	$17^1/_2{}^0$	4 pCt.

*)

	Temp.	*k.*	
GRAHAM	5°	1,742	
SCHEFFER	$7^1/_2 - 9^0$	2,07	Gemiddeld uit 13 waarnemingen.

1851 die hoogte tot 1 Inch = 25 mM. — SIMMLER en WILD stellen eene hoogte voor van 2 of 3 Liniën = 6 tot 9 mM.

Mag men nu dat water boven den cylinder wel als vrij van zout beschouwen, en dus den term *n* in de formulen = de hoogte van het cylinderglas stellen? Aan den rand zal het uittredende zout wel spoedig naar beneden zakken, maar bij niet zeer nauwe cylinders zal het zout in het midden nog een eind opstijgen vóór het wordt weggevoerd. De deeltjes, die dezelfde sterkte bezitten, zullen dus boven den cylinder een gebogen vlak vormen. Dat gebogen vlak boven den cylinder, in hetwelk men de sterkte der oplossing = 0 mag stellen, *kan* dus op een niet te verwaarloozen afstand boven den cylindermond gelegen zijn. Deze afstand kan misschien wel den halven straal van het bovenvlak des cylinders bedragen, ja misschien nog meer; en zoo zou dan de term *n* een niet onbelangrijk bedrag hooger moeten gesteld worden dan hij is aangenomen. Eerst bij zeer nauwe cylinders zal deze fout verdwijnen, doch Dr. SCHEFFER's cylinders hadden een doormeter van 18 mM.

Bij zijne proeven was bovendien de zuil water boven den cylinder zeer klein, slechts 5 mM., zoodat het mogelijk blijft, dat de sterkte der oplossing aan den waterspiegel niet = 0 mocht gesteld worden. Dat kan belemmerend op de diffusie gewerkt hebben. En wanneer men nu nog nagaat, dat men de wanden dezer waterzuil (het verlengde van den cylindermantel tot aan den waterspiegel) als het oppervlak kan beschouwen, waaruit de diffusie in de omringende watermassa plaats grijpt, dan springt het nog meer in het oog dat de geringe oppervlakte van dezen wand vertraging in het wegvoeren der uit den cylinder tredende deeltjes *kan* teweeg gebracht hebben.

Door deze vertragingen zouden de volstrekte waarden der diffusieconstanten wellicht iets te laag verkregen kunnen worden. In elk geval moet het niet overbodig geacht worden te onderzoeken, of de waterspiegel zonder bezwaar zoo laag boven den cylinder mag gebracht worden. Op de betrekkelijke waarden der diffusieconstanten zullen de aange-

wezen bronnen van fouten evenwel weinig invloed gehad hebben. Immers, bij alle stoffen behalve het zoutzuur heeft de schrijver de diffusie eerst bepaald, nadat er 10—20 of meer dagen verloopen waren. Dan zullen, als men den invloed der zwaartekracht als standvastig beschouwt, de tijden, die noodig zijn geweest, omgekeerd evenredig zijn met de diffusieconstanten.

Over den invloed van de sterkte der oplossing op de diffusieconstante wordt door den schrijver niet gesproken. Bij de proeven met wijnsteenzuur, citroenzuur, natriumacetaat en chloralhydraat, werden oplossingen van verschillende sterkte genomen, maar was van dien invloed niets te bemerken. Waarschijnlijk zijn de uitkomsten daarvoor nog niet nauwkeurig genoeg. Immers, als de invloed bestaat, is die zeer gering. Weber heeft bij zijne bepalingen met zinkvitriool van verschillende sterkte (20 en 30 pCt.) een klein verschil gevonden, niet meer dan 5 pCt. in afnemenden zin. Hij acht dan ook de hoeveelheid diffundeerend zout niet enkel afhankelijk van het sterkteverval $\frac{du}{dx}$, maar ook in veel geringer mate van de volstrekte waarde van u, en meent dat de wet van Fick op dezelfde wijze moet verbeterd worden als de wet van Fourier voor de warmtegeleiding.

Schuhmeister heeft grooter verschillen gevonden bij zijne proeven met chloorkalium, chloornatrium, iodkalium, bromlithium; verschillen, die wel 10 pCt. bedroegen, doch in toenemenden zin; juist het omgekeerde van Weber's ervaring. De diffusieproeven van vroegere waarnemers zijn stellig te onnauwkeurig geweest om den invloed der sterkte op de diffusie te doen bemerken.

Zien wij vooreerst van dien invloed af, dan blijft onze slotsom deze, dat de proeven van Dr. Scheffer eerst dan voor eene strengere berekening der diffusieconstanten vatbaar zullen zijn, als hij bewezen zal hebben dat de boven aangewezen fouten mogen verwaarloosd worden. In dat opzicht is het

misschien wenschelijk de diffusieconstante van het chloornatrium te bepalen, welke stof meer geschikt is ter contrôle zijner methode dan het zoutzuur. Immers bleek het ons. dat de uitkomsten van GRAHAM, SCHUHMEISTER, LONG, naar verschillende methoden verkregen, weinig verschillen, en dat alzoo dit zout het best ter vergelijking dienen kan.

Zooals wij reeds opmerkten, is het den schrijver inzonderheid te doen om de volstrekte waarden der diffusieconstanten in verband te brengen met de moleculairgewichten en moleculairvolumina, ja zelfs met chemische structuur en zoogenaamde physikalische isomeriën. Zal die vergelijking vruchten dragen, dan is het zeker de vraag bij welke temperatuur men die vergelijking moet instellen. De invloed van de temperatuur op de diffusie is zeer groot.

Voor het temperatuurverschil van 2^0 tot $21^1/_2{}^0$ neemt bijv. de diffusieconstante van het chloorkalium van 1 *tot* 1,65 toe (SCHUHMEISTER); die van het zinksulphaat van 0,1252 tot 0,4146 voor het temperatuurverschil van $1,2^0$ tot $44^0,7$ (WEBER). Zou het dus niet wenschelijk zijn de diffusieconstanten der zelfde stof zooveel mogelijk bij meer temperaturen te bepalen, om tevens den invloed der temperatuur op het diffusievermogen te leeren kennen?

Bovendien — zooals de schrijver zelf opmerkt — zijn er stoffen die zich hydrateeren, hetzij tot een standvastig, hetzij tot een zich dissociëerend hydraat. Het zal dus zeker het beste zijn om eerst de diffusieconstanten van stoffen te bepalen, die anhydrisch in oplossing zijn, vervolgens van dezulke die standvastige hydraten vormen, — om eerst daarna te onderzoeken, welken invloed de dissociatie van onstandvastige hydraten op de diffusie uitoefent.

Aangezien het onze meening is, dat de bepalingen van Dr. SCHEFFER niet minder waarde hebben dan die, welke door vroegere waarnemers naar dezelfde methode zijn gedaan, en het nog uitgemaakt moet worden in hoeverre de uitkomsten van SCHUHMEISTER nauwkeuriger zijn, zoo aarzelen wij niet aan de Akademie voor te stellen deze

Verhandeling in de Verslagen en Mededeelingen op te nemen.

Indien de Akademie zich met dit voorstel vereenigt, achten wij het wenschelijk, den schrijver vóór het drukken met ons verslag in kennis te stellen, ten einde hem de gelegenheid te geven, desverkiezende, in de redactie van het stuk nog het een en ander te wijzigen, vooral met het oog op latere mededeelingen, die de schrijver waarschijnlijk omtrent het vervolg zijner proefnemingen aan de Akademie zal wenschen aan te bieden.

Leiden en *Utrecht*, 19 December 1881.

J. M. VAN BEMMELEN.
H. C. DIBBITS.

ONDERZOEKINGEN

OVER DE

DIFFUSIE VAN EENIGE ORGANISCHE EN ANORGANISCHE VERBINDINGEN.

DOOR

J. D. R. SCHEFFER.

Fick *) ontwikkelde de theorie van de diffusie van vloeistoffen met behulp van de onderstelling, dat de hoeveelheid zout, die uit een oplossing in de tijdseenheid door een bepaalde doorsnede stroomt, evenredig is aan het oppervlak dier doorsnede en aan het concentratieverschil van twee naburige lagen, een onderstelling die wordt uitgedrukt door de formule:

$$d\,S = k.\,q.\,\frac{du}{dx}.\,dt \text{ waarin:}$$

dS de hoeveelheid zout voorstelt, die in de tijd dt stroomt door de horizontale laag x; q de grootte van het oppervlak; du de grootte van het concentratieverschil tusschen de laag x en de om dx daarvan verwijderde.

De diffusieconstante k is dus volgens de bovenstaande formule die hoeveelheid zout, die in den stationairen toestand in de tijdseenheid door de eenheid van doorsnede zoude vloeien, als de hoogte van den geheelen diffusietoestel de lengteeenheid bedraagt en aan beide einden daarvan het concentratieverschil steeds gelijk de eenheid is.

Aangezien geen kenmerken zijn te vinden, waaruit het al of niet ingetreden zijn van den stationairen toestand kan

*) Poggend, *Ann.* Bd. 94, S. 59.

worden afgeleid, hebben SIMMLER en WILD *) eenige methoden ontwikkeld, volgens welke ook uit een bekenden begintoestand, onverschillig of de stationaire toestand al of niet is bereikt, de waarde van k zou kunnen worden bepaald.

Eenige der door hen »optische" genoemde methoden zijn sedert door VOIT, †) HOPPE SEYLER §) en JOHANNISJANZ **) toegepast, maar de daarbij verkregen resultaten later door STEFAN ††) als niet vertrouwbaar verworpen.

Men stelle zich nu een van boven open, van onder gesloten cilindervormig vat voor, dat tot op zekere diepte onder den bovenrand met zoutoplossing en verder met gedestilleerd water wordt gevuld. Men denke zich dezen cilinder verticaal geplaatst in een groote watermassa, waarin de zoutoplossing kan diffundeeren, zoodat de concentratie aan den bovenrand van den cilinder voortdurend gelijk nul kan worden gesteld, dan zal blijkens de door SIMMLER-WILD medegedeelde formule de hoeveelheid zout, die gedurende den tijd T, gerekend van het begin der proef, uit het vat diffundeert, kunnen worden aangegeven door de formule:

$$Q = \frac{8\,u_0 q\,h}{\pi^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\cos\frac{2p+1}{2h}\pi h'}{(2p+1)^2} \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{2p+1}{2h}\pi\right)^2 kT} \right\}$$

waarin h de hoogte van den cilinder voorstelt, h_1 den afstand van den bovenrand van den cilinder tot het spiegelend scheidingsvlak tusschen de zoutoplossing en het water, u_0 de concentratie, q de doorsnede en k den diffusiecoëfficient.

Voor het geval $h_1 = {}^1/_3 h$, dat wil dus zeggen, dat de cilinder voor ${}^2/_3$ met zoutoplossing en voor ${}^1/_3$ met zuiver water is gevuld, gaat deze formule over in:

$$Q = \frac{2u_0qh}{3} - \frac{4\sqrt{3}\,u_0qh}{\pi^2} \left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{25} e^{-\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{49} e^{-\left(\frac{7\pi}{2h}\right)^2 kT} + \text{enz.} \right\}$$

---

*) POGGEND, *Ann.* Bd. 100. S. 217.

†) POGGEND, *Ann.* Bd. 130. S. 227, 393.

§) *Jahresbericht f. Chemie,* 1866. S. 71.

**) WIEDEMANN'S *Ann.*, Bd. 2. S. 24.

††) *Wiener Akad.Ber.*, Bd. 78. S. 957.

Aangezien aanvankelijk in den cilinder voorhanden was een hoeveelheid zout $Q_0 = \frac{2\,u_0 q h}{3}$, bedraagt dus de teruggebleven hoeveelheid:

$$Q_0 - Q = \frac{4\sqrt{3}\,u_0 q h}{\pi^2}\left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{25} e^{-\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^2 kT} - \text{enz.} \right\}.$$

Uitgedrukt in deelen van de oorspronkelijk aanwezige hoeveelheid vindt men dus voor het teruggebleven gedeelte:

$$\frac{Q_0 - Q}{Q_0} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{25} e^{-\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^2 kT} - \text{enz.} \right\}.$$

Volgens SIMMLER en WILD zoude het voldoende zijn in de meeste gevallen alleen den eersten term dezer reeks in rekening te brengen. Beter is het echter voorzeker eens vooral een tabel op te maken voor de correspondeerende waarden van $\frac{Q_0 - Q}{Q_0}$ en $\frac{kT}{h^2}$, berekend voor zoo ver noodig is, uit de geheele reeksontwikkeling.

Deze tabel kan dan, mits men zich aan de voorwaarde om $h_1 = {}^1/_3 h$ te kiezen, wil binden, voor alle toekomstige diffusieproeven van den hier besproken aard dienen, en maakt dan verdere berekening overbodig. Deze tabel werd op mijn verzoek door mijn toenmaligen collega Dr. KORTEWEG berekend en is als tabel I in dit verslag opgenomen. Daarin geeft dan de eerste kolom aan het deel der stof, dat na diffusie in den cilinder werd teruggevonden, de tweede de daaraan correspondeerende waarde $\frac{kT}{h^2}$, waaruit dus door vermenigvuldiging met h^2 en deeling door T de waarde van den diffusiecoëfficient k onmiddelijk kon worden afgeleid, en de derde het verschil tusschen twee opvolgende termen. Tusschenliggende waarden werden door rechtlijnige interpolatie berekend. De voorwaarden, waaraan de proeven moeten voldoen, zijn dus deze: dat er gezorgd wordt, dat uit den verticaal geplaatsten cilinder onder geen zout kan uittreden en dat aan zijn niveau steeds de concentratie o blijft bestaan.

Om hieraan te voldoen stellen SIMMLER en WILD een

kleine wijziging voor in de door GRAHAM *) en later ook door MARIGNAC †) gevolgde methode in dien zin, dat de cilinders niet op den bodem van het omringende watervat worden geplaatst, maar daarin zoo hoog mogelijk. Het zout toch, dat in het omringende water diffundeert, zal zwaarder zijnde dan dit, daarin naar beneden zakken, maar eens beneden aangekomen door diffusie weer trachten op te stijgen; hoe grooter dus het hoogteverschil wordt tusschen den bodem van het buitenste watervat en het niveau van het cilindertje, hoe langer tijd het zout voor het doorloopen van dien weg zal noodig hebben, en hoe meer dus dan de omstandigheden, waaronder de proeven genomen worden, aan de onderstellingen, bij de ontwikkeling der formule gebezigd, beantwoorden.

Uit eenige cilinderglaasjes met vlakken bodem en vlak afgeslepen rand werden de beste uitgezocht en daarvan volumen en hoogte bepaald. Het volumen a. v. Het cilindertje, met water geheel gevuld, door een glazen plaat gesloten en buiten goed afgedroogd, werd op de balans geplaatst en door gewichten op de andere schaal in evenwicht gehouden; daarop het cilindertje geledigd, evenals de glazen plaat goed gedroogd, weer op de balans geplaatst en nu uit een buret, die ook later altijd tot het vullen der cilinders voor de diffusieproeven werd gebezigd, zoolang water aan het cilindertje toegevoegd tot de balans weer in evenwicht was gekomen.

De hoogte van de cilinders bepaalde ik door het meten van de langste lijn, die in den cilinder kan worden getrokken; ik bewoog daartoe een rechte breipriem langs den cilinderrand en mat den afstand van het uiteinde van de priem tot de aldus verkregen uiterste kras met behulp van een nonius. Voor elken cilinder werd die lijn op vier verschillende punten bepaald en daarvan het gemiddelde genomen. Uit het volumen $V = \pi h R^2$ en deze lijn $S = \sqrt{h^2 + 4 R^2}$ werd dan de waarde van h berekend.

---

*) *Ann. d. Chem. u. Pharm.* Bd. 77, S. 56, 129; Bd. 80, S. 197.
†) *Ann. Chim. et Phys.* (5) T 2. pg. 546 *of Compt. Rend* T. 78. pg. 1523.

De volgende tabel geeft in de eerste kolom het teeken van het cilinderglaasje, in de tweede het aantal c.M³ water dat het vult; in de derde het gemiddelde der gemeten schuinsche lijnen in c.M.; in de vierde de hoogte in c.M.; in de vijfde het kwadraat van de hoogte; in de zesde het kwadraat van den straal.

	$hR^2\pi$	$\sqrt{h^2+4R^2}$	h	h^2	R^2
A.	88.95	10.21	9.61	92.4	2.96
B.	96.8	10 095	9.42	88.7	3.29
D.	93.3	10.15	9.51	90.4	3.14
F.	94.15	10.15	9.51	90.4	3.14
G.	97.8	10.22	9.56	91.4	3.25
H.	93.3	10.02	9.37	87.8	3.155
K.	91.5	10.08	9.45	89.3	3.08
N.	96.95	10.31	9.67	93.5	3.20
O.	94.2	10.10	9.45	89.3	3.175

Vooreerst moest nu worden uitgemaakt, in hoeverre de methode vertrouwbare waarden voor den diffusiecoëfficient oplevert. Te meer was dit noodig, daar afgezien van experimenteele moeilijkheden, ook een theoretisch bezwaar tegen de methode zoude kunnen worden ingebracht. Het is toch twijfelachtig of de formule:

$$dS = k.\, q.\, \frac{du}{dx}.\, dt.,$$

die voorzeker geldig zal zijn, zoodra eenmaal door diffusie een geleidelijke overgang in concentratie tusschen de zoutoplossing en het gedestilleerde water is verkregen, ook reeds gedurende de eerste periode der diffusie mag worden toegepast, wanneer op de spiegelende grens der vloeistoffen een plotselinge verandering in concentratie voorkomt, en dus $\frac{du}{dx}$ aanzienlijke waarden verkrijgt.

De proeven, die ik daartoe nam met oplossingen van zoutzuur, dat tot de snelst diffundeerende stoffen behoort,

waarbij de duur der proeven van 1 tot 18 dagen, de teruggebleven hoeveelheid zoutzuur van 97 pCt. tot 39 pCt. afwisselt, en waarbij overeenstemmende waarden van *k* werden verkregen, bewijzen echter, dat die afwijking zoo ze bestaat bij proeven van niet al te korten duur, allen invloed op de uitkomst verliest. Wel schijnen eenige der proeven, waarbij de diffusie slechts gedurende één dag plaats had, er op te wijzen, dat de diffusie aanvankelijk iets sneller plaats vindt dan later; maar men moet hierbij niet vergeten, dat juist bij deze proeven een kleine fout in de bepaling van het in den cilinder teruggebleven deel een grooten invloed op de waarde van *k* uitoefent.

De proeven werden ingericht als volgt. Met behulp van bovengenoemde buret werden de cilinders juist tot $^2/_3$ gevuld; ik plaatste ze daarna in groote cilinderglazen, waarin op een afstand van ongeveer 12 c.M. van den bovenwand twee glazen staven, die aan hun uiteinden door kurken verbonden waren, horizontaal waren geplaatst. De kurken drukken stevig tegen den glaswand aan en vormen zoodoende met de twee staven een stevige onderlaag, waarop de cilinders konden worden geplaatst; bovendien kan deze brug gemakkelijk worden verschoven en telkens er voor worden gezorgd, dat de cilinders verticaal komen te staan; het volumen van de groote cilinderglazen was ongeveer $3^1/_2$ liter; de gebruikte oplossing diffundeerde dus in ongeveer de 40-voudige hoeveelheid water; de cilinderglazen werden geplaatst in groote houten kisten, die om hen zooveel mogelijk tegen temperatuurwisselingen te beschermen, over de binnenwanden met een dikke laag hooi en stroo waren bekleed, en in een kelder waren geplaatst. Daarop werden de cilinderglazen voor een groot gedeelte met water gevuld, het voor $^2/_3$ gevulde cilindertje daarin geplaatst, en na een paar uren, wanneer ik kon aannemen, dat de inhoud van het cilinderglaasje de keldertemperatuur had aangenomen met het vullen daarvan begonnen. Ik liet daartoe op de oplossing in het cilindertje een vochtig kurkschijfje drijven, waarin loodrecht een dun glazen staafje was bevestigd, liet daarop uit een reageerbuisje, waarvan de bodem tot een lange dunne

capillair was uitgetrokken, langzaam water langs het staafje bijdruppelen, nadat het buisje zelf in een statief was vastgeklemd en het uiteinde van zijn capillair tegen het staafje was geplaatst. Men bereikt aldus een volkomen spiegelend oppervlak. Was dan na ongeveer een half uur het cilindertje gevuld, dan werd het groote cilinderglas tot bijna aan het niveau van het cilinderglaasje met zuiver water (dat in een groote flesch in den kelder werd bewaard) aangevuld, en daarna met behulp van een pipet langzaam en voorzichtig zooveel water toegevoegd, dat dit ongeveer $^1/_2$ c.M. boven den rand van het cilinderglaasje kwam te staan. Wanneer de diffusie zou worden gestaakt, werd snel het cilindertje met behulp van een glazen plaatje gesloten, daarop uit het water genomen en, nadat het uitwendig geheel met water was afgespoeld, in een schaaltje geledigd en daarop tot 250 c.M^3 verdund. De duur der proeven strekte zich over een tijdsverloop van 1—20 dagen uit; de daarbij opgegeven temperatuur geeft het gemiddelde van de gedurende den duur der diffusie waargenomen temperaturen; de grootste afwisselingen, die aan de thermometers, die boven de kisten waren geplaatst, werden waargenomen, bedroegen 2—3^0.

Van de voor de diffusie gebruikte oplossingen werden in den regel eveneens 50 c.M^3 tot 250 verdund; de vloeistoffen komen onder deze omstandigheden voor en na de diffusie vrij wel in sterkte overeen, en fouten in de quantitatieve bepaling worden daardoor zooveel mogelijk verwijderd. Bij de titratie van zuren gebruikte ik als indicator phenolphtaleïn, waarvan ik volgens het bekende voorschrift 1 deel in 30 dln. alcohol oploste en voor elke 100 c.M^3 der te titreeren vloeistof 1 of 2 druppels bezigde; met behulp van 1 druppel $^1/_{10}$ normaal natronloog is de overgang van de zure in de alkalische reactie der vloeistof alsdan gemakkelijk waar te nemen. Nadat de bruikbaarheid der methode voor het zoutzuur was gebleken, heb ik voor eenige verbindingen de grootte van de diffusieconstante getracht te bepalen; de verkregen resultaten zijn in de volgende tabellen vervat.

Zoutzuur.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ gebruikt zuur tot 250 c.M³ verdund, is:	inhoud diffusieglaasje tot 250 c.M³ verdund, is:	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temperat.	diff. const.
N.	64.6 c.M³ H Cl	1 c.M³ zuur = 2.1 c.M³ KOH	1 c.M³ zuur = 2.64 c.M³ KOH	1ᵈ 1ᵘ	0.9730	$7^1/_2{}^0$	2.57
H.	62.2 » »	1 » » = 2.1 » »	1 » » = 2.42 » »	1 $23^1/_4$	0.9263	$7^1/_2{}^0$	2.28
D.	62.2 » »	1 » » = 2.1 » »	1 » » = 2.33 » »	3 $^1/_4$	0.8919	$7^1/_2{}^0$	2.01
D.	62.2 » »	1 » » = 2.1 » »	1 » » = 2.22 » »	3 $23^1/_4$	0.8498	$7^1/_2{}^0$	1.98
F.	62.8 » »	1 » » = 2.1 » »	1 » » = 2.07 » »	5 $^5/_6$	0.7848	$7^1/_2{}^0$	2.14
K.	61 » »	1 » » = 2.1 » »	1 » » = 1.91 » »	6 $2^{11}/_{12}$	0.7455	$7^1/_2{}^0$	2.04
A.	59.3 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.71 » »	8 $2^2/_3$	0.6833	8^0	2.00
K.	61 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.55 » »	10 $2^{11}/_{12}$	0.6021	8^0	2.00
D.	62.2 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.45 » »	12 $^3/_{10}$	0.5524	8^0	1.97
O.	62.8 » »	1 » » = 2.65 † » »	1 » » = 2.85 † » »	3 $1^1/_{12}$	0.8563	$8^1/_2{}^0$	2.45
H.	62.2 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.18 » »	14 $^1/_2$	0.4495	$8^1/_2{}^0$	2.16
F.	62.8 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.15 » »	16 $1^7/_{10}$	0.4339	$8^1/_2{}^0$	2.03
G.	65.2 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.07 » »	17 $19^5/_6$	0.3889	$8^1/_2{}^0$	2.07
K.	61 » »	1 » » = 2.575 » »	1 » » = 3.074 » »	1 $2^5/_6$	0.9785	9^0	2.06
A.	59.3 » »	1 » » = 2.575 » »	1 » » = 2.878 » »	1 $19^5/_6$	0.9424	9^0	2.21
D.	62.2 » »	1 » » = 1.275 » Na OH	1 » » = 1.104 » NaOH	6 $1^3/_{20}$	0.6960	$15^1/_2{}^0$	2.51
H.	62.2 » »	1 » » = 1.32 » »	1 » » = 1.0363 » »	6 23	0.6313	$15^1/_2{}^0$	2.62

† Deze werden niet tot 250 maar tot 500 c.M³ verdund.

Bij de eerste zes cilinders had de gebezigde zoutzuur-oplossing ongeveer 1.04 s. g; bij N^{0}. 7, 8, 9, 11, 12 en 13 was ze iets sterker; bij N^{0}. 10 ongeveer 1.10; bij 14 en 15 ongeveer 1.05 en bij 16 en 17 weer ongeveer 1.04.

Vergelijken we de waarden voor den diffusiecoëfficient in de bovenstaande proeven verkregen, dan komt het mij wenschelijk voor de proeven zoo lang voort te zetten tot minstens ongeveer 10 pCt. is gediffundeerd. Bij dezelfde fout in de quantitatieve bepaling wordt dan ook de invloed daarvan op de grootte van den coëfficient zooals die uit de waarde $\frac{kT}{h^2}$ wordt berekend, kleiner naar mate meer is gediffundeerd; maar 10 pCt. schijnt mij voldoende toe om tot zekere resultaten te geraken.

Zuringzuur.

Het herhaalde malen uit water omgekristalliseerde zuur liet na verhitten op een platinablikje niets terug.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M^3 zuur tot 250 verdund is 1 c.M^3 =	inh. diff. glaasje tot 250 verdund is 1 c M^3 =	duur	diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
G.	65.2c.M^3	0.616c.M^{3}KOH	0.658c.M^{3}KOH	12^d	21¼^u	0.8191	7½°	0.72
A.	$5^{0}.3$ 〃	0.956 〃 〃	0.976 〃 〃	10	23⅔	0.8608	7½°	0.686
O.	62.8 〃	0.642 〃 〃	0.713 〃 〃	8	23	0.8842	7½°	0.70

De oplossing van het zuur in A was ongeveer van 6 pCt., in G en O ongeveer van 4 pCt. sterkte.

Azijnzuur.

Uit een groote hoeveelheid ijsazijn werd zuivere azijn door gefractioneerde destillatie afgescheiden en dit in water opgelost tot de sterkte van de oplossing ongeveer 8 pCt. bedroeg.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ zuur verdund tot 250, is 1 c.M³ =	inh. diff. glaasje tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
K.	61 c.M³	1.77 c.M³ KOH	1.87 c.M³ KOH	11ᵈ	0.8659	8°	0.64
F.	62.8 "	2.05 " "	2.22 " "	11	0.8622	8°	0.66
D.	62.2 "	1.97 " "	2 1 " "	11	0.8569	8°	0.68
F.	62.8 "	†0. " NaOH	0.835 " NaOH	12 21 1/2 u	0 7978	14 1/2°	0.79
G.	65.2 "	†0.5 " "	0.847 " "	12 21 1/2	0.7794	14 1/2°	0.86
N.	64.6 "	†0.5 " "	0.873 " "	12 21 1/4	0.8109	14 1/2°	0.77

† Hier werden 30 c.M³ van de gebruikte azijnzuuroplossing tot 250 verdund.

Citroenzuur.

Gewoon citroenzuur werd herhaalde malen uit water omgekristalliseerd, daarop tusschen filtreerpapier droog geperst en oplossingen bereid van ongeveer 5 en 9 pCt. Na 12 dagen werd de diffusie gestaakt om door intredende schimmelvorming geen onzekerheid in de resultaten te verkrijgen.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ zuur verdund tot 250, is 1 c.M³ =	inh. diff. cilinder tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
G.	65.2 c.M³	0.629 c.M³ KOH	0.74 c.M³ KOH	12ᵈ 22 2/15 u	0.9022	9°	0.44
A.	59.3 "	0.629 " "	0.68 " "	12 22 11/12	0.9115	9°	0.41
F.	62.8 "	†1.118 " "	1.287 " "	12 23 1/12	0.9130	9°	0.40

† is verdund tot 251 c.M³.

Wijnsteenzuur.

Het zuur uit den handel werd eveneens herhaalde malen omgekristalliseerd, tusschen filtreerpapier gedroogd en dan oplossingen bereid van ongeveer 4 en 7 pCt.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ zuur tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	inh. diff. glaasje tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
D.	62.2 c.M³	0.845 c.M³KOH	0.806 c.M³KOH	26d 23$^3/_4$u	0.7668	9°	0.43
H.	62.2 "	0.845 " "	0.776 " "	26 3$^7/_{12}$	0.7382	9°	0.48
O.	62.8 "	0.498 " "	0.4965 " "	22 23$^7/_{12}$	0.7938	9°	0.45
K.	61 "	0.498 " "	0.482 " "	22 3$^7/_{12}$	0.7934	9°	0.46

Barnsteenzuur.

Ook dit zuur werd herhaaldelijk omgekristalliseerd; de gebruikte oplossing bevatte ongeveer 5 pCt.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ tot 250 verdund, is 1 c.M³ zuur =	inh. diff. glaasje tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
K.	61 c.M³	0.393 c.M³KOH	0.382† c.M³KOH	18d $^5/_{12}$u	0.7999	15°	0.55
D.	62.2 "	0.393 " "	0.395 " "	17 23$^1/_2$	0.8080	15°	0.54
A.	59.3 "	0.393 " "	0.377 " "	18 $^1/_4$	0.8089	15°	0.55

† is verdund tot 251 c.M³.

Manniet.

Manniet uit de fabriek van KAHLBAUM afkomstig werd nog eens uit alcohol omgekristalliseerd, daarop gedroogd en in water opgelost. De hoeveelheid opgeloste manniet werd bepaald door indampen van een afgemeten volumen der oplossing in een platinaschaal op het waterbad en drogen tot constant gewicht bij 100°.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ der gebruikte opl. bevatten	de in 't diff. cilindertje nog voorhanden hoeveelh. bedroeg	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. cons
A.	59.3 c.M³	2.2113 gr.	2.1840 gr.	23d 2$^2/_3$u	0.8328	10°	0.38
F.	62.8 "	2.2113 "	2.2033 "	27 3$^5/_{12}$	0.7933	10°	0.38
G.	65.2 "	2.2113 "	2.4054 "	21 23$^1/_{12}$	0.8342	10°	0.39

Natriumacetaat.

Het zout werd herhaaldelijk ongekristalliseerd en daarna oplossingen van verschillende sterkte bereid. De hoeveelheid zout werd bepaald door indampen van een afgemeten volumen der oplossing met een overmaat van zoutzuur, gloeien en wegen.

Cilinder.	gevuld met	van 50 c.M³ der opl. die tot 250 werden verdund, leveren	inh. diff. glaasje tot 250 verdund, leveren	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
D.	62.2 c.M³	20 c.M³ 0.2480 gr.	20 c.M³ 0.2081 gr.	23d 21 7/10 u	0.6745	14°	0.68
A.	59.3 "	20 " 0.2480 "	20 " 0.2145 "	19 22 8/15	0.7293	14°	0.69
F.	62.8 "	50 " 0.4734 "	50 " 0.3869 "	24 22	0.6507	15°	0.71
K.	61 "	50 " 0.1962 "	50 " 0.1590 "	23 22 37/60	0.6643	14°	0.70
G.	65.2 "	50 " 0.3725 "	50 " 0.3186 "	24 21 7/12	0.6559	15°	0.70
N.	64.6 "	50 " 0.9294 "	50 " 0.8351 "	24 21 5/6	0.6954	15°	0.63
H.	62.2 "	50 " 0.3521 "	50 " 0.2614 "	26 22	0.5968	14°	0.75

in A en D waren dus voorhanden in 100 c.M³ zoutoplossing 8.68 gr. $C_2H_3O_2Na$

"	F	was " " " " " "	6.63 "	"
"	K	" " " " " " "	2.75 "	"
"	G	" " " " " " "	5.21 "	"
"	N	" " " " " " "	13.01 "	"
"	H	" " " " " " "	4.93 "	"

Chloraalhydraat.

Van chloraalhydraat, dat eenige malen uit zwavelkoolstof was omgekristalliseerd, werden 2 oplossingen bereid, de eene van ongeveer 5 pCt. de andere van ongeveer 8 pCt. Het opgeloste chloraalhydraat werd quantitatief bepaald naar de methode van VICTOR MEYER *) door ontleding door een bekende hoeveelheid normaalnatronloog en titreeren van de

*) *Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch.* Bd. 6. S 600.

overmaat der gebruikte base door zuringzuuroplossing. 50 c.M³ van de gebruikte oplossingen werden evenals de inhoud der diffusiecilindertjes tot 250 c.M³ verdund en daarop 100 of 150 c.M³ dezer oplossingen voor de ontleding door normaalnatronloog gebezigd.

Cilinder	gevuld met	A 100 c.M³ gebruikte opl + 60 c.M³ Na OH in tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	B 100 c.M³ gediff. opl. + 60 c M³ Na OH tot 250 verdund : is 1 c.M³ =	in A corresp. de nog voorhanden hoev. Na OH aan : ††	in B cor resp. de nog voorhanden hoev. Na OH aan : ††	de totaal verdwenen hoev. Na OH corr. in gebruikte opl. aan:	de totaal verdwenen hoev. Na OH corresp. in 't diffusie cilindertje aan :	duur diff.	in 't diff. cilindertje teruggebleven deel.	temp.	d c
	c M³	c.M³ zuur	c.M³ zuur	c M³ zuur	c.M³ zuur	c.M³	c M³				
H.	62.2	0.8437	0.827	210.925	206.75	111.31	121.75	11ᵈ 19¹/₆ᵤ	0.8793	9°	0
O.	62.8	0.8437	0.730†	210.925	182.50	111.31	121.58	13 19	0.8697	9°	0
D.	62.2	0.8634†	0.903	215.85	225.75	66.0	74.25	9 23	0.9044	9°	0
K.	61.	0 8634†	0.9105	215 85	227.625	66.0	69.56	12 23¹¹/₁₂	0.8639	9°	0

† hier werden 150 c.M³ chloraalhydraatopl. met 60 c.M³ natronloog tot 250 c.M³ verdund

†† Werden de 60 c.M³ natronloogoplossing tot 250 c.M³ verdund, dan was 1 c.M³ natronloog = 1.0218 c.M³ zuur.

Chloorammonium.

Het gebruikte zout was vooraf eenige malen uit warm water omgekristalliseerd. De sterkte der oplossing bedroeg 4.66 pCt.

Cilinder	gevuld met	van 50 cM³ opl. verdund tot 250, leveren 50 c M³ na indampen en drogen tot const gew. bij 100°	inhoud diff. glaasje tot 250 verdund, leveren 50 c.M³ na indampen en drogen tot const gew. bij 100°	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel	temp.	diff. const
F.	62.8 c.M³	0.4659 gram	0.2733 gram	22ᵈ 23⁵/₆ᵤ	0.4670	17¹/₂°	1.296
G.	65.2 "	0.4659 "	0.3228 "	18 21¹/₁₂	0.5313	17¹/₂°	1.34
N.	64.6 "	0.4659 "	0.2868 "	23	0.4764	17¹/₂°	1.307

Mogen ook sommige resultaten onderling vrij sterke afwijkingen soms vertoonen, toch geloof ik uit de medege-

deelde proeven te mogen afleiden, dat de methode, zooals die in het bovenstaande is meegedeeld tot bruikbare resultaten leidt. Dat afwijkingen in de proeven onderling moeten voorkomen is met het oog op het tal van waarnemingsfouten, die bij den gang der proeven kunnen insluipen, te voorzien; stroomingen ten gevolge van temperatuurwisselingen, die gedurende een tijdsverloop van 20 dagen wel niet te vermijden zijn; geringe storingen bij het over elkaar gieten der vloeistoffen in het cilinderglaasje, ook al vindt dit met de grootste omzichtigheid plaats, laten moeilijk altijd een volledige overeenstemming in de voor *k* verkregen waarden toe. De proeven worden voortgezet in den boven aangegeven zin alleen met korter cilinders dan de gebezigde, in de hoop daardoor de fouten, die aan stroomingen ten gevolge van intredende temperatuurwisselingen te wijten zijn, door korter duur der proeven te verkleinen.

In de aan dit verslag toegevoegde tabel II zijn de resultaten van de boven meegedeelde proeven en die van de proeven van GRAHAM *), zooals STEFAN †) die onlangs berekend heeft, samengesteld.

Onderzoekingen over de diffusiesnelheid van zouten zijn in den laatsten tijd medegedeeld door SCHUHMEISTER §) en LONG **).

Een vergelijking tusschen de door andere onderzoekers en de door mij gevonden waarden voor den diffusiecoëfficient is bij het voorhanden materiaal alleen mogelijk voor chlooranmonium en zoutzuur.

SCHUHMEISTER vond $k = 1.33$ voor een chloorammoniumoplossing van 12 $^0/_0$ sterkte bij de temperatuur $20\frac{1}{2}^0$; ik vond $k = 1.32$ voor een chloorammoniumoplossing van $4.66^0/_0$ sterkte bij de temp. $17\frac{1}{2}^0$.

GRAHAM vond voor de diffusieconstante van zoutzuur bij

---

*) *Ann. d. Chem. u. Pharm.* Bd. 121.

†) *Wiener Akad. Ber.* Bd. 79.

§) *Wiener Akad. Ber.* Bd. 79. S 603.

**) Zijn proefschrift. *On the diffusion of liquids,* 1879. Tübingen H. Laupp.

de temp 5^0 $k = 1.742$; als het gemiddelde van 13 waarnemingen bij de gemiddelde temp 8^0, en van 2 waarnemingen bij de temperatuur $15\frac{1}{2}^0$, bereken ik $k_8 = 2.07$ en $k_{15 \cdot 5} = 2.57$. Om een vergelijking mogelijk te maken, neem ik aan, dat binnen de grenzen 5^0—15.5^0 de diffusiesnelheid met de temperatuur toeneemt volgens de formule $k_t = k_0 (1 + \alpha t)$. Bereken ik dan uit mijn proeven: $2.07 = k_0 (1 + 8\alpha)$ en $2.57 = k_0 (1 + 15\frac{1}{2}\alpha)$, $k_0 = 1.35$ en $\alpha = 0.066$, dan volgt daaruit voor $k_5 = 1.77$, hetgeen met de door GRAHAM bij die temperatuur gevonden waarde overeenstemt.

Ik begon mijn onderzoek met het doel een poging in het werk te stellen voor het nagaan van den invloed van het moleculair gewicht en moleculair volumen en misschien ook van de structuur der verbinding op haar diffusiesnelheid; daarom heb ik als stoffen gekozen, waarover het voortgezet onderzoek zich vooreerst zal uitstrekken, eenige homologe verbindingen als natriumzouten van vetzuren en aromatische zuren, eenige phenolen en sulfozuren.

Ook voor eenige »physische" isomeren als rechts en links wijnsteenzuur, druivezuur zullen onder gelijke omstandigheden de diffusieconstanten worden bepaald.

Breda, November 1881.

TABEL I.

$\frac{Q_0-Q}{Q_0}$	$\frac{kT}{h^2}$	D	$\frac{Q_0-Q}{Q_0}$	$\frac{kT}{h^2}$	D.
					— 592
1.00	0.00000		0.68	0.17722	— 601
0.99	0.01865	—630	0.67	0.18323	— 609
0.98	0.02495	—538	0.66	0.18932	— 618
0.97	0 03033	—500	0.65	0 19550	— 628
0.96	0.03533	—479	0.64	0.20178	— 639
0.95	0.04012	—468	0.63	0 20817	— 649
0.94	0.04480	—463	0.62	0.21466	— 659
0.93	0.04943	—459	0.61	0.22125	— 670
0.92	0.05402	—460	0.60	0.22795	— 681
0.91	0.05862	—461	0.59	0.23476	— 692
0.90	0.06323	—461	0.58	0.24168	— 705
0.89	0.06784	—465	0.57	0.24873	— 717
0.88	0.07249	—469	0.56	0.25590	— 730
0.87	0.07718	—473	0.55	0.26320	— 744
0.86	0.08191	—477	0.54	0.27064	— 757
0.85	0.08668	—482	0.53	0.27821	— 774
0.84	0.09150	—487	0.52	0.28595	— 787
0.83	0.09637	—493	0.51	0.29382	— 802
0.82	0.10130	—498	0.50	0.30184	— 818
0.81	0.10628	—504	0.49	0.31002	— 836
0.80	0.11132	—511	0.48	0.31838	— 854
0.79	0.11643	—518	0.47	0.32692	— 871
0.78	0.12161	—523	0.46	0.33563	— 891
0.77	0.12684	—530	0.45	0.34454	— 911
0.76	0.13214	—537	0.44	0.35365	— 931
0.75	0.13751	—544	0.43	0.36296	— 954
0.74	0.14295	—551	0.42	0.37250	— 977
0.73	0.14846	—559	0.41	0.38227	—1001
0.72	0 15405	—567	0.40	0.39228	—1026
0.71	0.15972	—575	0.39	0.40254	—1052
0.70	0.16547	—583	0.38	0.41306	
0.69	0.17130	—592			

TABEL II.

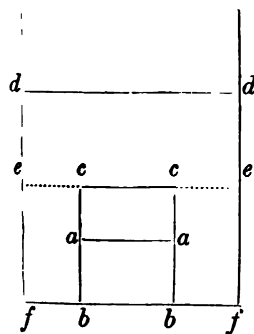
		Formule.	Mol. gew.	Mol. vol.	Diff. const.	temp.	
1.	Zoutzuur	HCl	36.5		1.742	5°	GRAHAM
	〃	〃	〃		2.07	8°	SCHEFFER
	〃	〃	〃		2.56	15½°	〃
2.	Chloorammonium	NH^4Cl	53.5	35.2[1]	1.31	17½°	〃
3.	Chloornatrium . .	NaCl	58.5	26.2[1]	0.76	5°	GRAHAM
	〃	〃	〃	〃	0.91	10°	〃
4.	Azijnzuur	$C_2H_4O_2$	60		0.66	8°	SCHEFFER
	〃	〃	〃		0.78	14½°	〃
5.	Barnstoenzuur. . .	$C_4H_6O_4$	118	75.3[1]	0.55	15°	〃
6.	Zuringzuur	$C_2O_4H_2$ 2aq	126	76.4[1]	0.71	7½°	〃
7.	Azijnzuurnatrium	C_2H_3O Na 3 aq	136	97.2[1]	0.69	15°	〃
8.	Wijnsteenzuur . .	$C_4H_6O_6$	150	85.7[1]	0.45	9°	〃
9.	Chloraalhydraat .	C_2Cl_3OH. aq	165.5	91.0[1]	0.55	9°	〃
10.	Manniet.	$C_6H_{14}O_6$	182	122.5[1]	0.38	10°	〃
11.	Citroenzuur. . . .	$C_6H_8O_7$	192	135.2[2]	0.41	9°	〃
12.	Magnesiumsulfaat	$MgSO_4$ 7aq	246		0.354	10°	GRAHAM
13.	Rietsuiker.	$C_{12}H_{22}O_{11}$	342	215.4[1]	0.312	9½°	〃
14.	Arab. gom	$(C_6H_{10}O_5)x$	162.x		0.13	10°	〃
15.	Looizuur	—	—		0.101	10°	〃
16.	Caramel	—	—		0.047	10½°	〃
17.	Albumine.	—	—		0.063	13°	〃

[1] Ontleend aan de opgaven van SCHRÖDER. *Ber. d. deutsch. Chem. Ges.* Bd. 10. S. 851 en Bd. 12. S. 120, 562.

[2] Berekend naar BUIGNET's opgave van 't s. g. 1.553 voor $C_6H_8O_7$, H_2O.

NASCHRIFT.

De Heeren VAN BEMMELEN en DIBBITS voeren in hun verslag over mijn verhandeling als bezwaar tegen de door mij gevolgde methode van experimenteeren aan de geringe hoogte van het water boven de cilinders en vreezen, dat dit belemmerend op de diffusie gewerkt moet hebben. Ik stelde daarom nog de volgende proeven in het werk om na te gaan, in hoeverre het meer of minder diep geplaatst zijn van den cilinder onder het water-niveau al of niet invloed heeft op de voor *k* verkregen waarden. Ik plaatste daartoe op den bodem van een bekerglas een cilindertje, dat voor een deel met een indigo-oplossing was gevuld, vulde daarop als boven beschreven het cilindertje met water aan, en daarna ook de ruimte tusschen bekerglas en cilinder tot het ongeveer 3 cM. boven het oppervlak van den cylinder kwam te staan. Het blijkt mij nu, dat de donkerblauwe vloeistof in *aabb* langzaam overgaat in het water; dat *aacc* zeer licht blaauw wordt gekleurd, terwijl in het boven *cc* aanwezige water geen blauwkleuring is waar te nemen, maar wel in het water *eeff*, en wel toenemende, naar mate men een laag dichter bij den bodem van het bekerglas waarneemt. Eerst na geruimen tijd, wanneer het water in *eeff*, sterk blauw is geworden, verheft zich de blauwe kleurstof ook boven de lijn *ecce*.



Bij de drie volgende proeven met zoutzuur, waarbij de cilinders op verschillende diepte onder den waterspiegel wa-

ren geplaatst, gebruikte ik cilinders van de volgende afmetingen.

	$h\pi r^2$	$\sqrt{h^2+4r^2}$	h	h^2	r
1.	55.41 c.M³.	6.08 c.M³.	4.65	21.62	1.94
6.	48.95 »	5.86 »	4.54	20.61	1.85
7.	53.12 »	6.03 »	4.68	21 90	1.90

De resultaten van de proeven, die op gelijke wijze als de boven beschreven werden uitgevoerd, zijn in het volgende tabelletje vervat.

Cilinder	gevuld met	32 c.M³ gebruikt zuur tot 125 c.M³ verdund is 1 c.M³ zuur =	rest diffusiecilinder tot 125 c.M³ verdund is 1 c.M³ zuur =	diepte cilinder onder waterspiegel	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel	temp.	diff. const.
	c.M³ zuur	c.M³ Na OH	c.M³ Na OH					
1.	36.9	1.222	0.650	21½ m.M.	3ᵈ 22³/₄ᵘ	0.4613	6½°	1.842
6.	32.6	1.222	0.549	5½ »	3 21½	0.4410	6½°	1.866
7.	35.4	1.222	0.618	12 »	3 22⅙	0.4572	6½°	1.887

Het komt mij voor dat deze proeven, zoowel als de indigoproef, de door de Heeren VAN BEMMELEN en DIBBITS geopperde bedenking tegen de juistheid van de door mij bepaalde waarden van de diffusieconstanten der onderzochte stoffen, weerleggen en aantoonen dat de waterhoogte van ongeveer ½ c M boven de cilinders voldoende is geweest om tot juiste waarden te geraken.

Veendam, Januari '82.

RAPPORT OVER EENE VERHANDELING

VAN DEN HEER

T. J. STIELTJES Jr.:

„BIJDRAGE TOT DE THEORIE DER DERDE- EN VIERDE-MACHTSRESTEN”.

Uitgebracht in de Vergadering van 28 Januari 1882.

Uwe commissie, aan wie de beoordeeling der Verhandeling »Bijdrage tot de theorie der derde- en vierde machtsresten van T. J. Stieltjes Jr.” in de laatste vergadering opgedragen was, heeft hierbij de eer zich van hare taak te kwijten.

De schrijver stelt zich daarin voor, langs eene zich gelijkblijvende of geheel gelijksoortige methode het karakter in de getallenleer van $1 + \sqrt[2]{1} = 2$, $1 + \sqrt[3]{1} = 1 - \varrho$, $1 + \sqrt[4]{1} = 1 + i$ af te leiden, en wel met behulp van de theorie der complexe getallen; hierbij steunende op eene verhandeling van C. F. Gauss »De residuorum biquadraticorum Commentatio prima,” door hem op 5 April 1825 bij de Kon. Societät der Wissenschaften te Göttingen ingediend, en waarop later wel de tweede, maar nimmer de derde verhandeling is gevolgd.

Hoezeer het bij dit afgetrokken onderwerp uit de getallenleer niet zonder bezwaren is, willen wij toch trachten u een denkbeeld te geven van het verband en de opeenvolging der redeneringen.

Bij de theorie der quadratische resten verdeelt schrijver de getallen 1 tot $(p - 1)$, waar p een priemgetal voorstelt, in twee groepen, die het quadratisch karakter 0 of 1 hebben, en vormt dan daarmede twee congruentiën van $\frac{1}{2}(p - 1)$

faktoren. Daarbij gedragen zich de vormen $4n + 1$ en $4n + 3$ zeer verschillend.

Bij de biquadratische resten verdeelt hij de getallen 1 tot $\mu - 1$, waar μ de norm (of modulus) is van het priemgetal M, (hier in het algemeen complex, $= a + bi$), in vier groepen, die nu het biquadratisch karakter 0, 1, 2, 3 hebben met behulp waarvan dan vier congruentiën worden gevormd elk van $\frac{1}{4}(\mu - 1)$ factoren. Hier gedragen zich de vormen $8n + 1$ en $8n + 5$ weder geheel anders.

In beide theoriën telt hij nu bij de getallen van iederen groep de eenheid op: en hierbij komt het aan op die getallen, welke aan de oude en de nieuwe groepen gemeen zijn. Het aantal telkens dezer gemeenschappelijke waarden worde voorgesteld door eene afzonderlijke notatie (a, b), waar a voorstelt het nummer der groep, behoorende tot de laatste soort, en b evenzeer dat der groep van de eerste soort. Voor de beide theoriën heeft men dus de volgende schemata. geschreven in den vorm eener determinante,

$$\begin{matrix} (0.0) & (0.1) \\ (1.0) & (1.1), \end{matrix}$$

en

$$\begin{matrix} (0.0) & (0.1) & (0.2) & (0.3) \\ (1.0) & (1.1) & (1.2) & (1.3) \\ (2.0) & (2.1) & (2.2) & (2.3) \\ (3.0) & (3.1) & (3.2) & (8.3). \end{matrix}$$

Het komt er nu op aan, om te bewijzen, welke dezer aantallen $(a.b)$ onderling gelijk zijn.

Bij de quadratische resten, van den vorm $4n + 1$ in de eerste plaats, bewijst hij eerst, dat $(0.1) = (1.0)$, later dat $(1.1) = (0.1)$ is. Dit heeft tengevolge, dat het bovenvermelde schema veel eenvoudiger wordt, en wel

$$\begin{matrix} h & j \\ j & j; \end{matrix}$$

en hieruit leidt hij verder af

$$4h = p - 5, \quad 4j = p - 1.$$

Heeft hier het priemgetal p echter den anderen vorm $4n + 3$, dan bewijst hij evenzoo, eerst dat $(0.0) = (1.1)$, vervolgens dat $(1.0) = (0.0)$ is; zoodat hier het schema den meer eenvoudigen vorm aanneemt

$$\begin{matrix} h & j \\ h & h; \end{matrix}$$

waaruit hij verder afleidt

$$4h = p - 3, \quad 4j = p + 1.$$

Bij de biquadratische resten behandelt schr. eerst den vorm $8n + 1$, en daaromtrent bewijst hij eerst de gelijkheden

$$(0.1) = (1.0),\ (0.2) = (2.0),\ (0.3) = (3.0),\ (1.2) = (2.1),\ (1.3) = (3.1),\ (2.3) = (3.2);$$

en daarna weder de volgende

$$(0.1) = (3.3),\ (0.2) = (2.2),\ (0.3) = (1.1),\ (1.2) = (1.3) = (2.3).$$

Voert men deze gelijkheden alle in het schema voor de biquadratische resten in, dan wordt dit veel vereenvoudigd, en luidt aldus

$$\begin{matrix} h & j & k & l \\ j & l & m & m \\ k & m & k & m \\ l & m & m & j; \end{matrix}$$

en nu is hij in staat met behulp van dit vereenvoudigd schema vijf vergelijkingen tusschen de letters h tot m te vinden, ten einde daaruit hare waarden op te lossen.

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - 3a - 5, \\ 8j &= 4n + a - 2b - 1, \\ 8k &= 4n + a - 1, \\ 8l &= 4n + a + 2b - 1, \\ 8m &= 4n - a + 1. \end{aligned}$$

Hierbij heeft het getal den vorm $a + bi$: zoodat, ingeval het bestaanbaar wordt, $b = 0$ is. In dit laatste geval verkrijgen dus j en l dezelfde waarde, terwijl zij anders slechts in het teeken van b verschillen.

Vervolgens overgaande tot den tweeden algemeenen vorm $8n + 5$, bewijst schr. wederom eerst, dat

$$(0.0) = (2.2),\quad (0.1) = (3.2),\quad (0.3) = (1.2),\quad (1.0) = (2.3),$$
$$(1.1) = (3.3),\quad (2.1) = (3.0)$$

is, en daarna, dat ook

$$(0.0) = (2.0),\quad (0.1) = (1.3),\quad (0.3) = (3.1),\quad (1.0) = (1.1) = (2.1)$$

moet zijn. Door invoering van al deze gelijkheden in het schema voor de biquadratische resten, verkrijgt men den volgenden, veel eenvoudiger vorm

$$\begin{matrix} h & j & k & l \\ m & m & l & j \\ h & m & h & m \\ m & l & j & m. \end{matrix}$$

Langs dergelijken weg als vroeger tracht hij nu weder vijf vergelijkingen optemaken tusschen de grootheden, die hier door de letters h tot m worden voorgesteld, en geraakt alzoo tot de volgende uitkomsten

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - a - 1, \\ 8j &= 4n - a - 2b + 3, \\ 8k &= 4n + 3a + 3, \\ 8l &= 4n - a + 2b + 3, \\ 8m &= 4n + a + 1. \end{aligned}$$

Ook hier bedenke men, dat het priemgetal den vorm $a+bi$ heeft, zoodat b verdwijnt, wanneer het bestaanbaar wordt; ook hier is in dit laatste geval de gelijkheid van j en l duidelijk; evenzeer. dat zij anders slechts onderscheiden zijn in het teeken van b.

Zoodra schr. nu eenmaal alle waarden (a,b) in het schema

heeft bepaald, leidt hij verder daaruit de gevallen af, wanneer 2 al of niet quadratische rest is van het priemgetal p; evenzoo, wanneer $1+i$ (en tegelijkertijd ook $1-i$, $-1-i$, $-1+i$) al of niet biquadratische rest is van n.

Daarna wordt het gevondene in toepassing gebracht, en o. a. worden de kenmerken opgezocht in de theorie der biquadratische resten, wanneer een bestaanbaar priemgetal tot een der vier vroeger genoemde groepen moet worden gebracht.

En thans gaat schr. over tot eene gelijkvormige ontwikkeling in de theorie der kubische resten. Hier zijn $a+b\varrho$ en $a+b\varrho^2$ (ϱ is zoo als gewoonlijk de complexe derdemachtswortel uit de eenheid) toegevoegde complexen, zoodat hun produkt $(a+b\varrho)(a+b\varrho^2)=a^2-ab+b^2$ de norm wordt.

In deze theorie is $3=-\varrho^2(1-\varrho)^2$ geen priemgetal.

Men heeft hier twee soorten van priemgetallen. Vooreerst de bestaanbare: deze zijn van den vorm $3n-1$, met den norm $(3n-1)^2=3(3n^2-2n)+1$; en vervolgens de complexe priemfactoren van de reelle priemgetallen $3n+1$, welke laatste dan tegelijk de norm dier factoren zijn. De norm is dus altijd van den vorm $3n+1$.

Gaan wij nu verder op het voetspoor der vorige beschouwingen, dan ontmoeten wij vooreerst drie groepen met het kubische karakter 0, 1 en 2. Bij al de getallen in die groepen telt schr. wederom de eenheid bij, voert ook hier de oude notatie (a,b) in, en verkrijgt dan, overeenkomstig het vroeger behandelde, hier het schema

(0.0) (0.1) (0.2)
(1.0) (1.1) (1.2)
(2.0) (2.1) (2.2);

waaruit hij reeds dadelijk het kubisch karakter van $1-\varrho$, en tevens dat van $1-\varrho^2$, afleidt.

Verder bewijst hij eerst, dat hier (0.1)=(0.0), (0.2)=(2.0), (1.2)=(2.1) is, en later dat ook (0.1)=(2.2), (0.2)=(1.1) is.

Door de invoering van deze vergelijkingen wordt het

schema wederom veel eenvoudiger, en verkrijgt hier de gedaante

$$\begin{matrix} h & j & k \\ j & k & l \\ k & l & j. \end{matrix}$$

Nadat hij er in geslaagd is om vier vergelijkingen optesporen, die deze letters h tot l bevatten, verkrijgt hij door eene tamelijk zamengestelde oplossing

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + A - 7, \\ 18j &= 6n - A + 3B - 2, \\ 18k &= 6n - A - 3B - 2, \\ 9l &= 3n - A + 2. \end{aligned}$$

Deze hulpgrootheden A en B hebben eene verschillende waarde bij de vroeger onderscheiden beide soorten van priemgetallen in deze theorie.

Bij de eerste soort, de bestaanbare van den vorm $3n-1$, is $A = 2M$ en $B = 0$, zoodat men heeft

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + 2M - 7, \\ 9j &= 3n - M - 1 = 9k, \\ 9l &= 3n + 2M + 2. \end{aligned}$$

Bij de tweede soort van priemgetallen daarentegen wordt $A = 2a - b$ en $B = b$, waarin a en b gegeven zijn in den vorm $a + b\varrho$ van het priemgetal zelf; en dan wordt

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + 2a - b - 7, \\ 9j &= 3n - a + 2b - 1, \\ 9k &= 3n - a - b - 1, \\ 9l &= 3n + 2a - b + 2. \end{aligned}$$

En thans bepaalt hij daaruit telkens het kubisch karakter van $1 - \varrho$ zoowel als van $1 - \varrho^2$.

Tot zoover loopt de ontwikkeling bij deze theorie der kubische resten evenwijdig aan die bij de beide vorige theoriën der quadratische en biquadratische resten.

Maar nu dringt schr. verder in de theorie der kubische resten. Na invoering der bestaanbare getallen, f en g, die congruent zijn met ϱ en ϱ^2 (Mod. M). behandelt hij nog eens de priemgetallen der tweede soort. Hij zoekt de plaats de plaats te bepalen van het getal 3 in eene der drie bovengenoemde groepen, voor bepaalde gevallen. Op dergelijke wijze doet hij dit ook voor het getal 2; maar gebruikt vervolgens de reciprociteitswet, om zulks te bewerkstelligen voor de getallen 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Uit de verschijnselen, bij deze bijzondere gevallen waargenomen, leidt schr. nu een zestal algemeene stellingen af, waarvan hij alleen de vijfde, als de meest algemeene, maar ook de meest ingewikkelde, gaat bewijzen; waarna hij nog over de zesde eenige opmerkingen geeft.

Misschien is het gelukt, om omtrent dit zoo afgetrokken onderwerp bij eenigen uwer de overtuiging te vestigen van het methodische in den gang van het onderzoek. Wanneer wij daarbij voegen, dat de discussie en de bewijsvoering blijk geeft van scherp wiskundig vernuft; dan zal het u niet bevreemden, dat wij u voorstellen, het stuk, als der Akademie ten volle waardig, in hare werken op te nemen.

Januari, 1882.

D. BIERENS DE HAAN,
C. H. C. GRINWIS.

BIJDRAGE TOT DE THEORIE

DER

DERDE- EN VIERDE-MACHTSRESTEN.

DOOR

T. J. STIELTJES Jr.

Het hoofd-theorema in de theorie der quadraat-resten, de zoogenaamde wet van reciprociteit, heeft betrekking op de wederkeerige verhouding van twee *oneven* priemgetallen, en in eene volledige theorie moet daarom het karakter van het getal 2 als quadraat-rest of niet-rest van een ander oneven priemgetal, afzonderlijk bepaald worden. Het getal 2 blijkt hierdoor eene bijzondere plaats onder alle priemgetallen in te nemen.

De theorema's waardoor het karakter van 2 bepaald wordt, zijn het eerst door FERMAT uitgesproken *) en door LAGRANGE †) bewezen. Hierbij moet echter vermeld worden, dat het bewijs, door LAGRANGE gegeven, op geheel analoge beschouwingen berust, als die, waardoor EULER §) reeds vroeger de theorema's bewezen had die het karakter van 3 als quadraat-rest of niet-rest bepalen, en welke insgelijks reeds door FERMAT waren uitgesproken. Het is daarom des te meer

*) *Op. Mathem.*, p. 168.

†) *Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin* 1775. Oeuvres Tome III. p. 759.

§) *Comment. nov. Petrop.* T. VIII. p. 105.

opmerkelijk. dat EULER steeds te vergeefs getr...t heeft, de theorema's omtrent het karakter van 2 te bewijzen (Vergel. Disq. Arithm. Art. 120).

Een geheel analoog verschijnsel doet zich voor in de theorie der vierde-machtsresten. Ook hier heeft de algemeene reciprociteits-wet betrekking op twee *oneven*, d. w. z. niet door $1 + i$ deelbare, priemgetallen en het karakter van dit bijzondere priemgetal $1 + i$ moet afzonderlijk bepaald wotden.

In de verhandeling van GAUSS: Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda, waarin voor het eerst de geheele complexe getallen van den vorm $a + bi$ in de getallen-theorie ingevoerd werden, is het biquadratisch karakter van $1 + i$ volledig bepaald. Het daar voorkomende bewijs is zuiver arithmetisch gevoerd en steunt wezenlijk op het theorema van Art. 71, dat geheel overeenkomt met de hulpstelling die de grondslag uitmaakt, zoowel van het derde als van het vijfde Gaussische bewijs van de reciprociteitswet in de theorie der quadraat-resten. (Theorematis arithmetici demonstratio nova, Werke II pag. 1 en Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae, Werke II pag. 47).

Zooals bekend is, heeft GAUSS zijn voornemen, in eene derde verhandeling de theorie der vierde-machtsresten tot een zeker einde te brengen door het bewijs te leveren van de algemeene reciprociteits-wet, die reeds in de tweede verhandeling over deze theorie uitgesproken is, niet ten uitvoer gebracht.

De eerste gepubliceerde bewijzen van dit fundamenteele theorema zijn de beide van EISENSTEIN in het 28ste deel van CRELLE's Journal für Mathematik pag. 53 en 223. In het eerste stuk: »Lois de réciprocité" wordt het karakter van $1 + i$ niet behandeld, wel in het tweede stuk: Einfacher Beweis und Verallgemeinerung des Fundamentaltheorems für die biquadratischen Reste. Bij de daar voorkomende afleiding van het karakter van $1 + i$ wordt echter gebruik gemaakt van de vooraf bewezen algemeene reciprociteits-wet, wat mij in elk geval minder schoon voorkomt, daar de overgang van het meer eenvoudige tot het samengestelde toch stellig ver-

langt het karakter $1 + i$ geheel onafhankelijk van het fundamentaal-theorema af te leiden.

Hetzelfde geldt in meerdere of mindere mate van alle andere methoden, die later bekend gemaakt zijn om de theorie der vierde-machtsresten te behandelen, en voorzoover ik zie, kan alleen van de Gaussische afleiding van het karakter van $1 + i$ gezegd worden, dat zij zuiver arithmetisch is, en geheel onafhankelijk van de algemeene wet van reciprociteit, zoodat zij hierdoor voldeed aan de eischen die men aan een geleidelijke ontwikkeling van de geheele theorie der vierde-machtsresten zal moeten stellen.

Geheel analoge bemerkingen zijn te maken omtrent de theorie der derde-machtsresten. Het eerste gepubliceerde bewijs van de door JACOBI uitgesproken wet van reciprociteit in deze theorie, is dat van EISENSTEIN in Bd. 27 van CRELLE's Journal für Mathematik pag. 289. Het afzonderlijk te bepalen karakter van $1 - \varrho$ (waarin ϱ een complexe derde-machtswortel der eenheid) is eerst later gegeven door EISENSTEIN in Bd. 28 pag. 28 en vv. van hetzelfde tijdschrift. Bij deze afleiding wordt weder gebruik gemaakt van de algemeene wet van reciprociteit, en ik zie niet dat tot dus ver eene afleiding van het cubisch karakter van $1 - \varrho$ gegeven is waarvan dit niet gezegd kan worden.

Daar het nu toch wenschelijk voorkomt, eene afleiding te bezitten voor het karakter van $1 + i$ en $1 - \varrho$, geheel afgescheiden van de algemeene reciprociteits-wetten, zoo is het misschien niet geheel van belang ontbloot, dat al deze theorema's, betrekking hebbende op de priemgetallen 2, $1 + i$, $1 - \varrho$ en die tot aanvulling der reciprociteits-wetten noodzakelijk zijn, volgens eene *gelijk blijvende methode* bewezen kunnen worden.

Het principe van deze methode bestaat daarin, het priemgetal waarvan het karakter te bepalen is, te vervangen door een congruent product van factoren. Het karakter dezer factoren wordt dan bepaald door beschouwingen, geheel overeenkomstig aan die van GAUSS in Art. 15—20 van zijne *eerste* verhandeling over de theorie der vierde-machts-resten (Werke II pag. 78—87). GAUSS beschouwt in deze verhan-

deling alleen reële getallen, en het doel der verhandeling is de bepaling van het karakter van 2 in deze reële theorie. Het bleek mij echter dat al de beschouwingen van GAUSS bijna onveranderd ook in de theorie der complexe getallen herhaald kunnen worden, en de bepaling van het biquadratisch karakter van $1 + i$ volgt dan onmiddellijk met behulp van eene eenvoudige beschouwing volgens welke $1 + i$ congruent is met een product, waarvan men het karakter der factoren kent.

Met behulp van deze hoogst eenvoudige bemerkingen is dan ook, eenmaal de onderzoekingen der eerste verhandeling van GAUSS gegeven zijnde, de bepaling van het karakter van $1 + i$ ten opzichte van een priemgetal van den vorm $a + bi$ (waarin b niet gelijk nul) om zoo te zeggen mede geheel volbracht; terwijl een geheel analoge methode in het geval dat de modulus een reëel priemgetal van den vorm $4n + 3$ tot hetzelfde doel gebezigd kan worden. Hoewel dit laatste geval een veel eenvoudiger behandeling toelaat (zie bijv. G. II Art. 68), heb ik toch gemeend het ook op dezelfde wijze als de overige gevallen te moeten behandelen, omdat zoodoende blijkt dat de gebezigde methode in staat is om de volledige theorema's af te leiden.

Nadat de bepaling van het biquadratisch karakter van $1 + i$ afgehandeld is, heb ik met behulp van de voorafgaande ontwikkelingen alle theorema's bewezen die GAUSS door inductie gevonden, en in Art. 28 der Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda, opgesteld heeft. Voor zoover mij bekend zijn deze theorema's hier voor het eerst bewezen *). Dit bewijs steunt geheel op de theorie der complexe getallen, welke theorie hier dus geheel als hulpmiddel dient, daar de theorema's zelf alleen betrekking hebben op reële getallen. Behalve de reprociteits-wet in de theorie der vierde-machtsresten, waren voor het volledig bewijs nog de beschouwingen van Art. 19, 20 noodzakelijk.

---

*) In het 4de deel van het *Journal de Liouville* heeft LEBESQUE deze theorema's *voor een deel* bewezen. Zie daar pag. 51, 52. Remarque 1°.

Ik zal nu beginnen met de afleiding van het karakter van 2 in de theorie der

QUADRAAT-RESTEN.

1. Zij p een oneven priemgetal, de getallen

$$1,\ 2,\ 3,\ ,\ldots\ p-1$$

zullen dan in twee groepen verdeeld worden. Tot de eerste groep

$$A \qquad \alpha\ \ \alpha'\ \ \alpha''\ldots\ldots$$

worden gerekend alle quadraat-resten, tot de tweede groep

$$B \qquad \beta\ \ \beta'\ \ \beta''\ldots\ldots$$

alle niet-resten, voor den modulus p. Elk der groepen A en B bestaat uit $\frac{p-1}{2}$ volgens den modulus p incongruente getallen, en men ziet gemakkelijk dat de beide congruenties:

$$(x-\alpha)\ (x-\alpha')\ (x-\alpha'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \text{ mod. } p.$$

$$(x-\beta)\ (x-\beta')\ (x-\beta'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} + 1$$

identieke congruenties zijn; want zij zijn van lageren graad dan de $\frac{p-1}{2}$de en bezitten beide blijkbaar $\frac{p-1}{2}$ wortels, namenlijk de eerste de wortels $x=\alpha$, $x=\alpha'$, $x=\alpha''\ldots$, de tweede de wortels $x=\beta$, $x=\beta'$, $x=\beta''\ldots$

Door bij de getallen van A en B de eenheid op te tellen ontstaan de volgende beide groepen getallen:

$$A' \qquad \alpha+1\,,\ \alpha'+1\,,\ \alpha''+1\ldots$$
$$B' \qquad \beta+1\,,\ \beta'+1\,,\ \beta''+1\ldots$$

De aantallen getallen van de groep A' die in A en B voorkomen, noem ik nu respectievelijk (0.0), (0.1), en de

aantallen getallen van B' die in A en B voorkomen respectivelijk (1.0), (1.1).

Deze vier getallen kunnen in het volgende schema S vereenigd worden:

$$\begin{matrix} (0.0) & (0.1) \\ (1.0) & (1.1). \end{matrix}$$

Daar de priemgetallen van de vormen $p = 4n + 1$ en $p = 4n + 3$ zich verschillend gedragen, moeten deze beide gevallen afzonderlijk behandeld worden. Ik begin met het eerste.

---

2. Voor $p = 4n + 1$ is -1 quadraat-rest, zoodat de getallen α en $p - \alpha$ tegelijkertijd in A voorkomen. Evenzoo komen de getallen β en $p - \beta$ gelijktijdig in B voor.

Nu is (0.0) blijkbaar gelijk aan het aantal oplossingen van de congruentie

$$\alpha + 1 \equiv \alpha' \text{ mod. } p,$$

waarin α en α' uit de groep A te kiezen zijn; en daar $\alpha' = p - \alpha''$ zoo kan men ook zeggen, dat (0.0) het aantal oplossingen voorstelt van de congruentie:

$$a + \alpha'' + 1 \equiv 0 \text{ mod. } p.$$

Op gelijke wijze omtrent de aantallen (0.0), (1.0), (1.1) redeneerende, blijkt dat het

teeken	voorstelt het aantal oplossingen van
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$ alles mod. p

Men ziet hieruit onmiddellijk dat

$$(0.1) = (1.0) \text{ is;}$$

een tweede betrekking tusschen de getallen van het schema S levert de volgende beschouwing. Bij elk getal β van de groep B behoort één bepaald getal van die zelfde groep β'' zoodanig dat

$$\beta\,\beta'' \equiv 1 \text{ mod. } p.$$

en tevens is dan $\beta'\,\beta''$ congruent met een getal α van de groep A. Door vermenigvuldiging van de congruentie

$$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$$

met β'' volgt dus

$$1 + \alpha + \beta'' \equiv 0$$

en door deze laatste congruentie met β te vermenigvuldigen, verkrijgt men de eerste terug. Hieruit valt onmiddellijk op te maken dat $(1.1) = (0.1)$ is, zoodat het schema S dezen vorm heeft:

$$\begin{matrix} h & j \\ j & j \end{matrix}$$

Nu komt in den groep A het getal $p-1$ dus in A' het getal p voor, welk laatste getal noch in A noch in B voorkomt. Alle overige getallen van A' en B' echter komen, zooals evident is, òf in A òf in B voor.

Hieruit volgt

$$h + j = \frac{p-1}{2} - 1$$

$$2j = \frac{p-1}{2}$$

dus

$$h = \frac{p-5}{4} \qquad j = \frac{p-1}{4}$$

De identieke congruentie

$$(x-\beta)\,(x-\beta')\,(x-\beta'')\,.. \equiv x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \text{ mod. } p$$

geeft nu voor $x = -1$, daar $\frac{p-1}{2}$ even is:

$$(\beta + 1)\ (\beta' + 1)\ (\beta'' + 1) \ldots \equiv 2 \text{ mod. } p.$$

Het aantal niet-resten onder de getallen $\beta + 1$, $\beta' + 1$, $\beta'' + 1$ .. is nu $(\dot{1}.1) = j = \frac{p-1}{4}$.

Is dus j *even* of

$$p = 8n + 1$$

dan is 2 quadraat-rest van p.

Is daarentegen j *oneven*, of

$$p = 8n + 5$$

dan is 2 niet-rest van p.

---

3. Voor $p = 4n + 3$ is -1 niet-rest, en de groep B komt overeen met de groep getallen $p-\alpha$, $p-\alpha'$, $p-\alpha''$...

Het teeken (0.0) stelt nu voor het aantal oplossingen van de congruentie $\alpha + 1 \equiv \alpha'$ mod. p of ook daar $\alpha' = p - \beta$ is, het aantal oplossingen van $\alpha + \beta + 1 \equiv 0$.

Op deze wijze blijkt dat het

teeken	voorstelt het aantal oplossingen van
(0.0)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(0.1)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$ mod. p

derhalve $(0.0) = (1.1)$. Is verder weder $\beta\beta'' \equiv 1$, $\beta'\beta'' \equiv \alpha$ dan volgt uit $\beta + \beta' + 1 \equiv 0$ door vermenigvuldiging met β''

$$1 + \alpha + \beta'' \equiv 0$$

waaruit op soortgelijke wijze als boven, deze betrekking volgt $(1.0) = (0.0)$. Het schema S heeft dus voor $p = 4n + 3$ dezen vorm

$$\begin{matrix} h & j \\ h & h \end{matrix}$$

Daar het getal $p-1$ in de groep B, dus p in B' voorkomt, maar overigens alle getallen van A' en B' òf in A òf in B voorkomen, zoo volgt

$$k+j=\frac{p-1}{2}$$

$$2k=\frac{p-1}{2}-1 \text{ dus}$$

$$k=\frac{p-3}{4} \quad j=\frac{p+1}{4}$$

Uit de identieke congruentie

$$(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}}-1 \text{ mod. } p$$

volgt voor $x=-1$ daar $\frac{p-1}{2}$ oneven is,

$$(\alpha+1)(\alpha'+1)(\alpha''+1)\ldots \equiv 2 \text{ mod. } p$$

en het aantal nietresten onder de getallen $\alpha+1, \alpha'+1, \alpha''+1\ldots$ is $=(0.1)=j=\frac{p+1}{4}$.

Is dus j *even* of

$$p=8n+7$$

dan is 2 quadraat-rest p.

Is daarentegen j *oneven* of

$$p=8n+3,$$

dan is 2 niet-rest van p.

Nadat hiermede dus het karakter van 2 als quadraat-rest of niet-rest ten opzichte van een willekeurig oneven priemgetal bepaald is, ga ik er toe over het overeenkomstige te ontwikkelen in de theorie der

VIERDE-MACHTS-RESTEN.

4. Het oneven (d. w. z. niet door $1+i$ deelbare) priem-

getal $m = a + bi$ zal steeds *primair*, in den zin van GAUSS ondersteld worden, zoodat $a - 1$ en b volgens den modulus 4 òf beide $\equiv 0$, òf beide $\equiv 2$ zijn.

Zooals bekend is bestaan de priemgetallen in de theorie der geheele complexe getallen van den vorm $a + bi$:

vooreerst uit de reële priemgetallen q van den vorm $4n + 3$, deze getallen moeten negatief genomen worden om primair te zijn;

ten tweede uit de complexe priemfactoren van de reële priemgetallen van den vorm $4n + 1$. Deze complexe priemgetallen zijn van den vorm $a + bi$, waarin b niet gelijk nul is, en worden door vermenigvuldiging met ééne bepaalde der vier eenheden, 1, i, -1, $-i$ primair. Zij kunnen verder in twee soorten onderscheiden worden al naar gelang, wanneer $a + bi$ primair is, $a - 1$ en b beide door 4 deelbaar, of beide het dubbel van een oneven getal zijn.

Ik onderscheid hierna deze drie klassen van primaire priemgetallen:

I. De reële priemgetallen q van den vorm $4r + 3$, negatief genomen.

II. De complexe priemgetallen van den vorm $4r + 1 + 4si$.

III. De compl. priemgetallen van den vorm $4r + 3 + (4s + 2)i$.

Het priemgetal (in de complexe theorie) zal steeds door M aangeduid worden, de norm van M door μ. Verder zal steeds p een reëel (positief) priemgetal van den vorm $4r + 1$, q een reëel (positief) priemgetal van den vorm $4r + 3$ voorstellen. De priemgetallen van de eerste soort zijn dus $M = -q$, $\mu = q^2$, voor de tweede en derde soort is $\mu = p$.

Ik bemerk nog dat voor de beide soorten I en II de norm μ van den vorm $8r + 1$, en voor III van den vorm $8r + 5$ is. Deze omstandigheid maakt, dat de beide eerste soorten van priemgetallen tot op zekere hoogte gemeenschappelijk behandeld kunnen worden.

De beschouwingen van het volgende Art. 5 gelden nog gelijkelijk voor de drie klassen van priemgetallen.

---

5. Zij dan M het priemgetal, μ de norm. Een volle-

dig systeem van incongruente, en niet door den modulus M deelbare getallen, bestaat uit $\mu-1$ getallen, welke volgens hun biquadratisch karakter ten opzichte van M, tot vier klassen, elk $\frac{\mu-1}{4}$ getallen bevattende, gebracht kunnen worden:

A	α,	α',	α'' . .
B	β,	β',	β'' . .
C	γ,	γ',	γ'' . .
D	δ,	δ',	δ'' . .

Tot de eerste klasse A worden gebracht alle getallen α, α', α'', met het biquadratisch karakter 0, tot de groepen B, C, D de getallen met het biquadratisch karakter 1, 2, 3.

Ten overvloede zij gezegd dat hier het biquadratische karakter in den zin van GAUSS genomen wordt, zoodat de getallen der vier klassen gekarakteriseerd zijn door de congruenties:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1,\ \beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i,\ \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1,\ \delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -i \text{ mod. } M.$$

Ik zal mij echter, voor het gemak, eveneens van het door JACOBI ingevoerde symbool bedienen, en dus kunnen schrijven:

$$\left(\left(\frac{\alpha}{M}\right)\right) = 1,\ \left(\left(\frac{\beta}{M}\right)\right) = i,\ \left(\left(\frac{\gamma}{M}\right)\right) = -1,\ \left(\left(\frac{\delta}{M}\right)\right) = -i$$

Eindelijk zij eens vooral bemerkt, dat in het vervolg alle congruenties betrekking zullen hebben op den priemmodulus M, zoolang niet uitdrukkelijk een andere modulus is aangegeven.

Ik laat hier een voorbeeld volgen van de verdeeling der resten mod. M, met uitzondering van den rest 0, in de vier klassen A, B, C, D voor elk der drie soorten van priemgetallen, die in Art. 4 onderscheiden werden.

$M = -7 \qquad \mu = 49$

A $1,\ 3i,\ -2,\ i,\ -3,\ -2i,\ -1,\ -3i,\ 2,\ -i,\ 3,\ 2i$

B $1-2i,\ -1+3i,\ -2-3i,\ 2+i,\ -3-i,\ 3-2i,$
$-1+2i,\ 1-3i,\ 2+3i,\ -2-i,\ 3+i,\ -3+2i.$

C $-3+3i,\ -2-2i,\ -1+i,\ -3-3i,\ 2-2i,\ -1-i,$
$3-3i,\ 2+2i,\ 1-i,\ 3+3i,\ -2+2i,\ 1+i.$

D $3+2i,\ 1+2i,\ 1+3i,\ -2+3i,\ -2+i,\ -3+i,$
$-3-2i,\ -1+2i,\ -1-3i,\ 2-3i,\ 2-i,\ 3-i.$

$M = -3-8i \qquad \mu = 73$

A $1,\ 3+2i,\ -1-4i,\ -3i,\ 1+2i,\ -4,\ -1-3i,$
$-2,\ -3+4i,\ -1,\ -3-2i,\ 1+4i,\ 3i,\ -1-2i,$
$4,\ 1+3i,\ 2,\ 3-4i.$

B $1-2i,\ -1-i,\ 2+3i,\ 5+2i,\ -3+3i,\ 1-3i,\ 1-4i,$
$-2+4i,\ 2+2i,\ -1+2i,\ 1+i,\ -2-3i,\ -5-2i,$
$3-3i,\ -1+3i,\ -1+4i,\ 2-4i,\ -2-2i.$

C $4i,\ -3+i,\ 2i,\ 4+3i,\ i,\ -2+3i,\ 4-i,\ 3,\ -2+i,\ -4i,$
$3-i,\ -2i,\ -4-3i,\ -i,\ 2-3i,\ -4+i,\ -3,\ 2-i.$

D $-3-i,\ -4-i,\ 4+2i,\ 2-2i,\ 2+i,\ 1-i,\ -3+2i,$
$-2+5i,\ -3-3i,\ 3+i,\ 4+i,\ -4-2i,\ -2+2i,$
$-2-i,\ -1+i,\ 3-2i,\ 2-5i,\ 3+3i.$

$M = -5+6i \qquad \mu = 61$

A $1,\ -4,\ -1-4i,\ -3,\ 1+i,\ 2+i,\ -2+i,\ 3+2i,$
$2i,\ 1+3i,\ -3-i,\ -5,\ -2+2i,\ 3-2i,\ 4+i.$

B $1-i,\ 1-2i,\ 1+2i,\ 2-3i,\ 2,\ 3-i,\ -1+3i,\ 5i,$
$2+2i,\ -2-3i,\ 1-4i,\ -i,\ 4i,\ -4+i,\ 3i.$

C $-2i,\ -1-3i,\ 3+i,\ 5,\ 2-2i,\ -3+2i,\ -4-i,$
$-1,\ 4,\ 1+4i,\ 3,\ -1-i,\ -2-i,\ 2-i,\ -3-2i.$

D $-2-2i,\ 2+3i,\ -1+4i,\ i,\ -4i,\ 4-i,\ -3i,\ -1+i,$
$-1+2i,\ -1-2i,\ -2+3i,\ -2,\ -3+i,\ 1-3i,\ -5i.$

Evenals in Art. 1 overtuigt men zich onmiddellijk dat de nu volgende congruenties identiek zijn:

$$(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} - 1 \text{ mod } M.$$

$$(x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} - i$$

$$(x-\gamma)(x-\gamma')(x-\gamma'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} + 1$$

$$(x-\delta)(x-\delta')(x-\delta'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} + i$$

waaruit voor $x = -1$ volgt, de gevallen $\mu = 8n + 1$ en $\mu = 8n + 5$ onderscheidende:

$$\mu = 8n + 1 \quad (\beta + 1)(\beta' + 1)(\beta'' + 1)\ldots \equiv 1 - i \text{ mod. } M.$$
$$(\gamma + 1)(\gamma' + 1)(\gamma'' + 1)\ldots \equiv 2$$
$$(\delta + 1)(\delta' + 1)(\delta'' + 1)\ldots \equiv 1 + i$$

$$\mu = 8n + 5 \quad (\alpha + 1)(\alpha' + 1)(\alpha'' + 1)\ldots \equiv 2 \quad \text{mod. } M.$$
$$(\beta + 1)(\beta' + 1)(\beta'' + 1)\ldots \equiv 1 + i$$
$$(\delta + 1)(\delta' + 1)(\delta'' + 1)\ldots \equiv 1 - i$$

---

6. Laten wij nu verder de nieuwe groepen van getallen A', B', C' en D' beschouwen, die ontstaan door bij de getallen van A, B, C en D de eenheid op te tellen:

$$A' \quad \alpha + 1,\ \alpha' + 1,\ \alpha'' + 1\ldots$$
$$B' \quad \beta + 1,\ \beta' + 1,\ \beta'' + 1\ldots$$
$$C' \quad \gamma + 1,\ \gamma' + 1,\ \gamma'' + 1\ldots$$
$$D' \quad \delta + 1,\ \delta' + 1,\ \delta'' + 1\ldots$$

en noemen wij nu: de *aantallen* getallen van A' die congruent zijn met getallen van A, B, C, D respectievelijk

$$(0.0),\ (0.1),\ (0.2),\ (0.3);$$

le aantallen getallen van B' die congruent zijn met getallen van A, B, C, D respectievelijk

(1.0), (1.1), (1.2), (1.3).

Evenzoo hebben de getallen

(2.0), (2.1), (2.2), (2.3) betrekking hebben op de groep C' en (3.0), (3.1), (3.2), (3.3) op de groep D'.

Men kan al deze 16 getallen (0.0), (0.1) enz. vereenigen in het volgende quadratische schema S:

(0.0)	(0.1)	(0.2)	(0.3)
(1.0)	(1.1)	(1.2)	(1.3)
(2.0)	(2.1)	(2.2)	(2.3)
(3.0)	(3.1)	(3.2)	(3.3)

en voor de voorbeelden in Art. 5 gegeven, verkrijg ik

	$M=-7$ $\mu=49$				$M=-3-8i\mu=73$				$M=-5+6i$ $\mu=61$			
S	5	2	2	2	5	6	4	2	4	3	2	6
	2	2	4	4	6	2	5	5	3	3	6	3
	2	4	2	4	4	5	4	5	4	3	4	3
	2	4	4	2	2	5	5	6	3	6	3	3

Volgens de congruenties van het voorgaande artikel is

voor $\mu = 8n+1$ $(\delta+1)(\delta'+1)(\delta''+1)\ldots \equiv 1+i$
en voor $\mu = 8n+5$ $(\beta+1)(\beta'+1)(\beta''+1)\ldots \equiv 1+i$.

Daar nu de aantallen getallen van

$$\delta+1,\ \delta'+1,\ \delta''+1\ldots$$

die respectievelijk tot de klassen A, B, C, D behooren, bedragen (3.0), (3.1), (3.2), (3.3), zoo volgt onmiddellijk dat

van $\mu = 8n + 1$ het biquadratisch karakter van $1 + i$, volgens den modulus 4 congruent zal zijn met

$$(3.1) + 2\,(3.2) + 3\,(3.3)$$

en evenzoo voor het geval $\mu = 8n + 5$ met

$$(1.1) + 2\,(1.2) + 3\,(1.3).$$

Zoodra dus de getallen (0.0), (0.1)... enz bepaald zijn is hiermede ook onmiddellijk het biquadratisch karakter van $1 + i$ bekend.

Het komt er dus nu op aan, de getallen van het schema S onmiddellijk uit het gegeven primaire priemgetal $M = a + bi$ af te leiden. De hiertoe noodige beschouwingen zijn wezenlijk dezelfde als die van Gauss in Art. 16—20 der *Theoria residuorum biquadraticorum commentatio prima.*

Gauss handelt daar over detheorie der reëele getallen, maar het blijkt gemakkelijk dat het daar gegevene in zeer nauw verband staat met het vraagstuk, dat ons hier bezighoudt.

Om de geheele ontwikkeling voor oogen te hebben, zal het noodig zijn hier de argumentatie van Gauss met de geringe noodige wijzigingen te laten volgen.

Hierbij valt ook nog op te merken dat, voor een priemgetal $M = -q$ tot de eerste klasse van Art. 4 behoorende, er in de reëele theorie van Gauss niets analoogs bestaat, met wat hier in de theorie der geheele complexe getallen ontwikkeld zal worden.

Voor de verdere beschouwingen is het in de eerste plaats noodig, de beide gevallen dat de norm μ van den vorm $8n + 1$ of van den vorm $8n + 5$ is, afzonderlijk te behandelen. Ik zal met het eerstgenoemde geval. waarin dus het priemgetal M tot een der beide eerste klassen van Art. 4 behoort, beginnen.

---

7. Voor $\mu = 8n + 1$, is $(-1)^{\frac{\mu - 1}{4}} = +1$ zoodat -1

biquadratische rest van M is en in de klasse A voorkomt, of eigenlijk met een getal van A volgens den modulus M congruent is. Maar het is bij deze beschouwingen geoorloofd om congruente getallen, daar zij elkander vervangen kunnen, als gelijk te beschouwen en ik zal voor het gemak van deze zienswijze gebruik maken, zonder dat daardoor eenige onduidelijkheid zal kunnen ontstaan.

Daar dus het biquadratisch karakter van -1 gelijk nul is, zoo volgt dat wanneer α, β, γ, δ respectievelijk tot de klassen A, B, C, D behooren, ook $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ in deze zelfde klassen voorkomen, $-\alpha$ in A, $-\beta$ in B, $-\gamma$ in C en $-\delta$ in D.

Nu is blijkbaar het getal (0.0) gelijk aan het aantal oplossingen van de congruentie:

$$\alpha + 1 \equiv \alpha' \text{ mod. } M.$$

waarbij α en α' op willekeurige wijze uit de groep A te nemen zijn, maar daar bij elk getal α' een getal $\alpha'' = p - \alpha'$ behoort, zoo is dit aantal oplossingen hetzelfde als dat van de congruentie:

$$\alpha + \alpha'' + 1 \equiv 0$$

waarin weder α en α'' uit A te nemen zijn.

Geheel op dezelfde wijze omtrent de getallen (0.1), (0.2) enz. redeneerende, overtuigt men zich dat:

het teeken	voorstelt het aantal oplossingen van:
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$ mod. M.
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(0.2)	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$
(0.3)	$\alpha + \delta + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
(1.2)	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$
(1.3)	$\beta + \delta + 1 \equiv 0$
(2.0)	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$

het teeken	voorstelt het aantal oplossingen van:
(2.1)	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$ mod. M.
(2.2)	$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$
(2.3)	$\gamma + \delta + 1 \equiv 0$
(3.0)	$\delta + \alpha + 1 \equiv 0$
(3.1)	$\delta + \beta + 1 \equiv 0$
(3.2)	$\delta + \gamma + 1 \equiv 0$
(3.3)	$\delta + \delta' + 1 \equiv 0$

Hieruit volgen dus onmiddellijk deze zes betrekkingen:

$$(0.1) = (1.0),\ (0.2) = (2.0),\ (0.3) = (3.0)$$
$$(1.2) = (2.1),\ (1.3) = (3.1)$$
$$(2.3) = (3.2).$$

Vijf nieuwe betrekkingen tusschen de getallen (0.0) (0.1) enz. verkrijgt men door de volgende beschouwing. Zijn α, β, γ getallen van A, B, C en bepaalt men x, y, z zoodanig dat:

$$\alpha x \equiv 1,\ \beta y \equiv 1,\ \gamma z \equiv 1 \text{ mod. } M$$

dan behoort blijkbaar x tot de klasse A, y tot D, z tot C zoodat men kan schrijven:

$$\alpha \alpha' \equiv 1,\ \beta \delta' \equiv 1,\ \gamma \gamma' \equiv 1.$$

Vermenigvuldigt men nu, terwijl men een bepaalde oplossing van $\alpha + \beta + 1 \equiv 0$ beschouwt, deze congruentie met δ dan volgt $\delta' + 1 + \delta \equiv 0$, waarin $\delta' \equiv \alpha \delta$ tot D behoort. Omgekeerd volgt uit $\delta' + 1 + \delta \equiv 0$ door vermenigvuldiging met β weder $\alpha + \beta + 1 \equiv 0$. Hieruit blijkt dus dat het aantal oplossingen van de beide congruenties:

$$\alpha + \beta + 1 \equiv 0 \text{ en } \delta + \delta' + 1 \equiv 0$$

evengroot is of $(0.1) = (3.3)$.

Geheel op dezelfde wijze heeft men:

$$\gamma' (\alpha + \gamma + 1) \equiv \gamma'' + 1 + \gamma$$
$$\beta\ (\alpha + \delta + 1) \equiv \beta' + 1 + \beta$$
$$\delta\ (\beta + \gamma + 1) \equiv 1 + \beta' + \delta$$
$$\gamma' (\beta + \gamma + 1) \equiv \delta + 1 + \gamma'$$

waaruit men op dezelfde besluit tot:

$$(0.2) = (2.2),\ (0.3) = (1.1),\ (1.2) = (1.3) = (2.3).$$

Hiermede zijn dus *elf* betrekkingen tusschen de zestien getallen van het schema S gevonnen, en deze getallen worden hierdoor teruggebracht tot *vijf* verschillende, die door h, j, k, l, m aangeduid zullen worden. Het schema S neemt nu deze gedaante aan:

h	j	k	l
j	l	m	m
k	m	k	m
l	m	m	j

---

8. Het getal -1 komt in A voor, waarmede dus het getal 0 van A' correspondeert. Dit getal 0 van A' komt in geen der klassen A, B, C, D voor, maar elk ander getal van A' komt blijkbaar in een der groepen A, B, C of D voor. Daar $\mu = 8n + 1$, $\frac{\mu-1}{4} = 2n$ zoo volgt dus:

$$(0.0) + (0.1) + (0.2) + (0.3) = 2n - 1$$

Alle getallen van B', C', D' komen in één der klassen A, B, C, D voor, zoodat men heeft:

$$(1.0) + (1.1) + (1.2) + (1.3) = 2n$$

$$(2.0) + (2.1) + (2.2) + (2.3) = 2n$$

$$(3.0) + (3.1) + (3.2) + (3.3) = 2n$$

Deze vier vergelijkingen herleiden zich tot de volgende drie betrekkingen tusschen h, j, k, l en m:

$$h + j + k + l = 2n - 1$$

$$j + l + 2m = 2n$$

$$k + m = n$$

---

9. Eindelijk wordt nog een verdere, niet lineaire, betrekking tusschen h, j, k, l, m verkregen door de beschouwing van het aantal oplossingen der congruentie:

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \text{ mod. } M$$

waarin α, β, γ op alle mogelijke wijzen uit de klassen A, B, C te kiezen zijn.

Neemt men nu vooreerst voor α achtereenvolgens alle getallen van A, dan gebeurt het respectievelijk h, j, k, l malen dat $\alpha + 1$ tot A, B, C, D behoort, en de enkele maal dat $\alpha + 1 \equiv 0$ wordt kan buiten beschouwing blijven daar de congruentie $\beta + \gamma \equiv 0$ geen enkele oplossing toelaat.

Voor elke bepaalde der h waarden die $\alpha + 1 \equiv \alpha_0$ maken, zijn dan nog verder β en γ zóó te kiezen, dat:

$$\alpha_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

wordt. Het aantal oplossingen dezer congruentie (voor een gegeven waarde van α_0) is $= m$, zooals onmiddellijk blijkt door vermenigvuldiging met α_0', wanneer $\alpha_0 \alpha_0' = 1$ mod. M waardoor zij overgaat in:

$$1 + \beta' + \gamma' \equiv 0.$$

Daar deze redeneering toepasselijk is voor elke der h waarden, die maken dat $\alpha + 1$ weder tot A behoort, zoo verkrijgt men op deze wijze hm oplossingen van de congruentie:

$$1 + \alpha + \beta + \gamma \equiv 0.$$

Het gebeurt verder j malen dat $\alpha + 1$ tot B behoort, en voor elke bepaalde waarde $\alpha + 1 \equiv \beta_0$ heeft de congruentie:

$$\beta_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

hetzelfde aantal oplossingen als deze:

$$1 + \alpha + \beta' \equiv 0$$

dus is dit aantal $= j$. Het gezegde blijkt onmiddellijk uit:

$$\delta_0 (\beta_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \alpha + \beta'$$

wanneer $\beta_0 \delta_0 \equiv 1$.

Deze waarden van α, die $\alpha + 1$ tot B doen behooren, geven dus in het geheel jj oplossingen van de beschouwde congruentie.

Voor $\alpha + 1 \equiv \gamma_0$, wat k malen gebeurt, heeft de congruentie:

$$\gamma_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

l oplossingen, want:

$$\gamma_0' (\gamma_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \delta + \alpha.$$

De waarden van α die $\alpha + 1$ tot C doen behooren leveren dus in het geheel kl oplossingen.

Is eindelijk $\alpha + 1 = \delta_0$, wat l malen gebeurt, dan heeft de congruentie:

$$\delta_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

wegens:

$$\beta_0 (\delta_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \gamma + \delta$$

m oplossingen, en deze waarden van α geven dus lm oplossingen.

Het totale aantal oplossingen van de congruentie:

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \text{ mod. } M$$

is derhalve:

$$= hm + jj + kl + lm.$$

Maar men kan dit aantal nog op andere wijze berekenen. Neemt men namelijk voor β achtereenvolgens alle getallen van B dan gebeurt het j, l, m, m malen dat $\beta + 1$ behoort tot de groepen A, B, C, D. En voor elk dezer vier getallen vindt men, dat er respectievelijk k, m, k, m oplossin-

gen van de gegeven congruentie zijn, zoodat het totale aantal oplossingen bedraagt:

$$jk + lm + mk + mm.$$

---

10. De gelijkstelling van deze beide uitdrukkingen voor het aantal oplossingen van $\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0$ geeft:

$$0 = hm + jj + kl - jk - km - mm$$

of wel h elimineerende met behulp van $h = 2m - k - 1$ welke waarde gemakkelijk uit de in Art. 8 verkregen vergelijkingen tusschen h, j, k, l, m volgt:

$$0 = (k - m)^2 + jj + kl - jk - kk - m$$

Volgens de relaties in Art. 8 is:

$$k = \tfrac{1}{2}(j + l)$$

en deze waarde in $jj + kl - jk - kk$ overbrengende, wordt deze uitdrukking $= \frac{1}{4}(l - j)^2$ zoodat de voorgaande vergelijking, na vermenigvuldiging met 4, overgaat in:

$$0 = 4(k - m)^2 + (l - j)^2 - 4m$$

maar:

$$4m = 2(k + m) - 2(k - m) = 2n - 2(k - m)$$

dus:

$$2n = 4(k - m)^2 + 2(k - m) + (l - j)^2$$

of wel:

$$\mu = 8n + 1 = (4(k - m) + 1)^2 + 4(l - j)^2$$

dus stellende:

$$4(k - m) + 1 = A,\ 2(l - j) = B$$

$$\mu = A^2 + B^2.$$

Hierin is $A \equiv 1$ mod. 4, en B even.

Men kan nu met behulp van A en B gemakkelijk h, j, k, l, m uitdrukken en verkrijgt zoodoende:

$$8h = 4n - 3A - 5$$

$$8j = 4n + A - 2B - 1$$

$$8k = 4n + A - 1$$

$$8l = 4n + A + 2B - 1$$

$$8m = 4n - A + 1$$

Tot hiertoe onderstelden wij alleen dat de norm μ den vorm $8n + 1$ had; voor de verdere bepaling van A en B is het evenwel nu noodig, de gevallen I en II van Art. 4 afzonderlijk te behandelen.

---

11. Zij dan vooreerst:

$$M = -q = -(4r + 3).$$

In dit geval is:

$$\mu = M^2 = q^2$$

en dus:

$$q^2 = A^2 + B^2$$

q een priemgetal van den vorm $4r + 3$ zijnde, weet men dat q^2 op geen andere wijze als som van twee quadraten voorgesteld kan worden, dan door voor de basis van het eene (oneven) quadraat $\pm q$, voor die van het andere quadraat 0 te nemen; inderdaad was geen der getallen A en B gelijk 0 of door q deelbaar, dan zou men een van 0 verschillend getal x kunnen bepalen, zóódat:

$$Ax \equiv B \text{ mod. } q.$$

Nu volgt uit $q^2 = A^2 + B^2$

$$A^2 \equiv - B^2 \text{ mod. } q$$

en ook $A^2 x^2 \equiv B^2$ dus

$$x^2 \equiv -1 \text{ mod. } q.$$

Deze laatste congruentie nu, is onmogelijk omdat -1 quadratische nietrest van q is.

Uit $q^2 = A^2 + B^2$ volgt dus noodzakelijk

$$A = \pm q, \qquad B = 0$$

en daar $A \equiv 1$ mod. 4 zoo wordt hierdoor nog het teeken van A volkomen bepaald en is

$$A = -q = M.$$

Nadat op deze wijze A en B gevonden zijn, heeft men nu

$$8h = 4n - 3M - 5$$
$$8j = 4n + M - 1$$
$$8k = 4n + M - 1$$
$$8l = 4n + M - 1$$
$$8m = 4n - M + 1$$

waarin $8n + 1 = M^2$.

Door deze formulen wordt dus de afhankelijkheid der getallen van het schema S van het priemgetal M op de eenvoudigste wijze uitgedrukt, voor het geval dat M tot de eerste klasse van Art. 4 behoort.

---

12. Is in de tweede plaats $M = a + bi$ waarin $a - 1 \equiv b \equiv 0$ mod 4 en de norm $\mu = a^2 + b^2$ een reëel priemgetal, dan is dus

$$\mu = a^2 + b^2 = A^2 + B^2.$$

Nu kan een priemgetal voor den vorm $4k + 1$ slechts op ééne wijze voorgesteld worden door de som van twee qua-

draten, en daar a en A beide $\equiv 1$ mod. 4 zijn, zoo volgt $A = a$, $B = \pm b$.

Het teeken van B wordt door de volgende beschouwing bepaald, waarbij het noodig is deze hulpstelling vooraf te bewijzen:

»Doorloopt z een volledig restsysteem mod. M met uitzondering van de door M deelbare term, dan is

$$\Sigma z^t \equiv -1 \quad \text{of} \quad \equiv 0 \quad \text{mod. } M$$

al naardat t door $\mu - 1$ deelbaar is op niet."

Het eerste gedeelte is duidelijk, want is t door $\mu - 1$ deelbaar dan is $z^t \equiv 1$, dus $\Sigma z^t \equiv \mu - 1 \equiv -1$ mod. M.

Om ook het tweede gedeelte aan te toonen, zij g een primitieve wortel voor het priemgetal M, zoodat de waarden die z doorloopt, congruent zijn met

$$g^0,\ g^1,\ g^2,\ g^3 \ldots\ g^{\mu-2}.$$

Hieruit volgt dus

$$\Sigma z^t \equiv 1 + g^t + g^{2t} + \ldots + g^{(\mu-2)t} \text{ mod. } M$$

of

$$(1 - g^t)\,\Sigma z^t \equiv 1 - g^{(\mu-1)t} \equiv 0 \quad \text{mod. } M.$$

Is nu t niet door $\mu - 1$ deelbaar, dan is $1 - g^t$ niet door M deelbaar en dus $\Sigma z^t \equiv 0$ w. t. b. w.

Deze hulpstelling geldt blijkbaar voor een willekeurig priemgetal M.

Volgens de binomiaal-ontwikkeling is nu

$$(z^2 + 1)^{\frac{\mu-1}{4}} = z^{\frac{\mu-1}{2}} + \ldots + 1$$

en hieruit volgt dus, wanneer het teeken Σ op dezelfde waarden van z betrekking heeft als zooeven:

$$\Sigma\,(z^2 + 1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1 \quad \text{mod. } M.$$

Maar aan den anderen kant vormen de getallen z^2 in

hun geheel blijkbaar alle getallen van de groepen A en C te samen genomen, elk dezer getallen tweemaal genomen. Van de getallen

$$z^2 + 1$$

behooren er dus $2\,(0.0) + 2\,(2.0)$ tot A

$2\,(0.1) + 2\,(2.1)$ tot B

$2\,(0.2) + 2\,(2.2)$ tot C

$2\,(0.3) + 2\,(2.3)$ tot D

en daar de $\frac{\mu - 1}{4}^{\text{de}}$ machten der getallen van A, B, C, D respectievelijk congruent zijn met 1, i, -1, $-i$ zoo volgt dus

$$\begin{aligned} \Sigma\,(z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} &\equiv 2\,[(0.0)+(2.0)-(0.2)-(2.2)] \\ &\quad + 2\,i\,[(0.1)+(2.1)-(0.3)-(2.3)] \\ &\equiv 2\,(h-k) + 2i\,(j-l) \end{aligned}$$

of de waarden van Art. 10 invoerende, daar $A = a$ is:

$$\Sigma\,(z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -a-1-Bi.$$

Uit de vergelijking met het eerste resultaat

$$\Sigma\,(z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1$$

volgt nu

$$a + B\,i \equiv 0 \text{ mod. } (M = a + b\,i)$$

dus:

$$B = b$$

Hierdoor gaan dan ten slotte de waarden van h, j, k, l, m van Art. 10 over in:

$$\begin{aligned} 8\,h &= 4\,n - 3\,a - 5 \\ 8\,j &= 4\,n + a - 2\,b - 1 \\ 8\,k &= 4\,n + a - 1 \\ 8\,l &= 4\,n + a + 2\,b - 1 \\ 8\,m &= 4\,n - a + 1 \end{aligned}$$

waarin dus $8n + 1 = a^2 + b^2$ de norm is van het priemgetal M.

---

13. Nadat hiermede de beide gevallen, waarin $\mu = 8n + 1$ is, afgehandeld zijn, moet nu het geval $\mu = 8n + 5$ beschouwd worden.

Daar dan $\frac{\mu - 1}{4}$ oneven is, zoo behoort -1 tot de groep C, en zooals gemakkelijk te zien, behooren de getallen:

$p - \alpha\,,\ p - \alpha'\,,\ p - \alpha''\,..$ allen tot C.
$p - \beta\,,\ p - \beta'\,,\ p - \beta''\,..$ allen tot D.

Met behulp van deze bemerkingen volgt nu zonder moeite dat

het teeken	voorstelt het aantal oplossingen van:
(0.0)	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$
(0.1)	$\alpha + \delta + 1 \equiv 0$
(0.2)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$
(0.3)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \delta + 1 \equiv 0$
(1.2)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
(1.3)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
(2.0)	$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$
(2.1)	$\gamma + \delta + 1 \equiv 0$
(2.2)	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$
(2.3)	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$
(3.0)	$\delta + \gamma + 1 \equiv 0$
(3.1)	$\delta + \delta' + 1 \equiv 0$
(3.2)	$\delta + \alpha + 1 \equiv 0$
(3.3)	$\delta + \beta + 1 \equiv 0$

waaruit dan zes betrekkingen voortvloeien:

$$(0.0) = (2.2) \qquad (0.1) = (3.2) \qquad (0.3) = (1.2)$$
$$(1.0) = (2.3) \qquad (1.1) = (3.3)$$
$$(2.1) = 3.0).$$

Daar evenals vroeger $\alpha\alpha' \equiv \beta\delta \equiv \gamma\gamma' \equiv 1$, zoo heeft men:

$$\begin{aligned}
\gamma'(\alpha+\gamma+1) &\equiv \gamma''+1+\gamma' \\
\beta\,(\alpha+\delta+1) &\equiv \beta'+1+\beta \\
\delta\,(\alpha+\beta+1) &\equiv \delta'+1+\delta \\
\delta\,(\beta+\gamma+1) &\equiv 1+\beta'+\delta \\
\gamma'(\beta+\gamma+1) &\equiv \delta+1+\gamma',
\end{aligned}$$

waaruit men besluit tot:

$$(0.0)=(2.0),\qquad (0.1)=(1.3),\qquad (0.3)=(3.1),$$
$$(1.0)=(1.1)=(2.1).$$

Ten gevolge van deze elf betrekkingen neemt het schema S dezen vorm aan:

$$\begin{matrix} h & j & k & l \\ m & m & l & j \\ h & m & h & m \\ m & l & j & m. \end{matrix}$$

Daar -1 in de groep C, dus 0 in C' voorkomt, zoo volgt geheel op dezelfde wijze als in Art. 8:

$$h+j+k+l=\frac{\mu-1}{4}=2n+1$$

$$2m+l+j=2n+1$$

$$h+m=n.$$

De beschouwing van het aantal oplossingen der congruentie:

$$\alpha+\beta+\gamma+1\equiv 0$$

levert eindelijk nog eene vergelijking tusschen h, j, k, l, m, op. Neemt met eerst voor α alle waarden die tot A behooren, dan gebeurt het respectievelijk h, j, k, l malen dat $\alpha+1$ tot de groepen A, B, C, D behoort. En verder vindt men, op dezelfde wijze als in Art. 9, dat, voor elk dezer

gevallen, de congruentie respectievelijk m, l, j, m oplossingen heeft, waaruit dus voor het totale aantal oplossingen volgt:

$$hm + jl + kj + lm.$$

Neemt men daarentegen eerst voor β alle waarden van B, dan gebeurt het respectievelijk m, m, l, j malen dat $\beta +$ tot de groepen A, B, C, D behoort. En verder vindt men dat, voor elk dezer gevallen, de congruentie respectievelijk h, m, h, m oplossingen heeft, zoodat het totale aantal oplossingen ook bedraagt:

$$mh + mm + lh + jm.$$

---

14. De gelijkstelling van de beide uitdrukkingen voor het aantal oplossingen der congruentie:

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

geeft:

$$0 = m^2 + lh + jm - jl - kj - lm$$

of daar $k = 2m - h$ is, zooals uit de lineaire betrekkingen tusschen h, j, k, l, m in Art. 13 dadelijk volgt:

$$0 = m^2 + lh + hj - jl - jm - lm.$$

Drukt men nu met behulp van $j + l = 1 + 2h$, j en l beide uit, door hun verschil:

$$2j = 1 + 2h + (j - l)$$

$$2l = 1 + 2h - (j - l)$$

dan gaat de voorgaande vergelijking door invoering van deze waarden, over in:

$$0 = 4m^2 - 4m - 1 + 4h^2 - 8hm + (j - l)^2$$

of daar:

$$4m = 2(h+m) - 2(h-m) = 2n - 2(h-m)$$

$$0 = 4(h-m)^2 - 2n + 2(h-m) - 1 + (j-l)^2$$

en eindelijk:

$$\mu = 8n + 5 = (4(h-m)+1)^2 + 4(j-l)^2$$

dus voor:

$$A = 4(h-m) + 1,\ B = 2j - 2l$$

$$\mu = A^2 + B^2.$$

Met behulp van A en B kan men nu gemakkelijk h, j, k, l, m uitdrukken, als volgt:

$$\begin{aligned}8h &= 4n + A - 1\\ 8j &= 4n + A + 2B - 3\\ 8k &= 4n - 3A + 3\\ 8l &= 4n + A - 2B + 3\\ 8m &= 4n - A + 1\end{aligned}$$

Er blijft nog over A en B te bepalen. Nu is μ als reëel priemgetal van den vorm $4n+1$ slechts op ééne wijze voor te stellen door een som van twee tweedemachten, en daar:

$$M = a + bi$$

ook:

$$\mu = a^2 + b^2$$

waarin:

$$a \equiv -1,\ b \equiv 2 \text{ mod. } 4.$$

Hieruit volgt dus:

$$A = -a \text{ en } B = \pm b.$$

Om het teeken van B te bepalen dient eene beschouwing analoog aan die in Art. 12.

Men vindt gemakkelijk:

$$\Sigma\,(z^2+1)^{\frac{1}{4}(\mu-1)} \equiv -1 \equiv 2(h-k) + 2i(j-l) \text{ mod. } M.$$

Nu is:

$$2(h-k) = A-1\,,\quad 2(j-l) = B$$

dus:

$$-1 \equiv A - 1 + Bi$$

$$0 \equiv A + Bi \text{ mod. } (M = a + bi)$$

Daar nu reeds gevonden werd $A = -a$, zoo volgt $B = -b$ en ten slotte is dus nu:

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - a - 1,\\ 8j &= 4n - a - 2b + 3,\\ 8k &= 4n + 3a + 3,\\ 8l &= 4n - a + 2b + 3,\\ 8m &= 4n + a + 1. \end{aligned}$$

---

15. De verkregen resultaten samenstellende, is dus voor $\mu = 8n + 1$ het schema S van den vorm:

$$\begin{matrix} h & j & k & l\\ j & l & m & m\\ k & m & k & m\\ l & m & m & j \end{matrix}$$

waarin: voor $M = -q$

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - 3M - 5\\ 8j = 8k = 8l &= 4n + M - 1\\ 8m &= 4n - M + 1. \end{aligned}$$

voor $M = a + bi$

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - 3a - 5 \\ 8j &= 4n + a - 2b - 1 \\ 8k &= 4n + a - 1 \\ 8l &= 4n + a + 2b - 1 \\ 8m &= 4n - a + 1. \end{aligned}$$

Voor $\mu = 8n + 5$, $M = a + bi$ is het schema S van den vorm:

$$\begin{matrix} h & j & k & l \\ m & m & l & j \\ h & m & h & m \\ m & l & j & m \end{matrix}$$

waarin:

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - a - 1 \\ 8j &= 4n - a - 2b + 3 \\ 8k &= 4n + 3a + 3 \\ 8l &= 4n - a + 2b + 3 \\ 8m &= 4n + a + 1. \end{aligned}$$

Zooals uit deze formules blijkt, correspondeert de verandering van b in $-b$ met eene verwisseling van j en l, zoowel in het geval $\mu = 8n + 1$, als wanneer $\mu = 8n + 5$.

Volgens de congruenties van Art. 5 is nu voor $\mu = 8n + 1$ het karakter van $1 + i$ naar den mod. 4:

$$\equiv (3.1) + 2\,(3.2) + 3\,(3.3) = 3m + 3j \equiv -m - j$$

en dat van $1 - i$:

$$\equiv (1.1) + 2\,(1.2) + 3\,(1.3) = l + 5m \equiv l + m$$

en dus voor $M = -q$:

$$\text{Karakter } (1 + i) \equiv -n = -\frac{q^2 - 1}{8}$$

$$\text{Karakter } (1 - i) \equiv \quad n = \frac{q^2 - 1}{8}$$

Nu zijn $\frac{q+1}{4}$ en $\frac{q-3}{4}$ geheele, op elkaar volgende getallen, dus is hun product even, en $\frac{(q+1)(q-3)}{8}$ door 4 deelbaar, zoodat men heeft:

$$\frac{q^2-1}{8} \equiv \frac{q^2-1}{8} - \frac{(q+1)(q-3)}{8} = + \frac{q+1}{4}$$

en dus

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(M-1)}, \qquad \left(\left(\frac{1-i}{M}\right)\right) = i^{-\frac{1}{4}(M-1)}$$

en daar -1 biquadratische rest is

$$\left(\left(\frac{-1-i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(M-1)}, \qquad \left(\left(\frac{-1+i}{M}\right)\right) = i^{-\frac{1}{4}(M-1)}$$

terwijl uit $2 = (1-i)(1+i)$ nog volgt:

$$\left(\left(\frac{2}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-2}{M}\right)\right) = 1.$$

Voor $M = a + bi$ daarentegen, is

$$\begin{aligned} -m-j &= -n + \tfrac{1}{4} b \\ l + m &= n + \tfrac{1}{4} b \end{aligned}$$

en

$$n = \frac{a^2+b^2-1}{8}.$$

Nu is blijkbaar $\frac{a-1}{4} \cdot \frac{a+3}{4}$ even, dus $\frac{(a-1)(a+3)}{8}$ door 4 deelbaar, waaruit volgt:

$$\frac{a^2-1}{8} \equiv \frac{-a+1}{4} \text{ mod. } 4.$$

en b door 4 deelbaar zijnde, is dus één der getallen b, $b \pm 4$ door 8 deelbaar, derhalve $\frac{b(b-4)}{8}$ door 4 deelbaar en

$$\frac{b^2}{8} \equiv \frac{b^2}{8} - \frac{b(b \mp 4)}{8} = \pm \tfrac{1}{2} b$$

zoodat

$$n \equiv \tfrac{1}{4}(-a + 1 \pm 2b) \quad \text{mod. } 4$$

en ten slotte

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-1-i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-1-b)}$$

$$\left(\left(\frac{1-i}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-1+i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(-a+1-b)}$$

$$\left(\left(\frac{2}{M}\right)\right) = i^{-\frac{1}{2}b}.$$

Is eindelijk $\mu = 8n + 5$, $M = a + bi$ dan:

Karakter $(1+i) \equiv (1.1) + 2(1.2) + 3(1.3) = m + 2l + 3j$ mod. 4
Karakter $(1-i) \equiv (3.1) + 2(3.2) + 3(3.3) = l + 2j + 3m$ mod. 4

Hierin is, alle congruenties betrekking hebbende op den modulus 4:

$$m + 2l + 3j = 3n + \tfrac{1}{4}(-2a - b + 8)$$

$$l + 2j + 3m = 3n + \tfrac{1}{4}(-b + 6) \equiv -n + \tfrac{1}{4}(-b + 6)$$

$$n = \frac{a^2 + b^2 - 5}{8}$$

$\frac{a-3}{4} \cdot \frac{a+1}{4}$ even zijnde, is $\frac{(a-3)(a+1)}{8}$ door 4 deelbaar, evenzoo ook $\frac{(b-2)(b+2)}{8}$, dus

$$n \equiv \frac{a^2+b^2-5}{8} - \frac{(a-3)(a+1)}{8} - \frac{b^2-4}{8} = \tfrac{1}{4}(+a+1)$$

zoodat er ten slotte komt

$$m + 2l + 3j \equiv \tfrac{1}{4}(a-b+11) \equiv (a-b-5)$$
$$l + 2j + 3m \equiv \tfrac{1}{4}(-a-b+5)$$

en hiermede:

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-b-5)}, \quad \left(\left(\frac{1-i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(-a-b+5)}$$

en het karakter van -1 gelijk twee zijnde:

$$\left(\left(\frac{-1-i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-b+3)}, \quad \left(\left(\frac{-1+i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(-a-b-3)}$$

en

$$\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right) = i^{-\frac{1}{2}b}.$$

Hiermede is het quadratisch karakter van $1+i$, als ook dat van $1-i$, $-1-i$, $-1+i$ ten opzichte van een primair priemgetal in elk geval bepaald. De uitkomsten stemmen geheel overeen met die door GAUSS in Art. 63, 64 van de Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda gegeven, en daar in Art. 68—76 op geheel verschillende wijze bewezen.

---

16. Met betrekking tot de analogie van een groot gedeelte der voorafgaande beschouwingen met die van GAUSS in Art 8 en vv. van zijne *eerste* verhandeling over de theorie der vierde-machtsresten, valt het volgende op te merken.

GAUSS beschouwt reëele getallen, en de priemmodulus p is van den vorm $4n+1$, terwijl de beide getallen $p=8n+1$, $p=8n+5$ onderscheiden moeten worden; p heeft dus dezelfde beteekenis als de norm μ in de gevallen II en III van Art. 4.

De getallen 1, 2, 3 . . $p - 1$ worden nu bij GAUSS in 4 klassen A, B, C, D verdeeld. De getallen dezer klassen door α, β, γ, δ aanduidende, is deze klassificatie gegrond op de congruenties:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1 \text{ mod. } \mu = p$$

$$\beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv f$$

$$\gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1$$

$$\delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -f$$

waarin $f^2 \equiv -1$ mod. p, en voor $\mu = a^2 + b^2$

$$a \equiv 1 \text{ mod. } 4, \quad a + bf \equiv 0 \text{ mod. } p.$$

Voor $p = \mu = 8n + 1$ hebben a en b dezelfde beteekenis als in het bovenstaande, voor $p = 8n + 5$ verschillen a en b bij GAUSS alleen in teeken met de waarden die zij in het voorgaande hebben, waar $M = a + bi$ eene *primair* complex priemgetal is.

Laat men nu echter ook complexe getallen toe, dan is het duidelijk dat de bovenstaande congruenties, die betrekking hebben op den modulus $p = \mu$, blijven gelden voor den modulus $a + bi$, zoodat ook $a + bf \equiv 0$ mod. $a + bi$ is, waaruit blijkt $f \equiv i$ mod. $a + bi$, en dus:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1, \beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i, \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1, \delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -i \text{ mod. } (a + bi).$$

De klassificatie van GAUSS valt derhalve samen met die volgens het biquadratisch karakter 0, 1, 2, 3 met betrekking tot den modulus $a + bi$.

Inderdaad, de reële getallen 1, 2, 3 . . , $p - 1$ vormen voor den modulus $a + bi$ een volledig systeem incongruente, niet door den modulus deelbare resten.

Vervangt men dan ook in de beide laatste voorbeelden

van Art. 5, de complexe resten door de congruente reëele getallen, wat met behulp van $i \equiv 27$ mod. $(-3-8i)$ en $i \equiv 11$ mod. $(-5+6i)$ zonder moeite kan geschieden, dan verkrijgt men:

mod. $-3-8i$ $\mu = 73$

A 1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 32, 36, 37, 41, 55, 57, 64, 65, 69, 71, 72.
B 5, 7, 10, 14, 17, 20, 28, 33, 34, 39, 40, 45, 53, 56, 59, 63, 66, 68.
C 3, 6, 12, 19, 23, 24, 25, 27, 35, 38, 46, 48, 49, 50, 54, 61, 67, 70.
D 11, 13, 15, 21, 22, 26, 29, 30, 31, 42, 43, 44, 47, 51, 52, 58, 60, 62.

mod. $-5+6i$ $\mu = 61$

A 1, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 25, 34, 42, 47, 56, 57, 58.
B 2, 7, 18, 23, 24, 26, 30, 32, 33, 40, 44, 50, 51, 53, 55.
C 3, 4, 5, 14, 19, 27, 36, 39, 41, 45, 46, 48, 49, 52, 60.
D 6, 8, 10, 11, 17, 21, 28, 29, 31, 35, 37, 38, 43, 54, 59.

volmaakt overeenkomende met de voorbeelden door Gauss gegeven in Art. 11 der eerste verhandeling.

Alleen voor het geval I van Art. 4, bestaat in de reëele theorie van Gauss niets analoogs, wat daarmede samenhangt dat men in dit geval uit reëele getallen geen volledig restsysteem kan vormen.

De bemerking, dat de verdeeling in klassen *A*, *B*, *C*, *D* bij Gauss in zijne eerste verhandeling identiek is met die volgens het biquadratisch karakter ten opzichte van den modulus $a+bi$, levert ook terstond het middel op, om al die theorema's te bewijzen, die door Gauss in zijne tweede verhandeling, Art. 28, opgesteld zijn, en welke door inductie

ontdekt zijn; maar die tot nog toe, voor zoover ik zie, niet bewezen zijn.

Deze theorema's hebben betrekking op het voorkomen van een reëel priemgetal m in de vier klassen A, B, C, D, of na het voortgaande, op het biquadratisch karakter van m ten opzichte van $a + b\,i$ als modulus.

---

17. Ik laat nu hier de door Gauss in Art. 28 opgestelde bemerkingen volgen. De priemmodus $p = \mu$ zij van den vorm $4\,n + 1$, volgens de bemerking van het vorig artikel is het nu te doen om de bepaling van de waarde van het symbool:

$$\left(\left(\frac{m}{a + b\,i}\right)\right)$$

waarin m een reëel priemgetal is; de omstandigheid dat voor $\mu = 8\,n + 5$ a en b bij Gauss in teeken verschillen van de waarden in Art. 14 heeft op de uitspraak der theorema's geen invloed. Het priemgetal m zal met zulk teeken genomen worden, dat het steeds $\equiv 1$ mod. 4 is, dus negatief wanneer het positief genomen, van den vorm $4\,k + 3 = Q$ is, terwijl een positief priemgetal van den vorm $4\,k + 1$ door P zal aangeduid worden. De bemerkingen van Gauss kunnen nu aldus uitgedrukt worden:

I. Is $a \equiv o$ mod. (m) dan is de waarde van $\left(\left(\frac{m}{a + bi}\right)\right) = +1$, of $= -1$; en wel $+1$ wanneer m van den vorm $8\,r \pm 1$, gelijk -1 wanneer m van den vorm $8\,r \pm 3$ is.

II. Is a niet door m deelbaar, dan hangt de waarde van het symbool af, alléén van het volkomen bepaalde getal x, dat voldoet aan:

$$b \equiv a\,x \text{ mod. } m$$

Voor $m = P$ kan x hier de volgende waarden aannemen:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ P - 1,$$

met uitzondering van de beide waarden f, en $P - f$ die voldoen aan $yy \equiv -1$ mod. P. Deze kunnen blijkbaar niet voorkomen, want uit $b \equiv ay$ zoude volgen:

$$b^2 \equiv -a^2 \text{ of } a^2 + b^2 = p \equiv 0 \text{ mod. } P$$

d. w. z. p zoude door P deelbaar zijn.

Vóór $m = -Q$ daarentegen kan x alle waarden:

$$0, 1, 2, 3 \ldots . Q - 1 \text{ aannemen.}$$

Deze waarden van x, kunnen nu in 4 klassen α, β, γ, δ verdeeld worden, zoodanig dat voor

$b \equiv a\alpha$ mod. m	de	waarde	van	het	symbool	$= 1$
voor $b \equiv a\beta$	»	»	»	»	»	»	$= i$
voor $b \equiv a\gamma$	»	»	»	»	»	»	$= 1 - 1$
voor $b \equiv a\delta$	»	»	»	»	»	»	$= 1 - i$

is, of wat op hetzelfde neerkomt, dat in deze gevallen m respectievelijk tot de klassen A, B, C, D behoort.

Omtrent het *aantal* der getallen α, β, γ, δ geldt nu deze regel, dat 3 dezer aantallen gelijk zijn, terwijl dan het 4de aantal één kleiner is; en wel is dit vierde aantal dat der α's wanneer voor $a \equiv 0$ m tot A behoort, en dat der γ's wanneer voor $a \equiv 0$ m tot C behoort.

De verdere bemerkingen van Gauss in Art. 28 kunnen voor het oogenblik daargelaten worden, daar hun bewijs geen bezwaar ondervindt, zoodra eenmaal het bovenstaande getoond is, waartoe ik nu overga.

---

18. Zij dan vooreerst $m = -Q$, volgens de reciprociteitswet is, dan:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{Q}\right)\right)$$

en voor $a \equiv o$ mod. Q:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{bi}{Q}\right)\right) = \left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{Q}\right)\right) = i^{\frac{Q^2-1}{4}}$$

want $\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) = 1$, immers:

$$\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) \equiv b^{\frac{Q^2-1}{4}} \text{ mod. } Q.$$

en daar Q van den vorm $4r+3$, dus $\frac{Q^2-1}{4} = (Q-1)\,\frac{Q+1}{4}$ een veelvoud van $Q-1$ is, zoo volgt uit het theorema van FERMAT:

$$\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) = 1$$

Voor $Q = 8n+3$ volgt nu:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = -1$$

voor $Q = 8n+7$:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = +1$$

Voor $m = P = (A+B)\,(A-Bi)$ daarentegen, waarin $A+Bi$ en $A-Bi$ de primaire factoren van P zijn, volgt uit de reciprociteitswet:

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a+bi}{A-Bi}\right)\right)$$

en voor $a \equiv 0$ mod. P.

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{bi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{bi}{A-Bi}\right)\right) =$$

$$= \left(\left(\frac{-bi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{+bi}{A-Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{A+Bi}\right)\right).$$

Nu is, zooals bekend, in 't algemeen:

$$\left(\left(\frac{\alpha + \beta i}{A + Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{\alpha - \beta i}{A - Bi}\right)\right) = 1\text{, dus:}$$

$$\left(\left(\frac{P}{a + b i}\right)\right) = \left(\left(\frac{-1}{A + Bi}\right)\right) = (-1)^{\frac{P-1}{4}}$$

of voor $P = 8n + 1$

$$\left(\left(\frac{P}{a + b i}\right)\right) = 1$$

en voor $P = 8n + 5$

$$\left(\left(\frac{P}{a + b i}\right)\right) = -1 .$$

Hiermede is dus het in het voorgaande Art. onder I gezegde, geheel bewezen.

---

19. Onderstellen wij dan nu dat a niet door m deelbaar is, en beschouwen wij eerst het eenvoudigste geval

$$m = -Q ,$$

dan is dus:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a + b i}\right)\right) = \left(\left(\frac{a + b i}{Q}\right)\right)$$

en voor $b \equiv a x$ mod. Q:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a + b i}\right)\right) = \left(\left(\frac{a(1 + x i)}{Q}\right)\right) = \left(\left(\frac{1 + x i}{Q}\right)\right)$$

daar $\left(\left(\frac{a}{Q}\right)\right) = 1$ is, zooals reeds in het voorgaand artikel bewezen werd. Uit de verkregen uitkomst:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+b\,i}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+x\,i}{Q}\right)\right)$$

blijkt nu reeds dat de waarde van het symbool links, alleen van het getal x afhangt, welk getal de Q waarden:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ Q-1$$

kan aannemen.

Wij hebben dus nu nog slechts deze vraag te beantwoorden: wanneer de modulus Q een priemgetal van den vorm $4\,n+3$ is, hoeveel der getallen:

$$1,\ 1+i,\ 1+2\,i,\ 1+3\,i\ \ldots\ldots\ 1+(Q-1)\,i$$

behooren er dan respectievelijk tot de klassen A, B, C, D?

Ik bemerk hiertoe vooreerst dat, als een volledig systeem niet door Q deelbare resten, de getallen:

$$\alpha+\beta\,i$$

genomen kunnen worden, waarin α en β de waarden $0, 1, 2, 3 . Q-1$ doorloopen, met uitzondering der combinatie $\alpha=0$, $\beta=0$; en ten tweede dat de getallen:

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ q-1$$

allen tot A behooren, zoodat wanneer:

$$\alpha'+\beta'\,i$$

tot een zekere klasse behoort, ook:

$$2\,(\alpha'+\beta'\,i),\ 3\,(\alpha'+\beta'\,i)\ \ldots\ldots\ (q-1)\,(\alpha'+\beta'\,i)$$

tot diezelfde klasse behooren, al welke getallen door het weglaten van veelvouden van q weder tot den vorm $\alpha+\beta\,i$, waarin α en β kleiner dan q zijn, teruggebracht kunnen worden. Nu zijn de resten van:

$$\alpha',\ 2\,\alpha',\ 3\,\alpha'\ \ldots\ldots\ (q-1)\,\alpha'$$

zoolang α' niet $= 0$ is, volgens den modulus q in zekere volgorde met de getallen:

$$1, 2, 3 \ldots . q-1$$

congruent.

In de groep der $q-1$ getallen

$$\alpha' + \beta' i, \quad 2(\alpha' + \beta' i) \ldots \quad (q-1)(\alpha' + \beta' i)$$

die allen tot dezelfde klasse behooren, komt er dus één voor, congruent met een der getallen

$$1 + xi \qquad x = 0, 1, 2 \ldots q-1.$$

Nu is het aantal getallen van elke klasse $\frac{q^2-1}{4} = (q-1) \times \frac{q+1}{4}$, een veelvoud van $q-1$, en de $q-1$ getallen zonder reëel gedeelte

$$i, 2i, 3i, \ldots (q-1)i$$

behooren voor $q = 8n + 7$ tot A, voor $q = 8n + 3$ tot C.

Daar men nu alle getallen van elke klasse, waarvan het reëel gedeelte niet $= 0$ is, op bovenstaande wijze in groepen van $q-1$ getallen kan vereenigen, zoodanig dat er in elke groep één getal met het reëele gedeelte 1, voorkomt, zoo volgt dat voor

$Q = 8n + 7$ er in de klassen A, B, C, D respectievelijk

$$\frac{q-3}{4}, \quad \frac{q+1}{4}, \quad \frac{q+1}{4}, \quad \frac{q+1}{4}$$

getallen $1 + xi$ voorkomen.

Voor $Q = 8n + 3$ zijn deze aantallen:

$$\frac{q+1}{4}, \quad \frac{q+1}{4}, \quad \frac{q-3}{4}, \quad \frac{q+1}{4};$$

terwijl volgens Art. 18 in het geval $a \equiv 0$ mod. Q voor $Q = 8n + 7$, en $8n + 3$, Q respectievelijk tot de klassen A en C behoorde.

Alles wat op het geval $m = -Q$ had, is dus hiermede afgehandeld.

---

20. Voor $m = P = (A + Bi)(A - Bi)$ vonden wij reeds:

$$\left(\left(\frac{P}{a + bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a + bi}{A + Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{a + bi}{A - Bi}\right)\right)$$

en dus wanneer

$$b \equiv a\,x \quad \text{mod. } P$$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a}{A-Bi}\right)\right)$$

of daar, volgens een reeds in Art. 18 gemaakte bemerking het product der beide laatste factoren rechts $= 1$ is:

$$\left(\left(\frac{P}{a + bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{1 + xi}{A + Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{1 + xi}{A - Bi}\right)\right),$$

waaruit reeds blijkt dat de waarde van het symbool links alleen van het getal x afhangt, zoodat nog slechts de volgende vraag te beantwoorden blijft: voor hoeveel waarden van $1 + xi$ neemt

$$\left(\left(\frac{1 + xi}{A + Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{1 + xi}{A - Bi}\right)\right)$$

respectievelijk de waarden 1, i, -1, $-i$ aan? Voor x heeft men hier de waarden:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ P - 1$$

te nemen, *uitgezonderd* de beide wortels van $y^2 \equiv -1$ mod. P.

Om deze vraag te antwoorden beschouw ik een volledig systeem incongruente niet door den modulus $A + Bi$ deel-

bare resten, en breng deze volgens hun biquadratisch karakter tot 4 groepen A, B, C, D. Hierbij denk ik mij elke rest zoo gekozen dat het reëele deel $= 1$, en de factor van i kleiner dan P is.

Men kan dit aldus voorstellen:

$$\text{mod. } A + Bi \qquad A^2 + B^2 = P$$

$$\begin{array}{ll} \text{Klasse } A & \alpha = 1 + a\,i \\ \quad\quad\; B & \beta = 1 + b\,i \\ \quad\quad\; C & \gamma = 1 + c\,i \\ \quad\quad\; D & \delta = 1 + d\,i \end{array}$$

De getallen a, b, c, d in hun geheel stemmen overeen met:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots (P - 1)$$

behalve dat de waarde f, die $\equiv i$ is, ontbreekt, want $1 + f\,i \equiv 0$ mod. $A + B\,i$.

Evenzoo met $A - B\,i$ handelende, ziet men gemakkelijk dat de klassificatie deze zal zijn:

$$\text{mod. } A - B\,i$$

$$\begin{array}{ll} \text{Klasse } A & 1 + (P - a)\,i \\ \quad\quad\; B & 1 + (P - d)\,i \\ \quad\quad\; C & 1 + (P - c)\,i \\ \quad\quad\; D & 1 + (P - b)\,i \end{array}$$

want gelijktijdig heeft men:

$$(1 + x\,i)^{\frac{P-1}{4}} - i^{\rho} = (A + B\,i)(C + D\,i)$$

$$(1 - x\,i)^{\frac{P-1}{4}} - i^{3\rho} = (A - B\,i)(C - D\,i)$$

Heeft dus $1 + x\,i$ volgens den modulus $A + B\,i$ het karakter ϱ, dan heeft $1 - x\,i \equiv 1 + (P - x)\,i$ volgens den modulus $A - B\,i$ het karakter $3\,\varrho$.

---

21. Zal nu:

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$$

gelijk 1 worden, dan moet, wanneer:

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)$$

een der waarden 1, i, — 1, — i heeft, tegelijkertijd:

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)$$

een der waarden 1, — i, — 1, i aannemen, of op de beide verdeelingen in klassen lettende: wanneer x respectievelijk tot a, b, c, d behoort, dan moet telijkertijd ook $p - x$ tot de getallen a, b. c, d behooren. Men kan dus zeggen dat het aantal der waarden van van x waarvoor:

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)=1$$

wordt, gelijk is aan de som van de aantallen oplossingen der congruenties:

$$a + a' \equiv 0$$
$$b + b' \equiv 0$$
$$c + c' \equiv 0$$
$$d + d' \equiv 0$$

ten opzichte van den modulus P, of wat op hetzelfde neêrkomt ten opzichte van den modulus $A + Bi$.

Men bedenke hierbij, dat wel de voor x uitgesloten waarde $p-f$ onder a, b, c, d voorkomt, maar dat deze waarde toch in geen der bovenstaande congruenties kan optreden, omdat dit zoude vereischen dat ook f voorkwam onder de getallen a, b, c, d, wat niet het geval is.

Nu is $\alpha = 1 + a i$, zoodat men de voorgaande congruenties na vermenigvuldiging met i, overgaan in

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' &\equiv 2 \quad \text{mod. } (A + B i) \\ \beta + \beta' &\equiv 2 \\ \gamma + \gamma' &\equiv 2 \\ \delta + \delta' &\equiv 2. \end{aligned}$$

Behoort $\frac{p-1}{2}$ tot de klasse A, dan gaan de voorgaande congruenties door vermenigvuldiging met $\frac{p-1}{2}$ over in

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' + 1 &\equiv 0 \quad \text{mod. } (A + B i) \\ \beta + \beta' + 1 &\equiv 0 \\ \gamma + \gamma' + 1 &\equiv 0 \\ \delta + \delta' + 1 &\equiv 0, \end{aligned}$$

zoodat de som van het aantal oplossingen dezer congruenties gelijk is aan het aantal waarden van x, die

$$\left(\left(\frac{1 + x i}{A + B i}\right)\right) \left(\left(\frac{1 + x i}{A - B i}\right)\right)$$

gelijk 1 maken.

Maar zooals men zich onmiddellijk overtuigt, blijft dit resultaat hetzelfde, ook wanneer $\frac{p-1}{2}$ tot de klassen B, C, D behoort. Behoort bijv. $\frac{p-1}{2}$ tot B, dan volgt uit $\alpha + \alpha' \equiv 2$ door vermenigvuldiging met $\frac{p-1}{2}$

$$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$$

en uit $\beta + \beta' \equiv \gamma + \gamma' \equiv \delta + \delta' \equiv 2$ respectievelijk

$$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0, \quad \delta + \delta' + 1 \equiv 0, \quad \alpha + \alpha' + 1 \equiv 0.$$

Noemt men de aantallen der waarden van x, die respectievelijk

$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)$ $\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$ gelijk 1, i, -1, $-i$ maken t, u, v, w, dan is dus t de som van de aantallen oplossingen der congruenties

$$\begin{aligned} &\alpha+\alpha'+1\equiv 0 \quad \text{mod. } A+Bi \\ &\beta+\beta'+1\equiv 0 \\ &\gamma+\gamma'+1\equiv 0 \\ &\delta+\delta'+1\equiv 0. \end{aligned}$$

Geheel op dezelfde wijze vindt men dat

$u =$ de som van de aantallen oplossingen der congruenties:

$$\begin{aligned} &\alpha+\delta+1\equiv 0 \\ &\beta+\alpha+1\equiv 0 \\ &\gamma+\beta+1\equiv 0 \\ &\delta+\gamma+1\equiv 0, \end{aligned}$$

terwijl men voor v en w de congruenties:

$$\begin{aligned} &\alpha+\gamma+1\equiv 0 & & \alpha+\beta+1\equiv 0 \\ &\beta+\delta+1\equiv 0 & \text{en} \quad & \beta+\gamma+1\equiv 0 \\ &\gamma+\alpha+1\equiv 0 & & \gamma+\delta+1\equiv 0 \\ &\delta+\beta+1\equiv 0 & & \delta+\alpha+1\equiv 0 \end{aligned}$$

te beschouwen heeft.

Is dus $P=8n+1$ dan heeft men volgens Art. 7, 8:

$$\begin{aligned} t &= (0.0)+(1.1)+(2.2)+(3.3) = h+l+k+j = 2n-1 \\ u &= (0.3)+(1.0)+(2.1)+(3.2) = l+j+m+m = 2n \\ v &= (0.2)+(1.3)+(2.0)+(3.1) = k+m+k+m = 2n \\ w &= (0.1)+(1.2)+(2.3)+(3.0) = j+m+m+l = 2n \end{aligned}$$

en voor $P = 8n+5$ volgens Art. 13.

$$\begin{aligned} t &= (0.2)+(1.3)+(2.0)+(3.1) = k+j+h+l = 2n+1 \\ u &= (0.1)+(1.2)+(2.3)+(3.0) = j+l+m+m = 2n+1 \\ v &= (0.0)+(1.1)+(2.2)+(3.3) = h+m+h+m = 2n \\ w &= (0.3)+(1.0)+(2.1)+(3.2) = l+m+m+j = 2n+1 \end{aligned}$$

22. Al het voorgaande samenstellende, hebben dus de kenmerken, om te onderscheiden of een reëel priemgetal tot de klassen A, B, C, D behoort, wanneer de modulus p van den vorm $4n + 1$ en $a + bi$ een primaire complexe priemfactor van p is, de volgende gedaante:

Het priemgetal $P = 8n + 1$ behoort tot:

A voor $a \equiv 0$, $b \equiv a\alpha$	mod. P.	Aantal der	α's $= 2n - 1$
B voor $b \equiv a\beta$	»	»	β's $= 2n$
C voor $b \equiv a\gamma$	»	»	γ's $= 2n$
D voor $b \equiv a\delta$	»	»	δ's $= 2n$

Het priemgetal $P = 8n + 5$ behoort tot:

A voor $b \equiv a\alpha$		mod. P.	Aantal der	α's $= 2n + 1$
B voor $b \equiv a\beta$		»	»	β's $= 2n + 1$
C voor $b \equiv a\gamma$	$a \equiv 0$	»	»	γ's $= 2n$
D voor $b \equiv a\delta$		»	»	δ's $= 2n + 1$

Het priemgetal $- Q = - (8n + 3)$ behoort tot:

A	voor	$b \equiv a\alpha$	mod. Q.	Aantal der	α's $= 2n + 1$
B	»	$b \equiv a\beta$	»	»	» β's $= 2n + 1$
C	»	$b \equiv a\gamma$, $a \equiv 0$	»	»	» γ's $= 2n$
D	»	$b \equiv a\delta$	»	»	» δ's $= 2n + 1$

Het priemgetal $- Q = - (8n + 7)$ behoort tot:

A	voor	$b \equiv a\alpha$, $a \equiv 0$	mod. Q.	Aantal der	α's $= 2n + 1$
B	»	$b \equiv a\beta$	»	»	» β's $= 2n + 2$
C	»	$b \equiv a\gamma$	»	»	» γ's $= 2n + 2$
D	»	$b \equiv a\delta$	»	»	» δ's $= 2n + 2$

Ik voeg hierbij nog de volgende bemerkingen van GAUSS (Art. 28), waarvan het bewijs na al het voorgaande niet het minste bezwaar oplevert.

1. Het getal 0 behoort altijd tot de α's, en de getallen $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ behooren (mod. m) respectievelijk tot de α's, δ's, γ's en β's.

2. Voor $P = 8n + 1$, $Q = (8n + 7)$ behooren de waarden van $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$ (mod. m) respectievelijk tot de

α's, δ's, γ's, β's; en voor $P = 8n + 5$, $Q = (8n + 3)$ behooren deze waarden respectievelijk tot de γ's, β's, α's δ's.

DERDEMACHTS-RESTEN.

23. Nu tot de derdemachts-resten overgaande, is het noodig het een en ander omtrent de theorie der geheele getallen van den vorm $a + b\varrho$ in herinnering te brengen; ϱ is hierin een complexe derdemachts-wortel der eenheid, dus $1 + \varrho + \varrho^2 = 0$.

Zooals dan bekend is gelden ook in deze theorie omtrent de deelbaarheid der getallen, hunne ontbinding in priemfactoren, het bestaan van primitive wortels der priemgetallen enz. geheel analoge theorema's als die in de gewone theorie der reëele getallen, en verreweg het grootste gedeelte der onderzoekingen in de vier eerste sectiën der Disquisitiones arithmeticae kunnen bijna onveranderd ook voor de theorie der geheele getallen $a + b\varrho$ doorgevoerd worden.

Het product van twee geconjugeerde getallen $a + b\varrho$, $a + b\varrho^2$

$$(a + b\varrho)(a + b\varrho^2) = a^2 - ab + b^2$$

heet de *norm* van het getal $a + b\varrho$ en zal steeds door μ aangeduid worden.

Het getal 3 is in deze theorie geen priemgetal, want:

$$3 = (1 - \varrho)(1 - \varrho^2) = - \varrho^2 (1 - \varrho)^2$$

Als priemgetallen, behalve $1 - \varrho$, in deze theorie doen zich voor:

ten eerste de reële priemgetallen van den vorm $3n - 1$, de norm is dan $= (3n - 1)^2$;

ten tweede de complexe priemfactoren van de reële priemgetallen van den vorm $3n + 1$. Dit reële priemgetal is dan te gelijk de norm van de complexe priemfactor.

Bijv. is: $7 = (2 + 3\varrho)\ (2 + 3\varrho^2) = (2 + 3\varrho)\ (-1 - 3\varrho)$.

De priemgetallen $2 + 3\varrho$, $-1 - 3\varrho$ hebben beide 7 tot norm.

In beide gevallen is dus de norm van den vorm $3k + 1$.

Verder is het voldoende alleen *primaire* priemgetallen te beschouwen, waarbij ik mij van dit woord in den zin van EISENSTEIN (Cr. 27, pag. 301) zal bedienen, zoodat $a + b\varrho$ primair heet, wanneer $a + 1$ en b beide door 3 deelbaar zijn. De reële priemgetallen van den vorm $3n - 1$ moeten dus positief genomen worden om primair te zijn.

Zij dan M een primair priemgetal, μ de norm van den vorm $3n + 1$. Een volledig stelsel incongruente, niet door den modulus M deelbare resten bevat dan $\mu - 1 = 3n$ getallen. Deze getallen kunnen tot 3 klassen, elk n getallen bevattende, gebracht worden, al naar dat hun $\frac{\mu - 1}{3}$de macht volgens mod. M congruent is met 1, ϱ of ϱ^2. Deze verdeeling kan aldus voorgesteld worden:

$$\begin{array}{llll} A & \alpha, & \alpha', & \alpha'' \dots \\ B & \beta, & \beta', & \beta'' \dots \\ C & \gamma, & \gamma', & \gamma'' \dots \end{array}$$

waarin dus:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv 1, \quad \beta^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varrho, \quad \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varrho^2 \text{ mod. } M.$$

Het cubisch karakter der getallen $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ is $= 0$, dat der getallen $\beta, \beta' \dots = 1$, dat der getallen $\gamma, \gamma' \dots = 2$.

Het zal ondertusschen ook gemakkelijk zijn, van het EISENSTEIN'sche symbool gebruik te maken, en dus te schrijven:

$$\left[\frac{\alpha}{M}\right] = 1, \quad \left[\frac{\beta}{M}\right] = \varrho, \quad \left[\frac{\gamma}{M}\right] = \varrho^2.$$

Het doel van de eerstvolgende beschouwingen is nu de bepaling van het cubisch karakter van $1 - \varrho$, of wel de bepaling van de waarde van het symbool $\left[\frac{1-\varrho}{M}\right]$.

24. Door bij alle getallen van A, B, C de eenheid op te tellen, ontstaan de 3 groepen van getallen A', B', C':

$$\begin{array}{llll} A' & \alpha+1, & \alpha'+1, & \alpha''+1\ .. \\ B' & \beta+1, & \beta'+1, & \beta''+1\ .. \\ C' & \gamma+1, & \gamma'+1, & \gamma''+1\ .. \end{array}$$

en ik noem nu (0.0), (0.1), (0.2) de aantallen getallen van A' die respectievelijk congruent zijn met getallen van A, B, C; (1.0), (1.1), (1.2) de aantallen getallen van B' die resp. congruent zijn met getallen van A, B, C; eindelijk (2.0, (2.1), (2.2) de aantallen getallen C' die respect. congruent zijn met getallen A, B, C.

Al deze getallen kunnen in het schema S vereenigd worden:

(0.0)	(0.1)	(0.2)
(1.0)	(1.1)	(1.2)
(2.0)	(2.1)	(2.2)

en met de bepaling van deze getallen is ook onmiddellijk het cubisch karakter van $1-\varrho$ gevonden. Want uit de blijkbaar identieke congruenties:

$$(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ ..\equiv x)^{\frac{\mu-1}{3}}-1 \text{ mod. } M.$$

$$(x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\ ..\equiv x)^{\frac{\mu-1}{3}}-\varrho$$

$$(x-\gamma)(x-\gamma')(x-\gamma'')\ ..\equiv x)^{\frac{\mu-1}{3}}-\varrho^2$$

volgt voor $x=-1$, daar $\frac{\mu-1}{3}$ even is (behalve voor $M=2$. welk geval uit te zonderen is):

$$(\beta+1)(\beta'+1)(\beta''+1)\ ..\equiv 1-\varrho \text{ mod. } M$$
$$(\gamma+1)(\gamma'+1)(\gamma''+1)\ ..\equiv 1-\varrho^2$$

waaruit onmiddellijk volgt:

$$\left[\frac{1-\varrho}{M}\right] = \varrho^{(1.1)+2(1.2)}$$

$$\left[\frac{1-\varrho^2}{M}\right] = \varrho^{(2.1)+2(2.2)}$$

---

25. Het getal -1 behoort, als volkomen derde-macht tot de klasse A, en de getallen α en $-\alpha$, β en $-\beta$, γ en $-\gamma$ komen tegelijkertijd in de klassen A, B, C voor.

Met behulp van deze bemerking overtuigt men zich nu dadelijk dat

het teeken	voorstelt het aantal oplossingen van:
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$ mod. M
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(0.2)	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
(1.2)	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$
(2.0)	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$
(2.1)	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$
(2,2)	$\gamma + \gamma + 1 \equiv 0$

zoodat men heeft:

$$(0.1) = (1.0), \quad (0.2) = (2.0), \quad (1.2) = (2.1).$$

Is $xy = 1$ mod. M en behoort x tot A, dan behoort blijkbaar ook y tot A, behoort echter x tot B of C, dan behoort y respect. tot C of B; wat men kan uitdrukken door te schrijven

$$\alpha\,\alpha' \equiv 1, \quad \beta\,\gamma \equiv 1 \text{ mod. } M.$$

Uit

$$\gamma(\alpha + \beta + 1) \equiv \gamma' + 1 + \gamma$$
$$\beta(\alpha + \gamma + 1) \equiv \beta' + 1 + \beta$$

besluit men nu tot deze betrekkingen:

$$(0.1) = (2.2), \quad (0.2) = (1.1),$$

zoodat het schema S dezen vorm heeft:

$$\begin{matrix} h & j & k \\ j & k & l \\ k & l & j. \end{matrix}$$

Daar -1 tot A, dus 0 tot A' behoort, maar behalve dit getal 0 van A' overigens alle getallen van A', B', C met één getal van A, B of C congruent zijn, zoo volgt verder

$$h + j + k = n - 1$$
$$j + k + l = n.$$

De beschouwing van het aantal oplossingen der congruentie

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \mod. M,$$

waarin α, β, γ respectievelijk uit de klassen A, B, C te kiezen zijn, levert eindelijk nog eene betrekking tusschen h, j, k, l. Neemt men namenlijk eerst voor α de getallen van A, dan verkrijgt men voor dit aantal

$$hl + jj + kk.$$

Neemt men daarentegen achtereenvolgens voor β alle getallen van B, dan vindt men voor ditzelfde aantal:

$$jk + kl + lj$$

dus

$$0 = hl + jj + kk - jk - kl - lj.$$

---

26. Elimineert men uit deze laatste vergelijking h met behulp van $h = l - 1$, dan is

$$0 = l(l-1) + jj + kk - jk - kl - lj,$$

welke vergelijking, met 4 vermenigvuldigd, wegens

$$(j + k)^2 + 3(j - k)^2 = 4(jj + kk - jk)$$

dezen vorm aanneemt:

$$0 = 4\,l^2 - 4\,l + (j+k)^2 + 3\,(j-k)^2 - 4\,l\,(k+j)$$

of wel, daar $l = n - (j+k)$ is en met 9 vermenigvuldigend:

$$36\,n = 36\,l^2 + 9\,(j+k)^2 + 27\,(j-k)^2 - 36\,l\,(j+k) + 36(j+k)$$

en

$$24\,n = 24\,(j+k+l).$$

dus aftrekkende:

$$12\,n = 36\,l^2 + 9(j+k)^2 + 27(j-k)^2 - 36\,l(j+k) + 12(j+k) - 24\,l$$

of wel

$$12\,n + 4 = 4\,\mu = (6\,l - 3\,j - 3\,k - 2)^2 + 27\,(j-k)^2.$$

Stellen wij nu:

$$A = 6\,l - 3\,j - 3\,k - 2$$
$$B = 3\,j - 3\,k\ ,$$

dan is dus:

$$4\,\mu = A^2 + 3\,B^2$$

en men kan verder h, j, k, l met behulp van A en B gemakkelijk aldus uitdrukken:

$$9\,h = 3\,n + A - 7$$
$$18\,j = 6\,n - A + 3\,B - 2$$
$$18\,k = 6\,n - A - 3\,B - 2$$
$$9\,l = 3\,n + A + 2\ .$$

Om nog A en B te bepalen zijn nu twee gevallen te onderscheiden.

---

27. Is vooreerst M reëel van den vorm $3\,n - 1$, dus $\mu = M^2$, dan volgt uit

$$4\,\mu = 4\,M^2 = A^2 + 3\,B^2$$

dat $A = \pm 2M$, $B = 0$ is. Want was B niet $= 0$, dan zou men een geheel getal x kunnen bepalen, zóó dat

$$A \equiv Bx \text{ mod. } M,$$

waaruit volgt

$$A^2 \equiv -3B^2 \equiv B^2x^2 \text{ mod. } M.$$

dus

$$x^2 \equiv -3 \text{ mod. } M$$

wat onmogelijk is, daar men weet dat -3 niet-rest is van M.

Stellig is dus $B = 0$, $A = \pm 2M$. Maar ook het teeken van A volgt onmiddellijk uit de bemerking dat $A \equiv 1$ mod. 3 is, en M als *primair* priemgetal $\equiv -1$ mod. 3; waaruit dus blijkt:

$$A = 2M$$

en ten slotte

$$9h = 3n + 2M - 7$$
$$9j = 9k = 3n - M - 1$$
$$9l = 3n + 2M + 2.$$

---

28. Is in de tweede plaats $M = a + b\varrho$ een primaire complexe priemfactor van een reëel priemgetal p van den vorm $3n + 1$, dan is:

$$4\mu = (2a - b)^2 + 3b^2 = A^2 + 3B^2$$

en daar $a + b\varrho$ primair is, $a + 1 \equiv b \equiv 0$ mod. 3.

Nu is ook B door 3 deelbaar, en daar, zooals gemakkelijk te bewijzen valt, 4μ slechts op éène wijze voorgesteld kan worden als de som van een quadraat en het 27 voud van een tweede quadraat, zoo volgt:

$$A = 2a - b, \quad B = \pm b$$

Het teeken van A wordt namenlijk weder bepaald door $A \equiv 1$ mod. 3.

Om nog het teeken van B te bepalen dient deze beschouwing: doorloopt z alle getallen van A, B en C dan vindt men, op geheel dezelfde wijze als in Art. 12:

$$\Sigma (z^3 + 1)^{\frac{\mu - 1}{3}} \equiv -2 \equiv 3 (h + j \varrho + k \varrho^2) \text{ mod. } M$$

of:

$$-2 \equiv 3 ((h - k) + \varrho (j - k))$$

en nu h, j, k door A en B uitdrukkende, en voor A de waarde $2a - b$ schrijvende, na een kleine herleiding:

$$0 \equiv 2a - b + B + 2B\varrho \text{ mod. } (M = a + b\varrho)$$

waaruit blijkt dat $B = b$ is.

Nadat op deze wijze A en B gevonden zijn, heeft men:

$$9h = 3n + 2a - b - 7$$
$$9j = 3n - a + 2b - 1$$
$$9k = 3n - a - b - 1$$
$$9l = 3n + 2a - b + 2$$

---

29. Volgens Art. 24 is nu het cubisch karakter van $1 - \varrho$ volgens den modulus 3:

$$\equiv (1.1) + 2\,(1.2) \equiv k - l$$

dat van $1 - \varrho^2$:

$$\equiv (2.1) + 2\,(2.2) \equiv l - j$$

dus wanneer M reëel van den vorm $3n - 1$ is, volgens Art. 27

$$\text{Karakter } (1 - \varrho) \equiv -\frac{M+1}{3}$$

$$\text{»} \quad (1 - \varrho^2) \equiv +\frac{M+1}{3}$$

of wel:

$$\left[\frac{1-\varrho}{M}\right] = \varrho^{-\frac{M-1}{3}}, \quad \left[\frac{1-\varrho^2}{M}\right] = \varrho^{+\frac{M+1}{3}}$$

waaruit nog volgt:

$$\left[\frac{3}{M}\right] = 1.$$

Is daarentegen $M = a + b\varrho$ een primaire complexe factor van een reëel priemgetal van den vorm $3n + 1$ dan is, volgens de waarden in Art. 28 gevonden:

$$\text{Karakter } (1-\varrho) \equiv \frac{1}{3}(-a-1)$$

$$\text{»} \quad (1-\varrho^2) \equiv \frac{1}{3}(a-b+1)$$

of:

$$\left[\frac{1-\varrho}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{a+1}{3}}, \quad \left[\frac{1-\varrho^2}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{\frac{a-b+1}{3}}$$

$$\left[\frac{3}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{1}{3}b}$$

Deze resultaten verschillen niet wezenlijk van die door EISENSTEIN gegeven in het 28ste Deel van CRELLE's *Journal*, pag. 28 en v.v.

---

30. Omtrent het geval dat het priemgetal M een factor is van een reëel priemgetal p van den vorm $3n + 1$ moge nog het volgende opgemerkt worden.

Daar in $M = a + b\varrho$, a en b geen gemeene deeler hebben en derhalve ook b en $a - b$ relatief priem zijn, zoo kan men altijd twee geheele getallen α en β vinden, zoodanig dat:

$$b\alpha + (a-b)\beta = 1$$

en dan is:

$$(a + b\varrho)(\alpha + \beta\varrho) = a\alpha - b\beta + \varrho'$$

dus:

$$\varrho \equiv b\beta - a\alpha \text{ mod. } (M = a + b\varrho).$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat elk geheel getal $c + d\varrho$ volgens den modulus $a + b\varrho$ congruent is met een reëel getal, welk reëel getal kleiner dan de modulus $\mu = p$ aangenomen kan worden, zoodat de reëele getallen:

$$0, 1, 2, 3 \ldots \mu - 1$$

een volledig restsysteem vormen. Verdeelt men nu deze reëele getallen (met uitzondering van 0) volgens hun cubisch karakter in drie klassen:

A	α	α'	α''	..
B	β	β'	β''	..
C	γ	γ'	γ''	..

en noemen wij f het reëele getal dat $\equiv \varrho$ is (mod. M), dan is dus:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} - 1 \equiv \beta^{\frac{\mu-1}{3}} - f \equiv \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} - f^2 \equiv 0 \text{ mod. } M = (a + b\varrho)$$

en daar:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} - 1,\ \beta^{\frac{\mu-1}{3}} - f,\ \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} - f^2$$

reëele getallen zijn, zoo moeten zij niet alleen door $a + b\varrho$ maar ook door den modulus:

$$p = \mu = (a + b\varrho)(a + b\varrho^2)$$

deelbaar zijn, of:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv 1 \text{ mod. } (p = \mu)$$

$$\beta^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv f$$

$$\gamma^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv f^2$$

Hieruit blijkt dus dat de klassificatie der getallen

$$1, 2, 3 \ldots, p - 1$$

met behulp dezer drie laatste congruenties, samenvalt met die volgens hun cubisch karakter ten opzichte van den modulus $a + b\,\varrho$.

Het resultaat

$$\left[\frac{3}{a + b\,\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{1}{3}b}$$

kan nu aldus uitgesproken worden: dat het getal 3 tot de klasse A, B of C behoort, al naardat $-\frac{1}{3}b$ van den vorm $3m$, $3m + 1$ of $3m + 2$ is.

Ik laat hier eenige voorbeelden volgen.

$p = 7 \quad a = 2 \quad b = 3 \quad f = 4$ — Schema S.

A	1, 6	$h\ j\ k$	0 1 0
B	2, 5	$j\ k\ l$	1 0 1
C	3, 4	$k\ l\ j$	0 1 1

$p = 13 \quad a = -1 \quad b = 3 \quad f = 9$

A	1, 5, 8, 12	0 2 1
B	4, 6, 7, 9	2 1 1
C	2, 3, 10, 11.	1 1 2

$p = 19 \quad a = 5 \quad b = 3 \quad f = 11$

A	1, 7, 8, 11, 12, 18	2 2 1
B	4, 6, 9, 10, 13, 15	2 1 3
C	2, 3, 5, 14, 16, 17	1 3 2

$p = 31 \quad a = 5 \quad b = 6 \quad f = 25$

A	1, 2, 4, 8, 15, 16, 23, 27, 29, 30	3 4 2
B	3, 6, 7, 12, 14, 17, 19, 24, 25, 28	4 2 4
C	5, 9, 10, 11, 13, 18, 20, 21, 22, 26	2 4 4

$p = 37 \quad a = -4 \quad b = 3 \quad f = 26$

A	1, 6, 8, 10, 11, 14, 23, 26, 27, 29, 31, 36	2 5 4
B	2, 9, 12, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 25, 28, 35	5 4 3
C	3, 4, 5, 7, 13, 18, 19, 24, 30, 32, 33, 34	4 3 5

$p = 43 \quad a = -1 \quad b = 6 \quad f = 36$

A	1, 2, 4, 8, 11, 16, 21, 22, 27, 32, 35, 39, 41, 42	3 6 4
B	3, 5, 6, 10, 12, 19, 20, 23, 24, 31, 33, 37, 38, 40	6 4 4
C	7, 9, 13, 14, 15, 17, 18, 25, 26, 28, 29, 30, 34, 36	4 4 6

$p = 61 \quad a = 5 \quad b = 9 \quad f = 13$

A	1, 3, 8, 9, 11, 20, 23, 24, 27, 28, 33, 34, 37,	6 8 5
	38, 41, 50, 52, 53, 58, 60	8 5 7
B	4, 10, 12, 14, 17, 19, 25, 26, 29, 30, 31, 32,	5 7 8
	35, 36, 42, 44, 47, 49, 51, 57	
C	2, 5, 6, 7, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 39, 40, 43,	
	45, 46, 48, 54, 55, 56, 59	

Terwijl over het voorkomen van het getal 3 in de groepen *A*, *B*, *C* op bovenstaande wijze vooruit beslist is, kan men nu, met behulp van de reciprociteits-wet, in de theorie der cubische resten gemakkelijk de kenmerken opstellen, noodig om het voorkomen ook van andere getallen in deze klassen te onderkennen. Het is hierbij blijkbaar voldoende om alleen priemgetallen te beschouwen.

Wat het priemgetal 2 betreft, kan men deze criteria, zonder hulp der reciprociteits-wet, aldus afleiden.

---

31. Daar het getal $p-1$ altijd tot A behoort, zoo volgt onmiddellijk, dat 2 tot de klasse A, B of C zal behooren al naar gelang $\frac{p-1}{2}$ tot de klasse A, C of B behoort.

De getallen h, k, j zijn nu respectievelijk de aantallen oplossingen der congruenties:

$$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0 \text{ mod. } p.$$
$$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$$
$$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$$

en daar men α met α', β met β', γ met γ' mag verwisselen, zijn deze drie aantallen even, uitgezonderd het eerste, wanneer $\alpha = \alpha' = \frac{p-1}{2}$ tot A behoort, of, uitgezonderd het tweede, wanneer $\beta = \beta' = \frac{p-1}{2}$ tot B behoort, of, uitgezonderd het derde, wanneer $\gamma = \gamma' = \frac{p-1}{2}$ tot C behoort.

Hieruit blijkt dus dat 2 tot de klasse A, B of C behoort, al naardat van de drie getallen h, j, k het eerste, tweede of derde oneven is.

Daar $p = 3n + 1$ (n even) en volgens Art. 28

$$9h = 3n + 2a - b - 7$$
$$9j = 3n - a + 2b - 1$$
$$9k = 3n - a - b - 1$$

is. zoo is h oneven wanneer b even is, j oneven wanneer a even is, eindelijk k oneven wanneer a en b beide oneven zijn. Daar a en b geen gemeenen deeler hebben, zoo zijn geen andere gevallen mogelijk, dus 2 behoort tot:

A	wanneer	$b \equiv 0$ mod. 2
B	«	$a \equiv 0$ mod. 2
C	«	$a \equiv b \equiv 1$ mod. 2

32. Wat het voorkomen van 5 betreft, volgens de cubische reciprociteits-wet is

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{a+b\varrho}{5}\right]$$

want 5 is ook in de theorie der geheele getallen $a+b\varrho$ een priemgetal.

Voor $a \equiv 0$ mod. 5 is dus:

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{b\varrho}{5}\right] = \left[\frac{\varrho}{5}\right] = \varrho^8 = \varrho^2$$

dus behoort 5 tot C.

Is a niet door 5 deelbaar, dan kan men x bepalen uit:

$$b \equiv a\,x \text{ mod. } 5$$

en x kan de waarden 0, 1, 2, 3, 4 aannemen:

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{a(1+x\varrho)}{5}\right] = \left[\frac{1+x\varrho}{5}\right]$$

en men vindt nu:

$$x=0 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = 1$$

$$x=1 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = \varrho$$

$$x=2 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = 1$$

$$x=3 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = \varrho^2$$

$$x=4 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = \varrho\,,$$

zoodat 5 behoort tot

$$A \text{ wanneer } b \equiv 0, \quad b \equiv 2a \text{ mod. } 5$$

$$B \quad » \quad b \equiv a, \quad b \equiv 4a$$

$$C \quad » \quad b \equiv 3a, \quad a \equiv 0.$$

Om het voorkomen van 7 te beoordeelen heeft men:

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{2+3\varrho}{a+b\varrho}\right] \left[\frac{2+3\varrho^2}{a+b\varrho}\right]$$

en nu volgens de reciprociteits-wet

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{a+b\varrho}{2+3\varrho}\right] \left[\frac{a+b\varrho}{2+3\varrho^2}\right].$$

Voor $a \equiv 0$ mod. 7 volgt, daar in 't algemeen

$$\left[\frac{\alpha+\beta\varrho}{a+b\varrho}\right] \left[\frac{\alpha+\beta\varrho^2}{a+b\varrho^2}\right] = 1 \text{ is,}$$

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{\varrho}{2+3\varrho}\right] \left[\frac{\varrho}{2+3\varrho^2}\right] = \left[\frac{\varrho^2}{2+3\varrho}\right] = \varrho^4 = \varrho,$$

zoodat 7 tot B behoort.

Is a niet door 7 deelbaar, maar

$$b \equiv a x \text{ mod. } 7,$$

dan volgt:

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{1+x\varrho}{2+3\varrho}\right] \left[\frac{1+x\varrho}{2+3\varrho^2}\right]$$

en voor x kunnen de waarden

0, 1, 2, 4, 6

voorkomen, niet $x = 3$ en $x = 5$, daar deze waarden

$$p = a^2 - ab + b^2 \equiv a^2(1 - x + x^2)$$

door 7 deelbaar zouden maken.

Men vindt nu

$$x = 0 \qquad \left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = 1$$

$$x = 1 \qquad \left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = \varrho^2$$

$$x = 2 \qquad \left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = 1$$

$$x = 4 \qquad \left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = \varrho$$

$$x = 6 \qquad \left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = \varrho^2,$$

zoodat 7 behoort tot

A wanneer $b \equiv 0$, $b \equiv 2a$ mod. 7
B » $b \equiv 4a$, $a \equiv 0$
C » $b \equiv a$, $b \equiv 6a$

Op gelijke wijze, of door inductie, zal men vinden dat
11 behoort tot

A voor $b \equiv 0$, $b \equiv 2a$, $b \equiv 4a$, $b \equiv 5a$ mod. 11
B » $b \equiv 3a$, $b \equiv 6a$, $b \equiv 9a$, $a \equiv 0$
C » $b \equiv a$, $b \equiv 7a$, $b \equiv 8a$, $b \equiv 10a$

13 behoort tot

A voor $b \equiv 0$, $b \equiv 2a$, $b \equiv 3a$, $b \equiv 8a$ mod. 13
B » $b \equiv a$, $b \equiv 6a$, $b \equiv 11a$, $b \equiv 12a$
C » $b \equiv 5a$, $b \equiv 7a$, $b \equiv 9a$, $a \equiv 0$

17 behoort tot mod. 17

A voor $b \equiv 0$, $b \equiv a$, $b \equiv 2a$, $b \equiv 9a$, $b \equiv 16a$, $a \equiv 0$
B » $b \equiv 3a$, $b \equiv 7a$, $b \equiv 8a$, $b \equiv 12a$, $b \equiv 13a$, $b \equiv 14a$
C » $b \equiv 4a$, $b \equiv 5a$, $b \equiv 6a$, $b \equiv 10a$, $b \equiv 11a$, $b \equiv 15a$

19 behoort tot mod. 19

A voor $b \equiv 0$, $b \equiv a$, $b \equiv 2a$, $b \equiv 10a$, $b \equiv 18a$, $a \equiv 0$
B » $b \equiv 5a$, $b \equiv 11a$, $b \equiv 13a$, $b \equiv 14a$, $b \equiv 16a$, $b \equiv 17a$
C » $b \equiv 3a$, $b \equiv 4a$, $b \equiv 6a$, $b \equiv 7a$, $b \equiv 9a$, $b \equiv 15a$

23 behoort tot mod. 23

A voor $b\equiv 0$, $b\equiv 2a$, $b\equiv 5a$, $b\equiv 6a$, $b\equiv 7a$, $b\equiv 8a$, $b\equiv 11a$, $b\equiv 15a$
B » $b\equiv a$, $b\equiv 9a$, $b\equiv 13a$, $b\equiv 16a$, $b\equiv 17a$, $b\equiv 18a$, $b\equiv 19a$, $b\equiv 22a$
C » $b\equiv 3a$, $b\equiv 4a$, $b\equiv 10a$, $b\equiv 12a$, $b\equiv 14a$, $b\equiv 20a$, $b\equiv 21a$, $b\equiv 0$

---

33. De beschouwing van deze bijzondere theorema's geeft aanleiding tot de volgende opmerkingen.

Voor het gemak zal ik in 't volgende de reëele priemgetallen van den vorm $3n - 1$, die ook in de complexe theorie priemgetallen blijven, door Q, de priemgetallen van den vorm $3n + 1$ door P aanduiden.

1. Een priemgetal Q behoort, wanneer $a \equiv 0$ mod. Q tot de klassen A, B, C al naardat $\frac{Q+1}{3}$ van den vorm $3m$, $3m+1$, $3m+2$ is.

2. Een priemgetal P behoort, wanneer $a \equiv 0$ mod. P tot de klassen A, B, C al naardat $\frac{P-1}{6}$ van den vorm $3m$, $3m+1$, $3m+2$ is.

3. In de gevallen $b \equiv 0$, $b \equiv 2a$ behoort het priemgetal P of Q altijd tot de klasse A.

4. Behoort het priemgetal tot A voor $a \equiv 0$, dan behoort het ook tot A voor $b \equiv a$ en $b \equiv -a$. Komt het priemgetal echter in de klasse B of C voor wanneer $a \equiv 0$, dan komt het voor $b \equiv a$ en $b \equiv -a$ in de klasse C of B voor.

5. In het algemeen zijn de criteria van den navolgenden vorm:

Is $a \equiv 0$, dan behoort het priemgetal tot een bepaalde klasse.

Is a niet $\equiv 0$, dan is $b \equiv ax$ en voor elke waarde van x behoort het priemgetal in een bepaalde klasse, zoodat men de waarden van x in 3 groepen α, β, γ kan onderscheiden, zoodanig dat voor

$b \equiv a\alpha$ het priemgetal tot A
$b \equiv a\beta$ » » » B
$b \equiv a\gamma$ » » » C behoort.

Hierbij komt dan nog het geval $a \equiv 0$, dat ook met een bepaalde klasse correspondeert.

Het totale aantal congruenties nu, die men op deze wijze voor elk der drie klassen vindt, is even groot en $= \dfrac{Q+1}{3}$ of $= \dfrac{P-1}{3}$.

6. Zijn x en y twee getallen die voldoen aan de congruentie:

$$x + y - xy \equiv 0$$

en behoort x tot α, dan behoort ook y tot α. Is echter $x = \beta$ of $= \gamma$, dan behoort respectievelijk y tot de γ's of β's.

Is $xy \equiv 1$ en behoort 1 tot de α's, dan is:

voor $x = \alpha'$ $\quad y = \alpha''$
voor $x = \beta'$ $\quad y = \gamma'$
voor $x = \gamma'$ $\quad y = \beta'$

Is $xy \equiv 1$ en $1 = \beta$, dan is:

voor $x = \alpha$ $\quad y = \gamma$
voor $x = \beta'$ $\quad y = \beta''$
voor $x = \gamma'$ $\quad y = \alpha'$

Is $xy \equiv 1$ en $1 = \gamma$, dan is:

voor $x = \alpha$ $\quad y = \beta$
voor $x = \beta$ $\quad y = \alpha$
voor $x = \gamma$ $\quad y = \gamma$

---

34. Wat het *bewijs* van de bovenstaande bemerkingen betreft, alleen het onder 5 gezegde vereischt eenige nieuwe beschouwingen; al het overige levert na het voorafgaande geen moeielijkheden op.

Ik ga er dan nu toe over het onder 5 opgemerkte algemeen aan te toonen. Hierbij zijn de gevallen dat het priemgetal $= Q$ of $= P$ is, afzonderlijk te behandelen, en wel zal eerst het eerste geval (verreweg het eenvoudigste) beschouwd worden.

---

35. Is dan het priemgetal Q van den vorm $3n - 1$, dus ook in de theorie der complexe getallen van den vorm $a + b\varrho$ priem, dan is dus volgens de wet van reciprociteit:

$$\left[\frac{Q}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{a + b\varrho}{Q}\right]:$$

Is vooreerst $a \equiv 0$ mod. Q, dan heeft men verder:

$$\left[\frac{Q}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{b\varrho}{Q}\right] = \left[\frac{\varrho}{Q}\right] = \varrho^{\frac{Q^2-1}{3}}.$$

Nu is:

$$\frac{Q+1}{3} \times (Q - 2)$$

een veelvoud van 3 en

$$\frac{Q^2 - 1}{3} - \frac{(Q+1)(Q-2)}{3} = \frac{Q+1}{3}$$

derhalve:

$$\text{voor } a \equiv 0 \text{ mod. } Q, \left[\frac{Q}{a + b\varrho}\right] = \varrho^{\frac{Q+1}{3}}$$

waarmede de juistheid van het in Art. 33 onder 1 gezegde aangetoond is.

Is a niet door Q deelbaar, dan is x volkomen bepaald door:

$$b \equiv a x \text{ mod. } Q$$

en:

$$\left[\frac{Q}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{a(1 + x\varrho)}{Q}\right] = \left[\frac{1 + x\varrho}{Q}\right]$$

waaruit reeds blijkt dat de klasse waartoe Q behoort alleen van het getal x afhangt; terwijl voor x blijkbaar de getallen:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ..\ Q-1$$

kunnen voorkomen.

Wij hebben nu nog slechts deze vraag te beantwoorden: hoeveel der Q grootheden:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{Q}\right] \qquad x=0,\ 1,\ 2,\ 3\ ..\ Q-1$$

zijn gelijk aan 1, hoeveel gelijk aan ϱ, hoeveel gelijk aan ϱ^2? Wij beschouwen een volledig systeem niet door den modulus deelbare getallen, voor hetwelk de getallen:

$$\alpha+\beta\varrho \qquad \begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}=0,\ 1,\ 2,\ 3\ ..\ Q-1$$

genomen kunnen worden, waarbij alleen de combinatie $\alpha=0,\ \beta=0$ weg te laten is. Brengen wij deze Q^2-1 getallen naar hun cubische karakter tot 3 groepen A, B, C

$$\begin{matrix} A & \alpha_0+\beta_0\varrho\ .\ . \\ B & \alpha_1+\beta_1\varrho\ .\ . \\ C & \alpha_2+\beta_2\varrho\ .\ . \end{matrix}$$

dan bevat elk dezer groepen:

$$\frac{Q^2-1}{3}=(Q-1)\times\frac{Q+1}{3}$$

getallen, welk aantal dus een veelvoud van $Q-1$ is; en de reëele getallen die met $\beta=0$ correspondeeren:

$$1,\ 2,\ 3\ ..\ Q-1$$

behooren allen tot A, waaruit voortvloeit dat zoo $\alpha+\beta\varrho$ tot zekere klasse behoort, ook de met:

$$1\,(\alpha+\beta\varrho),\ 2\,(\alpha+\beta\varrho),\ ..\ (Q-1)\,(\alpha+\beta\varrho)$$

congruente getallen tot dezelfde klasse behooren. Is nu α niet gelijk nul, dan zijn:

$$\alpha \qquad 2\alpha \qquad 3\alpha \,.. \qquad (Q-1)\alpha$$

volgens den modulus Q in zekere volgorde congruent met

$$1, \qquad 2, \qquad 3, \,.. \qquad Q-1.$$

Men kan dus de getallen van een klasse, waarbij het reëele deel niet $=0$ is, in groepen van $Q-1$ getallen verdeelen, zóódat in elke groep één getal voorkomt van den vorm $1+x\varrho$.

Hieruit blijkt dus dat de aantallen getallen $1+x\varrho$ die $\left[\frac{1+x\varrho}{Q}\right]=1, =\varrho, =\varrho^2$ maken, zijn:

$$\frac{Q-2}{3}, \quad \frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q+1}{3} \quad \text{wanneer } \left[\frac{\varrho}{Q}\right]=1$$

$$\frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q-2}{3}, \quad \frac{Q+1}{3} \quad \text{wanneer } \left[\frac{\varrho}{Q}\right]=\varrho$$

$$\frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q-2}{3} \quad \text{wanneer } \left[\frac{\varrho}{Q}\right]=\varrho \text{ is.}$$

en daar verder boven gevonden werd dat voor:

$$a \equiv 0 \quad \text{mod. } Q$$

Q tot de klassen A, B of C behoort al naardat $\left[\frac{\varrho}{Q}\right]=1$, $=\varrho$ of $=\varrho^2$ is, zoo is hiermede het in Art. 33 onder 5 gezegde geheel bewezen voor het geval dat het priemgetal van den vorm $3n-1$ is.

---

36. Is het priemgetal, waarvan men het voorkomen in de klassen A, B, C wil onderzoeken, van den vorm

$p = 3n + 1$ dan komt het er dus op aan de waarde van:

$$\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right]$$

te bepalen; daar P geen priemgetal is in de complexe theorie, zoo is het in de eerste plaats noodig, vóórdat de wet van reciprociteit toegepast kan worden, P in zijne primaire priemfactoren te ontbinden

$$P = (A + B\varrho)\ (A + B\varrho^2)$$

en dan is:

$$\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{a + b\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{a + b\varrho}{A + B\varrho^2}\right].$$

Dus:

voor $a \equiv 0$ mod. P

$$\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = \varrho^{2\frac{P-1}{3}} = \varrho^{\frac{P-1}{6}}$$

voor $ax \equiv b$ mod. P

$$\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right]$$

Uit de eerste uitkomst voor $a \equiv 0$ blijkt de juistheid van de tweede bewerking in Art. 33.

Daar P van den vorm $3n + 1$ is, zoo heeft de congruentie

$$x^3 \equiv 1 \quad \text{mod. } P.$$

drie verschillende wortels, 1, f, g (waarbij $f \equiv g^2$).

De beide waarden $-f$, $-g$ kunnen nu niet $= x$ zijn in de congruentie:

$$b \equiv a x$$

want uit $b \equiv -af$ zoude volgen:

$$a^2 - ab + b^2 \equiv a^2 (1 + f + f^2) \equiv 0 \text{ mod. } P$$

zoodat het priemgetal:

$$p = a^2 - ab + b^2$$

door P deelbaar zoude zijn.

De waarden die x dus kan aannemen zijn:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ ..\ P-1$$

met weglating der beide getallen $P-f$ en $P-g$. Hun aantal is dus $P-2$, en nu is te onderzoeken voor hoeveel dezer $P-2$ waarden van x de uitdrukking:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

de waarden 1, ϱ en ϱ^2 aanneemt.

Ik bemerk nog dat:

$$\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho^{\frac{P-1}{3}}$$

en voor $a \equiv 0$ mod. P was:

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=\varrho^{2\frac{P-1}{3}}$$

Behoort dus ϱ voor den modulus $A+B\varrho$ tot de klasse A, B of C dan behoort gelijktijdig P voor den modulus $a+b\varrho$ (of wat hetzelfde is, voor den reëelen modulus p) tot de klasse A, C of B.

---

37. Men kan steeds, wanneer een willekeurig getal $\alpha+\beta\varrho$ gegeven is, een daarmede volgenden modulus $A+B\varrho$ congruent getal vinden, waarbij het reëele deel $=1$ is.

De verdeeling van een volledig systeem niet door den modulus deelbare getallen in drie klassen, volgens hun cubisch karakter, kan dus aldus voorgesteld worden:

modulus $A+B\varrho$

A	$\alpha=1+a\varrho$	$\alpha'=1+a'\varrho$	$\alpha''=1+a''\varrho$ ..
B	$\beta=1+b\varrho$	$\beta'=1+b'\varrho$	$\beta''=1+b''\varrho$ ..
C	$\gamma=1+c\varrho$	$\gamma'=1+c'\varrho$	$\gamma''=1+c''\varrho$ ..

en daar uit:

$$(1 + a\varrho)^{\frac{P-1}{3}} - \varrho^k \equiv (A + B\varrho)(C + D\varrho)$$

volgt:

$$(1 + a\varrho^2)^{\frac{P-1}{3}} - \varrho^{2k} = (A + B\varrho^2)(C + D\varrho^2)$$

kan dan te gelijkertijd de klassificatie voor den modulus $A + B\varrho^2$ aldus voorgesteld worden:

	modulus $A + B\varrho^2$		
A	$1 + a\varrho^2$	$1 + a'\varrho^2$	$1 + a''\varrho^2$ ..
B	$1 + c\varrho^2$	$1 + c'\varrho^2$	$1 + c''\varrho^2$ ..
C	$1 + b\varrho^2$	$1 + b'\varrho^2$	$1 + b''\varrho^2$ ..

De getallen a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' .. vormen in hun geheel alle getallen van deze groep:

$$0, 1, 2, 3 \,..\, P - 1,$$

met uitzondering van het enkele getal, dat $\equiv -\varrho^2$ mod $A + B\varrho$ is, en dat volgens mod. P congruent is met een der getallen $-f$, $-g$. De gevallen nu, dat

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = 1$$

is, zijn blijkbaar deze:

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] = 1 \text{ en te gelijker tijd } \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = 1$$

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho \text{ en te gelijker tijd } \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = \varrho^2$$

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho^2 \text{ en te gelijker tijd } \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = \varrho.$$

Nu is $\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=1$ voor $x=a, a', a''$.. en zal nu te gelijkertijd $\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1$ zijn, dan moet dus $1+a\varrho$ volgens den modulus $A+B\varrho^2$ congruent zijn met een der getallen $1+a\varrho^2$, $1+a'\varrho^2$.. dus:

$$1+a\varrho \equiv 1+a'\varrho^2 \text{ mod. } (A+B\varrho^2)$$

en omgekeerd, zoo aan deze congruentie voldaan is, dan heeft men:

$$\left[\frac{1+a\varrho}{A+B\varrho}\right]=1, \left[\frac{1+a\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1.$$

Het aantal malen dat dit geval zich dus voordoet is gelijk aan het aantal oplossingen van bovenstaande congruentie. Op soortgelijke wijze voor de beide overige gevallen:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho, \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho^2$$

en:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho^2, \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho$$

redeneerende, volgt dat het geheele aantal malen dat de uitdrukking:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

gelijk 1 is, voorgesteld wordt door de som van het aantal oplossingen der drie congruenties:

$$1+a\varrho \equiv 1+a'\varrho^2 \text{ mod. } A+B\varrho^2$$
$$1+b\varrho \equiv 1+b'\varrho^2$$
$$1+c\varrho \equiv 1+c'\varrho^2$$

Evenzoo blijkt dat het aantal malen dat bovenstaande uitdrukking $=\varrho$ en $=\varrho^2$ wordt, uitgedrukt wordt, in het eerste geval door de som van het aantal oplossingen der congruenties:

$$1 + b\varrho \equiv 1 + a\varrho^2 \text{ mod. } A + B\varrho^2$$
$$1 + c\varrho \equiv 1 + b\varrho^2$$
$$1 + a\varrho \equiv 1 + c\varrho^2$$

en in het tweede geval door de som van het aantal oplossingen der congruenties:

$$1 + c\varrho \equiv 1 + a\varrho^2 \text{ mod. } A + B\varrho^2$$
$$1 + a\varrho \equiv 1 + b\varrho^2$$
$$1 + b\varrho \equiv 1 + c\varrho^2$$

Om onmiddellijk de ontwikkelingen van Art. 25—28 te kunnen toepassen, is het iets gemakkelijker alleen congruenties voor den modulus $A + B\varrho$ te beschouwen, zoodat wij, in de voorgaande formules overal ϱ door ϱ^2 vervangende, zullen schrijven, wanneer t, u, v de aantallen malen zijn dat:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right] \times \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

respectievelijk $= 1$, $= \varrho$, $= \varrho^2$ is:
$t =$ som aantal oplossingen van:

$$1 + a\varrho^2 \equiv 1 + a'\varrho \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$1 + b\varrho^2 \equiv 1 + b'\varrho \quad »$$
$$1 + c\varrho^2 \equiv 1 + c'\varrho \quad »$$

$u =$ som aantal oplossingen van:

$$1 + b\varrho^2 \equiv 1 + a\varrho \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$1 + c\varrho^2 \equiv 1 + b\varrho \quad »$$
$$1 + a\varrho^2 \equiv 1 + c\varrho \quad »$$

$v =$ som aantal oplossingen van:

$$1 + c\varrho^2 \equiv 1 + a\varrho \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$1 + a\varrho^2 \equiv 1 + b\varrho \quad »$$
$$1 + b\varrho^2 \equiv 1 + c\varrho \quad »$$

---

38. Hierbij dient nog het volgende opgemerkt te worden. Onder de getallen $a\, b\, c\, a'\, b'\, c' \ldots$ komt één der getallen $-f$, $-g$ niet voor. Laten we onderstellen dat $-f$ niet voorkomt zoodat $-g$ *wel* voorkomt. Dan is het toch duidelijk dat niettemin deze waarde $-g$ nergens in een der bovenstaande congruenties kan voorkomen, want bijv. uit $1 + a\varrho^2 \equiv 1 + a'\varrho$ of $a\varrho^2 \equiv a'\varrho$ zou voor $a = -g$ volgen $a' \equiv a\varrho \equiv -\varrho^3 \equiv -f$ (want $f \equiv \varrho^2$ en $\varrho \equiv \varrho$ mod. $A + B\varrho$) en de waarde $a' \equiv -f$ komt niet voor. Daar nu onder de voor x te nemen waarden zoowel $-f$ als $-g$ *niet* voorkwamen, zoo is hierdoor klaar dat werkelijk de bovenstaande uitdrukkingen voor t, u en v juist zijn, wanneer de in de congruenties voorkomende getallen a, a', b, b', c, c' op alle mogelijke wijzen uit de groepen $a, a', a'' \ldots b, b', b'' \ldots c, c', c'' \ldots$ gekozen worden.

Voeren wij nu in plaats van a, b enz. liever de getallen $\alpha = 1 + a\varrho$, $\beta = 1 + b\varrho$ enz. in, dan gaat bijv.

$$a\varrho^2 \equiv a'\varrho \text{ over in } \varrho(\alpha - 1) \equiv \alpha' - 1$$

of

$$\alpha' - \varrho\alpha = 1 - \varrho$$

en, evenzoo met de overige congruenties handelende, vinden wij het volgende:

$t =$ som aantal oplossingen van:

$$\begin{aligned} \alpha' - \varrho\alpha &\equiv 1 - \varrho \text{ mod. } (A + B\varrho) \\ \beta' - \varrho\beta &\equiv 1 - \varrho \quad \text{»} \\ \gamma' - \varrho\gamma &\equiv 1 - \varrho \quad \text{»} \end{aligned}$$

$u =$ som aantal oplossingen van:

$$\begin{aligned} \alpha - \varrho\beta &\equiv 1 - \varrho \text{ mod. } (A + B\varrho) \\ \beta - \varrho\gamma &\equiv 1 - \varrho \quad \text{»} \\ \gamma - \varrho\alpha &\equiv 1 - \varrho \quad \text{»} \end{aligned}$$

r = som aantal oplossingen van:

$$\alpha - \varrho\gamma \equiv 1 - \varrho \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$\beta - \varrho\alpha \equiv 1 - \varrho \quad \text{»}$$
$$\gamma - \varrho\beta \equiv 1 - \varrho \quad \text{»}$$

In het eerste lid dezer congruenties kan het teeken - overal door + vervangen worden, daar twee getallen λ en $-\lambda$ steeds tot dezelfde klasse behooren. Doen wij dit, en vermenigvuldigen wij bovendien nog alle congruenties met het geheele getal $\dfrac{P-1}{1-\varrho} = \dfrac{3n}{1-\varrho} = n(1-\varrho^2)$, dan volgt:

t = som aantal oplossingen van:

$$\alpha' + \varrho\alpha + 1 \equiv 0 \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$\beta' + \varrho\beta + 1 \equiv 0 \quad \text{»}$$
$$\gamma' + \varrho\gamma + 1 \equiv 0 \quad \text{»}$$

u = som aantal oplossingen van:

$$\alpha + \varrho\beta + 1 \equiv 0 \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$\beta + \varrho\gamma + 1 \equiv 0 \quad \text{»}$$
$$\gamma + \varrho\alpha + 1 \equiv 0 \quad \text{»}$$

r = som aantal oplossingen van:

$$\alpha + \varrho\gamma + 1 \equiv 0 \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$\beta + \varrho\alpha + 1 \equiv 0 \quad \text{»}$$
$$\gamma + \varrho\beta + 1 \equiv 0 \quad \text{»}$$

en wel komt men tot dit besluit in elk der drie onderstellingen die men kan maken, namelijk dat $n(1-\varrho^2)$ tot de klasse A, B of C behoort. Dit is blijkbaar daaraan toe te schrijven dat de bovenstaande groepen van 3 congruenties zoodanig zijn, dat zij bij een cyclische verwisseling van α, β, γ onveranderd blijven.

Er zijn nu drie gevallen te onderscheiden.

I. ϱ behoort tot A of $\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right]=1$

In dit geval is $\varrho\alpha=\alpha''$, $\varrho\beta=\beta''$, $\varrho\gamma=\gamma''$ en derhalve zijn u, v, w de sommen der aantallen oplossingen van de volgende congruenties:

u	v	w
$\alpha+\alpha'+1\equiv 0$	$\alpha+\beta+1\equiv 0$	$\alpha+\gamma+1\equiv 0$
$\beta+\beta'+1\equiv 0$	$\beta+\gamma+1\equiv 0$	$\beta+\alpha+1\equiv 0$
$\gamma+\gamma'+1\equiv 0$	$\gamma+\alpha+1\equiv 0$	$\gamma+\beta+1\equiv 0$

of volgens Art. 25, wanneer wij de daar voor het priemgetal $a+b\varrho$ gevonden resultaten overdragen op den modulus $A+B\varrho$ met den norm $3n+1$

$$u=k+k+j=n-1$$
$$v=j+l+k=n$$
$$w=k+j+l=n$$

Volgens Art. 36 is in dit geval voor $a\equiv 0$, $\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=1$.

II. ϱ behoort tot B of $\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho$.

Dan zijn u, v, w de sommen der aantallen oplossingen van de volgende congruenties:

u	v	w
$\alpha+\beta+1\equiv 0$	$\alpha+\gamma+1\equiv 0$	$\alpha+\alpha'+1\equiv 0$
$\beta+\gamma+1\equiv 0$	$\beta+\alpha+1\equiv 0$	$\beta+\beta'+1\equiv 0$
$\gamma+\alpha+1\equiv 0$	$\gamma+\beta+1\equiv 0$	$\gamma+\gamma'+1\equiv 0$

of wel:

$$u=n$$
$$v=n$$
$$w=n-1$$

Volgens Art. 36 is in dit geval voor $a \equiv 0$, $\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \varrho^2$

III. ϱ behoort tot C of $\left[\frac{\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho^2$

u, v, w zijn de sommen der aantallen oplossingen van:

u	v	w
$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$
$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$	$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$

of wel:

$$u = n$$
$$v = n - 1$$
$$w = n$$

Volgens Art. 36 is in dit geval voor $a \equiv 0$, $\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \varrho$.

Hiermede is nu alles bewezen wat in Art. 33 gezegd is omtrent den algemeenen vorm der criteria, waaraan men het voorkomen van een priemgetal in de drie klassen kan onderkennen.

---

39. Wat de overige bemerkingen in Art. 33 betreft, zal het volstaan op te merken, dat het daar onder 6 voorkomende onmiddellijk volgt uit deze formules:

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{Q}\right]\left[\frac{1 + y\varrho}{Q}\right] = \left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{Q}\right]$$

en:

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right]\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right]\left[\frac{1 + y\varrho}{A + B\varrho}\right]\left[\frac{1 + y\varrho}{A + B\varrho^2}\right] =$$
$$= \left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{A + B\varrho}\right]\left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{A + B\varrho^2}\right]$$

Uit de bemerking dat voor $b \equiv 2a$ het priemgetal (2, 5, 7, 11 . .) steeds tot de klasse A behoort, kan nog een gevolgtrekking opgemaakt worden, die het goed schijnt hier te plaatsen. Daar namelijk wegens:

$$4p = 4(a^2 - ab + b^2) = (2a - b)^2 + 3b^2$$

3 *niet* tot de priemfactoren van $2a - b$ behoort, zoo volgt dat alle priemfactoren van $2a - b$ cubische resten van p zijn en derhalve is $2a - b$ zelf cubische rest van p.

---

40. Tot ditzelfde resultaat voert ook de volgende geheel verschillende beschouwing.

Zij $p = 3n + 1$ en laat z een volledig systeem incongruente, niet door den modulus $a + b\varrho$ deelbare, getallen doorloopen, dan volgt uit:

$$(z^3 + 1)^{2n} = z^{6n} + \ldots + \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} z^{3n} + \ldots + 1$$

$$\Sigma (z^3 + 1)^{2n} \equiv -2 - \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \text{ mod. } (a + b\varrho)$$

Maar aan den anderen kant vormen de getallen z^3 . . alle cubische resten van $a + b\varrho$, elke rest 3 maal geschreven, en van de getallen $z^3 + 1$ behooren er dus $3h$ tot de klasse A, $3j$ tot B, $3k$ tot C, derhalve is ook:

$$\Sigma (z^3 + 1)^{2n} \equiv 3h + 3k\varrho + 3j\varrho^2 \text{ mod. } (a + b\varrho)$$

of volgens de waarden van Art. 28

$$\Sigma (z^3 + 1)^{2n} \equiv a - b - 2 - b\varrho$$

dus:

$$-\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \equiv a - b - b\varrho \equiv 2a - b \text{ mod. } (a + \varrho)$$

zoodat ook:

$$2a - b \equiv -\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \text{ mod. } p = 3n + 1$$

is, welke merkwaardige congruentie het eerst door JACOBI in CRELLE's Journ. Bd. 2 gegeven werd, en waarvan het bewijs gewoonlijk uit formules afgeleid wordt, die in de theorie der cirkelverdeeling voorkomen.

Schrijft men deze congruentie aldus:

$$(1.\ 2.\ 3\ldots n)^2 (2a - b) \equiv -1.\ 2.\ 3\ldots(2n) \text{ mod. } p$$

en bedenkt dat:

$$\begin{aligned} 2n + 1 &\equiv -n \\ 2n + 2 &\equiv -(n-1) \\ 2n + 3 &\equiv -(n-2) \\ &\ldots \\ 3n &\equiv -1 \end{aligned}$$

terwijl n even en $1.\ 2.\ 3\ldots(3n) \equiv -1$ is, zoo volgt:

$$(1,\ 2,\ 3\ldots n)^3 (2a - b) \equiv 1 \text{ mod. } p$$

waaruit onmiddellijk blijkt dat $2a - b$ cubische rest van p is, zooals reeds boven op geheel andere wijze werd aangetoond. Uit dit eerste bewijs bleek bovendien dat alle deelers van $2a - b$ cubische resten zijn.

Leiden, December 1881.

EENE NIEUWE CATEGORIE VAN KLIMPLANTEN.

DOOR

M. TREUB.

Darwin heeft de klimplanten in vier klassen verdeeld, naarmate zij bij het klimmen gebruik maken van windende stengeldeelen, van adventief-wortels, van gekromde doornen of stekels, of eindelijk van prikkelbare organen.

De laatste klasse kan in vier categorieën worden onderverdeeld, volgens de organen welke met prikkelbaarheid bedeeld zijn, namelijk: ranken, prikkelbare bladen, prikkelbare takken en organen welke door mij *haken* zullen worden genoemd. De vierde dezer onderverdeelingen is tot nog toe niet onderscheiden, hoewel de planten, die er toe gerekend moeten worden, in systematische werken beschreven zijn.

Ten einde wel in te zien welke verschillen er bestaan tusschen de planten, die met behulp van prikkelbare organen klimmen, moet men in het oog houden dat de prikkelbaarheid bij deze op drie verschillende wijzen zich kan openbaren, welke soms aan een zelfde orgaan bijna te gelijker tijd, hoewel meestal achtereenvolgens, zijn waar te nemen.

In de eerste plaats kunnen er door inwerking van prikkels krommingen ontstaan. In de eerste drie afdeelingen zijn deze krommingen de meest in het oog vallende, en tevens de belangrijkste, uitingen der irritabiliteit. Vervolgens moet worden genoemd de spiraalvormige samentrekking van dat gedeelte van het prikkelbare orgaan, hetwelk tusschen de basis en de plaats van vasthechting aan het steunsel gelegen is.

Deze kurketrekkerachtige oprolling, als gevolg der prikkelbaarheid, wordt bij bijna alle ranken en bij eenige weinige prikkelbare takken of bladen aangetroffen.

In de derde plaats kan de prikkelbaarheid zich uiten in een dikker worden: hetzij van het geheele orgaan, hetzij alleen van dat gedeelte, hetwelk met het steunsel in aanraking is. Het ontstaan van hechtschijven is gewoonlijk slechts een bijzondere vorm van dit verschijnsel. Dit dikker worden, onder den invloed van een prikkel, openbaart zich in de eerste drie categorieën nooit alleen; altijd wordt het voorafgegaan door eene kromming om het steunsel, en dikwijls nog door eene spiraalvormige oprolling van het vrije gedeelte van het orgaan.

In de vierde, de nieuw door mij opgestelde, categorie, welke de *haken dragende planten* omvat, is integendeel een buitengewone toeneming in de dikte de *eenige* zichtbare uiting der prikkelbaarheid.

Ik noem dan *haken* die organen van klimplanten, bij welke de prikkelbaarheid uitsluitend door een dikker worden zich openbaart, hetwelk door drukking of wrijving wordt te voorschijn geroepen. Het is overbodig, in deze definitie den vorm der bedoelde organen te noemen: eensdeels omdat het woord »haak" hieromtrent reeds genoeg zegt, anderdeels omdat de haakvormige gedaante eene »conditio sine qua non" genoemd mag worden voor die organen van klimplanten, wier prikkelbaarheid zich alleen door een aanzienlijk toenemen in dikte kenbaar maakt.

De haken vormen eene groep van prikkelbare organen, welke niet minder goed gekenmerkt is dan die der ranken; gene zijn echter veel minder algemeen verspreid dan deze. De prikkelbare organen in de geslachten *Strychnos* en *Olax*, vormen in zekere mate overgangen tusschen ranken en takken.

De haken, welke ik ken, zijn veranderde bloemstelen (pedunculi), takken of doornen. Hoewel zij zeldzaam zijn, twijfel ik er toch niet aan of zij zullen bij nog andere geslachten gevonden worden dan die, voor welke ik in staat ben hunne tegenwoordigheid aan te geven.

Het is duidelijk dat mijne haken-dragende planten ver verwijderd zijn van de planten, door DARWIN tot zijne klasse

der »hook-climbers" gerekend; deze toch doen in geen enkel opzicht prikkelbaarheid waarnemen. Het scheen mij overbodig toe voor gene een nieuwen term in te voeren. Wel is waar wordt nu door mij het woord »haak", dat reeds af en toe in gebruik was, in geheel nieuwen, scherp omschreven, zin gebezigd; doch dit komt mij gerechtvaardigd voor, omdat tot nog toe overal, waar bij het bespreken van klimplanten de term »haak" werd aangewend, deze slechts als onbestemd en overtollig synoniem der uitdrukkingen »omgebogen stekel" of »gekromde doorn" te beschouwen is.

In een nieuw gedeelte der *Annales du Jardin botanique de Buitenzorg*, door mij naar Europa ter perse gezonden, worden mijne onderzoekingen over haken-dragende planten uitvoerig behandeld en met naar de natuur gemaakte teekeningen toegelicht

Het boven gezegde is dáár inleiding tot de afzonderlijke behandeling van elk der bijzondere gevallen. Bij gelegenheid dezer korte mededeeling, moet ik mij bepalen tot het noemen der onderzochte geslachten en het bijvoegen van enkele, zeer korte, toelichtingen.

Bij het geslacht *Uncaria* zijn de haken veranderde pedunculi; hoewel, in normale gevallen, hetzelfde orgaan daar niet als prikkelbare haak en als drager van een bloemhoofdje tegelijk dienst doet, zoo ben ik er toch in geslaagd, met name bij *Uncaria ovalifolia*, alle gewenschte overgangen tusschen haken en pedunculi te vinden.

In het Anonaceeën-geslacht *Artabotrys*, hebben de haken dezelfde morphologische waarde als bij *Uncaria;* de differentieering is er echter iets minder vèr gegaan, daar de *Artabotrys*-haken, voor het meerendeel, bloemdragend zijn en tegelijk als prikkelbare organen dienst kunnen doen.

Geheel anders is het met de *Ancistrocladus*-soorten, bij welke de differentieering het sterkst is onder al de door mij onderzochte gevallen. De haak, uit den top van een tak gevormd, is daar geheel een orgaan sui generis geworden. De hakendragende sympodiën van *Ancistrocladus* behooren tot de voornaamste bijzonderheden van dit, in ieder opzicht, merkwaardig geslacht.

Bij *Luvunga eleutherandra*, tot de familie der Aurantiaceeën behoorend, zijn de haken niets anders dan gekromde doornen. Betrekkelijk zelden slagen zij er in een steunsel te vatten; geschiedt dit echter, dan veroorzaken zij zeer hechte verbindingen, daar zij uitermate in dikte toenemen.

Dit laatste kan evenzeer gezegd worden van de haken eener door mij bestudeerde *Olax*-soort, welke, met vervormde takken gelijk te stellen, eenigszins aan ranken doen denken. Misschien geldt hetzelfde voor de haken der *Hugonia's* (fam. Linaceae); ik ken dit geslacht echter alleen uit beschrijvingen en afbeeldingen, want levende of gedroogde exemplaren van eene zijner soorten had ik niet ter mijner beschikking.

De prikkelbare organen bij het geslacht *Stry·hnos* eindelijk, zijn ranken, welke veel overeenkomst met haken hebben.

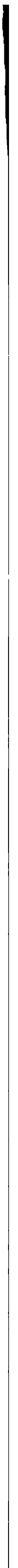
Het dikker worden van haken, na het omvatten van eenig steunsel, is gewoonlijk veel aanzienlijker dan dat, hetwelk bij andere prikkelbare organen van klimplanten is waargenomen. Een enkel, zeer sprekend, voorbeeld kan er een denkbeeld van geven. Van twee op elkander volgende haken der bovengenoemde *Luvunga*-soort, was de eene *wel*, de andere *niet* met een steunsel in verbinding; van de ellipsvormige horizontale doorsnede bij den laatsten, waren de lange en korte as 3½ en 2 mm., bij den eersten 17½ en 16½ mm. (in beide gevallen was de snede terzelfder hoogte genomen). Uit deze cijfers valt een oordeel over de buitengewone toeneming in dikte op te maken.

Zoowel bij *Luvunga* als bij *Uncaria* heb ik opgemerkt, dat soms de top van den zich verdikkenden haak *in* het steunsel dringt.

In het algemeen geven haken, veel meer dan ranken, tot blijvende verbindingen en vasthechtingen aanleiding; in hooge mate nam ik dit waar bij *Olax* en *Luvunga*.

Dat haken-dragende gewassen tot de beste klimmers kunnen behooren, hiervan leveren verscheidene *Uncaria's*, *Ancistrocladus Vahlii*, *Ancistrocladus pinangianus* en *Artabotrys suaveolens*, het bewijs

Buitenzorg, November 1881.



VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling **NATUURKUNDE.**

TWEEDE REEKS.

ACHTTIENDE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER
1883.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

ACHTTIENDE DEEL

TWEEDE REEKS.

VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

BEREKENING

VAN

AFSTAND EN AZIMUTH UIT LENGTE EN BREEDTE.

DOOR

Ch. M. SCHOLS.

A. Opsomming der formules.

§ 1. In het in 1880 verschenen werk van Prof. Helmert: *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie*, wordt de wenschelijkheid besproken, om het vereffenen van de fouten in een driehoeksnet uit te voeren volgens de methode der indirecte waarnemingen, met de geographische lengten en breedten als onbekenden.

Hierbij doet zich telkens het vraagstuk voor: uit de breedten en het lengteverschil van twee punten hun afstand en de wederkeerige azimuthen te berekenen. Voor de berekening daarvan verwijst hij (blz. 496) naar de oplossingen van dat vraagstuk op blz 157 en 313. De eerste daarvan heeft betrekking op astronomische azimuthen en op de koorde, de tweede op geodetische azimuthen en op de lengte van de geodetische lijn. Geen van beide stel formules bezit die eenvoudigheid welke voor de veelvuldige toepassingen, die voor het bovengenoemde doel daarvan gemaakt moeten worden, noodzakelijk is.

Ik heb daarin aanleiding gevonden, eene reeds vroeger begonnen studie over dat onderwerp wederom op te vatten, en wensch thans eenige van de zeer eenvoudige resultaten mede te deelen, waartoe ik gekomen ben. De gevonden

formules zijn van dien aard, dat de berekening daarmede voor alle meetbare driehoekszijden even eenvoudig is, alsof de punten op een bol gelegen waren. Ook bij grootere afstanden, waar die formules niet meer toereikend zijn, is het aanbrengen van de noodige correctiën zoo eenvoudig, dat de daarvoor noodige berekening zoo goed als nul is.

In het algemeen wil ik hier opmerken, dat de in het vervolg bedoelde azimuthen zoogenaamde astronomische azimuthen zijn, de hoeken dus tusschen de verticale doorsneden en de meridiaanvlakken, hetgeen voor het bovengenoemde doel juister is dan het gebruik van geodetische azimuthen.

In de eerste plaats wensch ik hier de formules te geven voor de berekening van de azimuthen en van de koorde en wel tot op afstanden gelijk aan het tiende gedeelte van den straal van den equator of 638 kilometer. Voor de daarop volgende formules, die betrekking hebben op de azimuthen en de directe berekening van de lengten der elliptische bogen, zal ik mij voorloopig tot korte afstanden moeten bepalen, maar die toch nog van dien aard zijn, dat daaronder alle meetbare driehoekszijden begrepen zijn. Voor grootere afstanden ben ik nog bezig met het onderzoek naar den besten vorm aan die formules te geven.

§ 2. Stellen wij ons in de eerste plaats voor, dat wij te doen hebben met een bolvormig aardoppervlak en dat wij daarop twee punten A_1 en A_2 hebben, met de geographische breedten φ_1 en φ_2 en het lengteverschil λ, dan worden de meridiaan-convergentie α', het gemiddeld azimuth A'_m en de lengte van de koorde K' gegeven door de bekende formules:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha' = sin\,\tfrac{1}{2}\,\lambda\, sin\,\varphi_m\, sec\,\tfrac{1}{2}\,\lambda\, sec\,\tfrac{1}{2}\,\beta \quad \ldots\ldots (1)$$

$$K'\,sin\,A'_m = 2\,R'\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\lambda\, cos\,\varphi_m \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$K'\,cos\,A'_m = 2\,R'\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\beta\, cos\,\tfrac{1}{2}\,\lambda \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

waarin $\varphi_m = \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)$ de gemiddelde breedte, $\beta = \varphi_2 - \varphi_1$ het breedteverschil en R' den straal van den bol voorstellen.

Neemt men voor A_2 altijd het punt met de grootste breedte, dan is β altijd positief, en voert men λ ook altijd met het positieve teeken in, dan bereikt men het voordeel dat α' en A'_m altijd positief en kleiner dan 90^0 zijn, zoo lang men op hetzelfde halfrond blijft en vergissingen met het teeken dus tot de onmogelijkheden behooren; alleen na afloop der berekening moet men op de teekens letten om de azimuthen uit A'_m en α' af te leiden.

Onderstellen wij om de gedachte te bepalen, dat de punten op het noordelijk halfrond liggen en dat men de azimuthen uit het noorden door het oosten telt, dan heeft men:

1^0. Als het punt A_2 met de *grootste breedte* het meest *oostelijke* is (fig. 1):

$$\text{Azimuth } A_1 A_2 = A'_m - \tfrac{1}{2}\alpha' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

$$\text{Azimuth } A_2 A_1 = 180^0 + A'_m + \tfrac{1}{2}\alpha' \; . \; . \; (5)$$

2^0. Als het punt A_2 met de *grootste breedte* het meest *westelijke* is (fig. 2):

$$\text{Azimuth } A_1 A_2 = 360^0 - A'_m + \tfrac{1}{2}\alpha' . \; . \; . \; (6)$$

$$\text{Azimuth } A_2 A_1 = 180^0 - A'_m - \tfrac{1}{2}\alpha' . \; . \; . \; (7)$$

§ 3. Nemen wij thans de ellipsoïd-vormige aarde en drukken de daarop betrekking hebbende grootheden door dezelfde letters als boven uit, maar zonder accenten, dan kan men de meridiaan-convergentie altijd blijven berekenen volgens de formule (1) voor den bol; zelfs bij afstanden, overeenkomende met één tiende van den straal van den equator of 638 kilometer, wordt de fout in α nog slechts 0″,00015 (Regel van Dalby, zie Helmert blz. 150). Met het gemiddeld azimuth en de koorde is het anders. Men kan echter tot op afstanden van 100.000 meter met dezelfde nauwkeurigheid als die, welke in het algemeene bij de berekening met logarithmen met *zeven* decimalen bereikt wordt, de formules (2) en (3) met eene kleine wijziging toepassen; men heeft namelijk in (2) den straal slechts te vervangen door de normaal N_m voor de ge-

middelde breedte en in (3) door den kromtestraal R_m van den meridiaan, ook voor de gemiddelde breedte; dus:

$$K \sin A_m = 2\, N_m \sin \tfrac{1}{2}\, \lambda \cos \varphi_m \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (8)$$

$$K \cos A_m = 2\, R_m \sin \tfrac{1}{2}\, \beta \cos \tfrac{1}{2}\, \lambda . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (9)$$

Heeft men A_m en α berekend, dan worden de azimuthen wederom gevonden uit form. (4) en (5) of (6) en (7).

Bovenstaande formules (8) en (9) zijn benaderingsformules; de juiste formules vindt men door ieder van die formules te vermenigvuldigen met een factor, die op grootheden van de vierde orde na gelijk zijn aan de eenheid, waarbij de excentriciteit als eene grootheid van de eerste orde beschouwd wordt *).

Voor zooverre betreft de termen, die afhangen van het vierkant van den afstand, zijn deze factoren:

$$1 + \tfrac{1}{8}\, \beta^2 e^2 \frac{1 - 4 \sin^2 \varphi_m + 2\, e^2 \sin^2 \varphi_m + e^2 \sin^4 \varphi_m}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^2} -$$
$$- \tfrac{1}{8}\, \lambda^2 \left(\frac{e^2}{1 - e^2}\right)^2 \cos^6 \varphi_m \cos^2 A_m \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (10)$$

$$1 + \tfrac{1}{8}\, \beta^2 e^2 \frac{1 - 2 \sin^2 \varphi_m + 4\, e^2 \sin^2 \varphi_m - 3\, e^2 \sin^4 \varphi_m}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^2} -$$
$$- \tfrac{1}{4}\, \lambda^2 \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^4 \varphi_m - \tfrac{1}{8}\, \lambda^2 \left(\frac{e^2}{1 - e^2}\right)^2 \cos^6 \varphi_m \cos^2 A_m \, . \, . \quad (11)$$

Let men op deze termen, dan vindt men voor de fout in A_m berekend uit (8) en (9):

---

*) In de recensie van bovengenoemd werk van HELMERT, voorkomende in Heft 3, 1881 van het *Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft* en overgenomen op blz. 359 van het *Zeitschrift für Vermessungswesen* 1881, staat bij vergissing dat HELMERT e^2 als grootheid van de eerste orde beschouwt. In overeenstemming met HELMERT neem ik e als grootheid van de eerste orde, hetgeen voor groote afstanden het meest doelmatige is.

$$\left\{ \tfrac{1}{4}\beta^2 e^2 \frac{1+e^2-2e^2 sin^2\varphi_m}{(1-e^2\, sin^2\, \varphi_m)^2} sin^2\varphi_m - \tfrac{1}{4}\lambda^2 \frac{e^2}{1-e^2} cos^4\varphi_m \right\} sin A_m cos A_m \,..\, (12)$$

of, als men λ en β uitdrukt door K, namelijk:

$$\lambda\, cos\, \varphi_m = \frac{K}{N_m} sin\, A_m \,..........(13)$$

$$\beta = \frac{K}{R_m} cos\, A_m = \frac{K}{N_m} cos\, A_m \frac{1-e^2\, sin^2\, \varphi_m}{1-e^2} \,...\, (14)$$

dan gaat de uitdrukking voor die fout over in:

$$\tfrac{1}{4} \frac{e^2}{(1-e^2)^2} \frac{K^2}{N_m^2} \Big[(1 + e^2 - 2\, e^2\, sin^2\, \varphi_m)\, sin^2\, \varphi_m\, cos^2\, A_m -$$

$$- (1-e^2)\, cos^2\, \varphi_m\, sin^2\, A_m\Big]\, sin\, A_m\, cos\, A_m \,......\, (15)$$

Deze uitdrukking wordt nul voor $A_m = 0$, voor $A_m = 90^0$ en voor A_m ongeveer gelijk aan φ_m; daartusschen liggen een positief en een negatief maximum. De allergrootste waarden verkrijgt die uitdrukking voor $\varphi_m = 0$, $A_m = 60^0$ en voor $\varphi_m = 90^0$, $A_m = 30^0$ en wel:

$$-\frac{3\sqrt{3}}{64} \frac{e^2}{1-e^2} \frac{K^2}{a^2} \text{ en } + \frac{3\sqrt{3}}{64} e^2 \frac{K^2}{a^2}.$$

Nemen wij $K = 100000$ meter, dan worden deze maximum-waarden respectievelijk:

$$- 0'',0277 \text{ en } + 0'',0275.$$

Bij de berekening met logarithmen wordt A_m gevonden uit de *log tg*; ééne fout daarin heeft op de juiste waarde van den hoek den grootsten invloed bij een hoek van 45^0 en wel komt daarbij eene fout van ééne eenheid van de zevende decimaal overeen met eene fout in den hoek van

$$0'',0237,$$

zoodat dus bovenstaande maximum-fout in den hoek volgens

form. (8) en (9) overeenkomt met eene fout, die iets grooter is dan ééne eenheid van de zevende decimaal in de logarithme.

Uit (10) en (11) volgt verder voor de fout in K:

$$K\left[\tfrac{1}{8}\lambda^2\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \cos^6\varphi_m \cos^2 A_m + \tfrac{1}{4}\lambda^2 \frac{e^2}{1-e^2}\cos^4\varphi_m \cos^2 A_m -\right.$$

$$-\tfrac{1}{8}\beta^2 e^2 \frac{1-4\sin^2\varphi_m + 2e^2\sin^2\varphi_m + e^2\sin^4\varphi_m}{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2}\sin^2 A_m -$$

$$\left.-\tfrac{1}{8}\beta^2 e^2 \frac{1-2\sin^2\varphi_m + 4e^2\sin^2\varphi_m - 3e^2\sin^4\varphi_m}{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2}.\cos^2 A_m\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\frac{e^2}{(1-e^2)^2}\frac{K^3}{N_m^2}\Big[(1+2\sin^2\varphi_m)(1-e^2)\cos^2 A_m -$$

$$-(2-e^2+2e^2\sin^2\varphi_m - 3e^2\sin^4\varphi_m)\cos^4 A_m\Big] \quad . . . (16)$$

De afgeleide van deze uitdrukking ten opzichte van A_m wordt nul voor $A_m = 0$, $A_m = 90^0$ en voor A_m bepaald door de vergelijking:

$$\cos^2 A_m = \frac{(1+2\sin^2\varphi_m)(1-e^2)}{2(2-e^2+2e^2\sin^2\varphi_m - 3e^2\sin^4\varphi_m)} \quad ..(17)$$

Voor $A_m = 90^0$ wordt de uitdrukking (16) altijd nul: voor $A_m = 0$ wordt zij:

$$-\frac{1}{8}\frac{e^2}{(1-e^2)^2}\frac{K^3}{N_m^2}(1-2\sin^2\varphi_m + 4e^2\sin^2\varphi_m - 3e^2\sin^4\varphi_m)$$

en voor A_m gegeven door formule (17):

$$\frac{1}{32}e^2\frac{K^3}{N_m^2}\frac{(1+2\sin^2\varphi_m)^2}{2-e^2+2e^2\sin^2\varphi_m - 3e^2\sin^4\varphi_m}.$$

Deze twee uitdrukkingen verkrijgen hare uiterste waarden voor $\varphi_m = 0$ en $\varphi_m = 90^0$, namelijk:

$$-\frac{1}{8}\frac{e^2}{(1-e^2)^2}\frac{K^3}{a^2},$$

$$+ \frac{1}{8} e^2 \frac{K^3}{a^2},$$

$$\frac{1}{32} \frac{e^2}{2-e^2} \frac{K^3}{a^2}$$

en

$$\frac{9}{64} e^2 \frac{K^3}{a^2};$$

de laatste van deze uitdrukkingen is de grootste, zoodat dus de grootste fout in de koorde, berekend uit de formules (8) en (9), uitgedrukt wordt door:

$$\frac{9}{64} e^2 \frac{K^3}{a^2}$$

welke waarde voor $K = 100000$ meter gelijk is aan 23 millimeter, juist overeenkomende met eene eenheid van de 7e decimaal der logarithme.

Het blijkt dus dat de fouten in A_m en in K berekend uit de formules (8) en (9) tot op afstanden van *honderd duizend* meter, slechts opklimmen tot een bedrag, dat ongeveer gelijk staat met de fout, die kan ontstaan bij het werken met logarithmen met 7 decimalen. Die fouten zijn ook van dien aard, dat zij nog belangrijk kleiner zijn dan de fouten, die bij de meting te vreezen zijn; zoodat die formules voor alle meetbare driehoekszijden (met uitzondering van eenige buitengewoon lange zijden, die maar uiterst zelden voorkomen) gerust kunnen worden toegepast.

De hierboven ontwikkelde grootste waarden, die de fouten kunnen bereiken, hebben plaats bij de breedten $\varphi_m = 0$ of $\varphi_m = 90^0$, voor andere breedten kunnen die maximum-fouten nog veel kleiner zijn. Om daarvan een overzicht te geven volgt hieronder een lijstje van de maximum-waarden der fouten bij verschillende breedten van 5 tot 5 graden, berekend uit de formules (15) en (16) voor een afstand van 100000 meter.

φ_m	Maximum-fout in	
	A_m	K
	secunden.	millimeters.
0°	0,028	21
5°	0,027	20
10°	0,026	19
15°	0,025	18
20°	0,023	16
25°	0,021	13
30°	0,019	10
35°	0,016	7
40°	0,013	9
45°	0,011	10
50°	0,013	12
55°	0,016	14
60°	0,019	16
65°	0,021	18
70°	0,023	20
75°	0,025	21
80°	0,026	22
85°	0,027	23
90°	0,028	23

§ 4. Wil men bij afstanden zooals de hiervoor bedoelden eene grootere nauwkeurigheid bereiken of de berekening

voor grootere afstanden uitvoeren, dan moet men de verwaarloosde termen in rekening brengen. Dit geschiedt het gemakkelijkst door bij de berekening aan de logarithmen zekere correctiën voor te brengen; men kan de formules dan als volgt schrijven:

$$K \sin A_m = 2\, N_m \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m \,.\, q_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (18)$$

$$K \cos A_m = 2\, R_m \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda \,.\, q_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (19)$$

waarin tot op grootheden van de 6[de] orde na:

$$\log q_1 = -\,[1] \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \varphi_m + \tfrac{1}{2}\,[1] \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \cos 2 \varphi_m \quad .\,. \quad (20)$$

$$\log q_2 = -\,[1] \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^4 \varphi_m + \tfrac{1}{2}\,[1] \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \cos 2 \varphi_m \quad .\,. \quad (21)$$

$$[1] = M \frac{e^2}{1 - e^2} 10^7 \qquad \log [1] = 4{,}465 \qquad \log \tfrac{1}{2} [1] = 4{,}164.$$

De hierin voorkomende constante [1] is zoodanig bepaald, dat de correctiën worden gevonden in deelen van de zevende decimaal als eenheid.

Is het alleen te doen om de azimuthen, niet om de lengte der koorde, dan kan men de twee termen met $\cos 2\,\varphi_m$ weglaten, die op het gemiddeld azimuth geen invloed hebben.

Voor nog grootere afstanden, tot afstanden gelijk aan één tiende van den straal des equators of 638 kilometer, kan men nog zeer gemakkelijk de termen van de zesde orde in rekening brengen. Het verdient alsdan aanbeveling de correctie-termen in twee groepen te verdeelen: eene, waarin de termen voorkomen die invloed hebben op het gemiddeld azimuth en eene tweede, die de termen bevat, welke alleen invloed hebben op de lengte der koorde. Deze laatste correctie-termen worden dan eerst aangebracht nadat het azimuth berekend is; dit is vooral ook daarom noodzakelijk, omdat een van deze termen direct afhangt van het azimuth en dus moeielijk vooraf berekend kan worden.

De formules zal men in dit geval het best als volgt schrijven:

$$K_0 \sin A_m = 2\, N_m \sin \tfrac{1}{2}\lambda \cos \varphi_m \,.\, q_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (22)$$

$$K_0 \cos A_m = 2\, R_m \sin \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\lambda \,.\, q_2 \,.\,.\,.\,.\quad (23)$$

$$K = K_0\, q_3 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (24)$$

waarin:

$$\log q_1 = -[1] \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2\varphi_m - [1] \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2\varphi_m \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \cos^2 \tfrac{1}{2}\lambda - $$
$$- [1] \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \varphi_m \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^2 \varphi_m \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (25)$$

$$\log q_2 = -[1] \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^4\varphi_m - [1] \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^4\varphi_m \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^2\varphi_m + $$
$$+ [1] \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \varphi_m \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^2 \varphi_m \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (26)$$

$$\log q_3 = +\tfrac{1}{2}[1] \frac{R_m}{N_m} \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \cos 2\varphi_m + [1] \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2\varphi_m\, [2] \cos^2\varphi_m - $$
$$- [1] \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^4 \varphi_m\, [3] \cos^2 \varphi_m \cos^2 A_m \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,,\,.\quad (27)$$

Drukt men de correctiën uit in deelen van de 10[de] decimaal als eenheid, dan hebben de constanten de volgende waarden:

$[1] = M \dfrac{e^2}{1-e^2}\, 10^{10}$ $\quad \log[1] = 7{,}46510 \quad \log \tfrac{1}{2}[1] = 7{,}16407$

$[2] = \dfrac{5}{2} e^2$ $\quad \log[2] = 8{,}222\text{-}10$

$[3] = \tfrac{1}{2} \dfrac{e^2}{1-e^2}$ $\quad \log[3] = 7{,}526\text{-}10$

De bij de laatste formules verwaarloosde termen van de 8[ste] orde zijn van dien aard, dat zij bij een afstand van 638 kilometer alleen invloed hebben op de 11[de] decimaal van de logarithmen; al die termen te samen genomen kunnen de 10[de] decimaal wellicht een of twee eenheden fout maken, zoodat men de azimuthen bij genoemden grootsten afstand altijd nog tot in 4 decimalen van de secunde nauwkeurig vindt, terwijl in de lengte der koorde hoogstens eene fout van $\frac{1}{2}$ millimeter kan optreden.

De correctie-termen (20) en (21) en (25)—(28) mogen eenigszins samengesteld voorkomen, voor de berekening zijn zij dit niet, als men in aanmerking neemt, dat men er volstrekt niets anders voor behoeft op te zoeken dan de *log cos* $2\,\varphi_m$; al de vorige grootheden zijn bij de hoofdberekening, die geheel met de spherische berekening overeenkomt, reeds opgezocht.

Het duidelijkst blijkt dit uit de hierachter volgende voorbeelden, waarin de grootheden, die uit het vroegere gedeelte der berekening worden overgenomen, door kleine letters zijn aangewezen.

§ 5. Als toepassing nemen wij de twee voorbeelden, die in het werk van Helmert voorkomen en in de eerste plaats het tweede voorbeeld op blz. 164—166. De lengte der koorde is daarbij ongeveer 120000 meter zoodat de fouten bij de berekening volgens form. (8) en (9) grooter kunnen zijn dan de hiervoor berekende en wel voor het azimuth in reden van 1 tot $1{,}2^2 = 1{,}44$ en voor de koorde in reden van 1 tot $1{,}2^3 = 1{,}728$. Wij geven eerst de berekening volgens form. (7), (8) en (9), dus zonder eenige correctie, en rekenen met 8 decimalen, daar bij zeven decimalen de fouten van de formules door die van de logarithmen bedekt zouden worden.

$\varphi_2 = 57^0$ $\qquad \lambda = 1^0 22' 6'',03270$

$\varphi_1 = 56^0 13' 49'',02186$ $\qquad \frac{1}{2}\lambda = 41' 3'',01635$

$\varphi_m = 56^0 36' 54'',51093$ $\qquad \frac{1}{2}\beta = 23' 5'',48907$

$$\begin{aligned}
\log \sin \tfrac{1}{2}\lambda &= 8{,}0770318.4\\
\log \sin \varphi_m &= 9{,}9216830.0\\
\log \sec \tfrac{1}{2}\lambda &= 309.6\\
\log \sec \tfrac{1}{2}\beta &= 98.0\\
\log tg\, \tfrac{1}{2}\alpha &= 7{,}9987556.0\\
\tfrac{1}{2}\alpha &= 34'16'',678
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}3010300.0\\
\log N_m &= 6{,}8056563.1\\
\log \sin \tfrac{1}{2}\lambda &= 8{,}0770318.4\\
\log \cos \varphi_m &= 9{,}7405680.1\\
\hline
\log K \sin A_m &= 4{,}9242861.6\\
\log \sin A_m &= 9{,}8451112.1\\
\hline
\log K &= 5{,}0791749.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}3010300.0\\
\log R_m &= 6{,}8047736.4\\
\log \sin \tfrac{1}{2}\beta &= 7{,}8271747.0\\
\log \cos \tfrac{1}{2}\lambda &= 9{,}9999690.4\\
\hline
\log K \cos A_m &= 4{,}9329473.8\\
\log \cos A_m &= 9{,}8537724.3\\
\hline
\log K &= 5{,}0791749.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log K \sin A_m &= 4{,}9242861.6\\
\log K \cos A_m &= 4{,}9329473.8\\
\hline
\log tg\, A_m &= 9{,}9913387.8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_m &= 44^0 25' 43'',348\\
\tfrac{1}{2}\alpha &= 34' 16'',678\\
\hline
180^0 - A_m - \tfrac{1}{2}\alpha &= 134^0 59' 59'',974\\
360^0 - A_m + \tfrac{1}{2}\alpha &= 316^0\ 8' 33'',330\\
K &= 119998{,}262
\end{aligned}$$

HELMERT vindt voor dit voorbeeld, voor de azimuthen:

$$314^0 59' 59'',988$$
$$136^0\ 8' 33'',344$$

en voor de koorde:

$$\log K = 5{,}0791748.5$$

of:

$$K = 119998{,}234 \text{ Meter.}$$

De formules (8) en (9) geven dus hier in de azimuthen

eene fout van 0",014 en in de koorde eene fout van ééne eenheid van de zevende decimaal of 28 millimeter.

Zie hier thans hetzelfde voorbeeld met de termen van de vierde orde er bij:

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &= 57^0 \\
\varphi_1 &= 56^0 13' 49'',02186 \\
\hline
\varphi_m &= 56^0 36' 54'',51093
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\lambda &= 1^0 22' 6'',03270 \\
\tfrac{1}{2}\lambda &= 41' 3'',01635 \\
\tfrac{1}{2}\beta &= 23' 5'',48907
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log \sin \tfrac{1}{2}\lambda &= 8,0770318.4 \\
\log \sin \varphi_m &= 9,9216830.0 = a \\
\log \sec \tfrac{1}{2}\lambda &= 309.6 \\
\log \sec \tfrac{1}{2}\beta &= 98.0 \\
\hline
\log tg\ \tfrac{1}{2}\alpha &= 7,9987556.0 \\
\tfrac{1}{2}\alpha &= 34' 16'',678
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log 2 &= 0,3010300.0 \\
\log N_m &= 6,8056563.1 \\
\log \sin \tfrac{1}{2}\lambda &= 8,0770318.4 = b \\
\log \cos \varphi_m &= 9,7405680.1 = c \\
-c_1 &= -92 \\
+c_2 &= -26 \\
\hline
\log K \sin A_m &= 4,9242860.4 \\
\log \sin A_m &= 9,8451111.8 \\
\hline
\log K &= 5,0791748.6
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\log\ [1] &= 4,465 \\
2\ d &= 5,654 \\
2\ a &= 9,843 \\
\hline
\log c_1 &= 9,962 \\
\\
\\
\log \tfrac{1}{2}[1] &= 4,164 \\
2\ d &= 5,654 \\
\log \cos 2\varphi_m &= 9,596_n \\
\hline
\log c_2 &= 9,414_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log 2 &= 0,3010300.0 \\
\log R_m &= 6,8047736.4 \\
\log \sin \tfrac{1}{2}\beta &= 7,8271747.0 = d \\
\log \cos \tfrac{1}{2}\lambda &= 9,9999690.4 \\
-c_3 &= -38 \\
+c_2 &= -26 \\
\hline
\log K \cos A_m &= 4,9329473.2 \\
\log \cos A_m &= 9,8537724.6 \\
\hline
\log K &= 5,0791748.6
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\log\ [1] &= 4,465 \\
2\ b &= 6,154 \\
4\ c &= 8,962 \\
\hline
\log c_3 &= 9,581
\end{aligned}
$$

$$\log K \sin A_m = 4{,}9242860.4$$
$$\log K \cos A_m = 4{,}9329473.2$$
$$\log tg\ A_m = 9{,}9913387.2$$

$$A_m = 44^0 25' 43'',333$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha = 34' 16'',678$$
$$180^0 - A_m - \tfrac{1}{2}\alpha = 134^0 59' 59'',989$$
$$360^0 - A_m + \tfrac{1}{2}\alpha = 316^0\ 8' 33'',345$$

$$K = 119998{,}237.$$

De hier verkregen uitkomsten verschillen met die van HELMERT slechts 0",001 voor de azimuthen en 3 millimeter voor de koorde. Zij stemmen met die uitkomsten zoo goed overeen als met logarithmen met acht decimalen mogelijk is; want in de *log K* is slechts een verschil van ééne eenheid van de 8ste decimaal en indien men de $\log tg\ A_m$ in de achtste decimaal met eene eenheid vermeerdert, vindt men in de azimuthen eveneens eene afwijking van 0",001, maar in tegengestelden zin.

Nemen wij thans het eerste voorbeeld van HELMERT (blz. 158—164) brengen wij de termen van de zesde orde in rekening en rekenen wij met 10 decimalen.

Koningsbergen	$\varphi_2 = 54^0\ 42'\ 50'',6$	$\lambda = 7^0\ 6'\ 0''$
Berlijn	$\varphi_1 = 52^0\ 30'\ 16'',7$	$\tfrac{1}{2}\lambda = 3^0\ 33'\ 0''$
	$\varphi_m = 53^0\ 36'\ 33'',65$	$\tfrac{1}{2}\beta = 1^0\ 6'\ 16'',95$

$$\log \sin \tfrac{1}{2}\lambda = 8{,}7918278131$$
$$\log \sin \varphi_m = 9{,}9057908074 \quad = a$$
$$\log \sec \tfrac{1}{2}\lambda = 8341494$$
$$\log \sec \tfrac{1}{2}\beta = 807294$$
$$\log tg\ \tfrac{1}{2}\alpha = 8{,}6985334993$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 2^0 51' 34'',32410$$

$\log \sin \frac{1}{2} \lambda = 8{,}7918278131$
$\log \cos \varphi_m = 9{,}7732652484 \quad = b$
$\qquad 8{,}5650930615 \quad = c$
$\log N_m = 6{,}8055846752 \quad = d$
$\log 2 = 0{,}3010299957$
$- c_1 = \quad -7028.8$
$- c_2 = \quad -2.6$
$- c_3 = \quad -9.5$
$\log K_0 \sin A_m = 5{,}6717070283$
$\log \sin A_m = 9{,}9475723000$
$\log K_0 = 5{,}7241347283$

$\log \sin \frac{1}{2} \beta = 8{,}2850980893 \quad = e$
$\log \cos \frac{1}{2} \lambda = 9{,}9991658506$
$\qquad 8{,}2842639399 \quad = f$
$\log R_m = 6{,}8045587386 \quad = g$
$\log 2 = 0{,}3010299957$
$- c_4 = \quad -13861.8$
$- c_5 = \quad -18.7$
$+ c_3 = \quad +9.5$
$\log K_0 \cos A_m = 5{,}3898512871$
$\log \cos A_m = 9{,}6657165588 \quad = h$

$\log K_0 = 5{,}7241347283$
$+ c_6 = \quad -1601.6$
$+ c_7 = \quad +41.3$
$- c_8 = \quad -3.5$
$\log K = 5{,}7241345719$

$\log K_0 \sin A_m = 5{,}6717070283$
$\log K_0 \cos A_m = 5{,}3898512871$
$\log tg\, A_m = 0{,}2818557412$

$\log [1] = 7{,}46510$
$2e = 6{,}57020$
$2a = 9{,}81158$
$\log c_1 = 3{,}84688$
$2f = 6{,}569$
$2c = 7{,}130$
$\log c_2 = 0{,}416$
$\log c_3 = 0{,}977$

$\log [1] = 7{,}46510$
$2c = 7{,}13019$
$2b = 9{,}54653$
$\log c_4 = 4{,}14182$
$2c = 7{,}130$
$\log c_5 = 1{,}272$

$\log \frac{1}{2} [1] = 7{,}16407$
$2e = 6{,}57020$
$\log \cos 2\varphi_m = 9{,}47132_n$
$g - d = \quad -103$
$\log c_6 = 3{,}20456_n$

$\log [2] = 8{,}222$
$\log c_1 = 3{,}847$
$2b = 9{,}547$
$\log c_7 = 1{,}616$

$\log [3] = 7{,}526$
$\log c_4 = 4{,}142$
$2b = 9{,}547$
$2h = 9{,}331$
$\log c_8 = 0{,}546$

$A_m = 62^0 24' 35'',25647$
$\frac{1}{2} \alpha = 2^0 51' 34'',32410$

$A_m - \frac{1}{2}\alpha = 59^0 33' \; 0'',9324$ Azimuth Berl. Koningsb.
$180^0 + A_m + \frac{1}{2}\alpha = 245^0 16' \; 9'',5806$ Azimuth Koningsb. Berl.

$K = 529827{,}593$ Koorde Koningsb. Berlijn.

De hier gevonden resultaten stemmen volkomen overeen met die van de eerste berekening van HELMERT (blz. 158—162). Wel vertoont de logarihme van de koorde een verschil van 6 eenheden van de laatste decimaal (HELMERT vindt voor de drie laatste cijfers 725) maar dit verschil heeft alleen invloed op de *onderdeelen van de millimeters.* Tot in onderdeelen van millimeters uitgerekend, geeft onze berekening . . . . 592,54 millimeter; die van HELMERT . . . . 593,27 millimeter; dus een verschil van 0,73 millimeter. Waaraan dit verschil moet worden toegeschreven, aan het verwaarloozen van termen van hoogere orde of aan de fouten in de logarithmentafel van VEGA: Thesaurus logarithmorum completus (zie BREMIKER's Logarithmentafel van VEGA met 7 decimalen, Vorwort, blz. VIII, en HELMERT's noot op blz. 41) kan ik op dit oogenblik niet beslissen, maar is praktisch voor de hier bedoelde afstanden van weinig belang.

HELMERT geeft nog eene tweede berekening van de azimuthen, die van de eerste en dus ook van de onze 0",0001 afwijkt, daarbij zijn echter de termen van de zesde orde, die zich *toevallig compenseeren* (blz. 162), verwaarloosd.

Dat zich toevallig compenseeren van de termen van de zesde orde heeft bij onze berekening ook plaats; zonder de termen van de zesde orde vinden wij voor de onderdeelen van de secunden van A_m ",25650; waaruit volkomen dezelfde waarden voor de azimuthen volgen; op deze compensatie valt echter niet altijd te rekenen.

Voor de koorde geeft HELMERT nog twee andere berekeningen, die met de eerste twee eenheden van de tiende decimaal verschillen: de eene in positieven, de andere in negatieven zin; met onze uitkomst verschillen zij dus 4 en 8 eenheden van de tiende decimaal of 0,48 en 0,97 millimeter. Bij de twee laatste berekeningen zijn afzonderlijk de termen van de zesde orde in rekening gebracht, waarvan de invloed nog 44 resp. 41 eenheden van de 10de decimaal of 5,4 resp. 5,0 millimeter bedragen. Laten wij bij onze berekening de termen van de zesde orde geheel weg, dan vinden wij in de logarithme een verschil van 25 eenheden van de 10de decimaal overeenkomende met 3,0 millimeter.

Bij het vergelijken van de hier gegevene berekening met die van HELMERT, dient men wel in het oog te houden, dat HELMERT niet de volledige berekening gegeven heeft, zooals wij hierboven gedaan hebben; van vele termen, vooral van de correctie-termen van hoogere orde, waarvan de berekening soms omslagtig is, geeft hij alleen het resultaat. Om eene zuivere vergelijking te maken, moet men de berekening volledig opschrijven en dan eerst zal men het verschil kunnen beoordeelen. Bij eene oppervlakkige beschouwing zal men echter reeds zien, dat de voorafgaande spherische berekening van HELMERT, op de twee grootheden N_m en R_m na, geheel overeenkomt met onze hoofdberekening, dat alle correctietermen hier gemakkelijk gevonden worden en er volstrekt geene hulpgrootheden noodig zijn, zooals er bij HELMERT zoovele voorkomen, zelfs bij de kleine afstanden.

§ 6. Gaan wij thans over tot de berekening van de azimuthen en van den afstand van de punten langs het aardoppervlak gemeten. De berekening van de halve meridiaanconvergentie kunnen wij hier achterwege laten, omdat die altijd volgens formule (1) kan geschieden.

Onderstellen wij wederom een bolvormig aardoppervlak en stellen den afstand der punten in lengtemaat door S', in hoekmaat door s' voor, dan heeft men:

$$\sin \tfrac{1}{2} s' \sin A'_m = \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} s' \cos A'_m = \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

$$S' = R' s' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Voor de ellipsoïde kan men nu voor alle meetbare driehoekszijden, met eene nauwkeurigheid overeenkomende met die, welke bij eene berekening met logarithmen met 7 decimalen bereikbaar is, stellen:

$$\sin \tfrac{1}{2} s \sin A_m = \frac{N_m}{R} \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} s \cos A_m = \frac{R_m}{R} \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

$$S = R s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Waarin R eene functie van φ_m is, waarover men naar willekeur kan beschikken en die men zoodanig zal kiezen, dat de berekening eenvoudig en de fout in S zoo klein mogelijk wordt.

De twee vergelijkingen (28) en (29) geven door deeling dezelfde waarde voor $tg\ A_m$ als (8) en (9), zoodat de nauwkeurigheid, waarmede A_m gevonden wordt, dezelfde is als die, welke wij in § 3 hebben nagegaan.

De fout in S is afhankelijk van de waarde, die men aan R geeft. Die fout is, voor zooverre zij afhangt van de termen van de derde macht van den afstand:

$$S\Big[\tfrac{1}{4} \lambda^2 \frac{e^2}{1-e^2} \cos^4 \varphi_m \cos^2 A_m -$$

$$- \tfrac{1}{8} \beta^2 e^2 \frac{1 - 4 \sin^2 \varphi_m + 2 e^2 \sin^2 \varphi_m + e^2 \sin^4 \varphi_m}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^2} \sin^2 A_m -$$

$$- \tfrac{1}{8} \beta^2 e^2 \frac{1 - 2 \sin^2 \varphi_m + 4 e^2 \sin^2 \varphi_m - 3 e^2 \sin^4 \varphi_m}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^2} \cos^2 A_m +$$

$$+ \tfrac{1}{8} \lambda^2 \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \cos^6 \varphi_m \cos^2 A_m + \tfrac{1}{24} \beta^2 \left(\frac{R^2_m}{R^2} - 1\right) + \tfrac{1}{24} \lambda^2 \cos^2 \varphi_m \left(\frac{N_m^2}{R^2} - 1\right)\Big] =$$

$$= \frac{1}{24} \frac{e^2}{(1-e^2)^2} \frac{S^3}{N_m^2} \Big[\frac{(1-e^2)^2}{e^2} \left(\frac{N_m^2}{R^2} - 1\right) + (1 + 8 \sin^2 \varphi_m)(1 - e^2) \cos^2 A_m -$$

$$- (6 - 2 e^2 + 4 e^2 \sin^2 \varphi_m - 8 e^2 \sin^4 \varphi_m) \cos^4 A_m\Big] \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

Daar de willekeurige functie R niet voorkomt in het periodisch gedeelte der fout, zoo kan men door de keuze van die functie de maximum-waarde van de fout alleen terugbrengen tot de helft van de amplitude van het veranderlijke gedeelte. Deze waarde is voor $S = 100000$ meter, in kolom 2 van de hier volgende tabel opgenomen, uitgedrukt in millimeters.

De waarden voor R, die voor de berekening het gemakkelijkst zijn, zijn $R = R_m$ en $R = N_m$; de kolommen 3 en 4 bevatten de maximum-fouten, die alsdan in S voor een afstand van 100000 meter overblijven. Het blijkt daaruit dat voor breedten, kleiner dan 35° à 40°, de waarde $R = R_m$, voor grootere breedten de waarde $R = N_m$ de meest voordeelige is. Men zou ook de gemiddelde straal $\sqrt{R_m N_m}$ kunnen bezigen, maar deze geeft alleen voor breedten van 35° à 40° een zeer klein voordeel boven de bovengenoemde waarden. Een constante waarde voor R te nemen geeft alleen eenig voordeel bij groote breedten en dan is de waarde $\frac{a}{1 - e^2}$ aan te bevelen, zooals uit kol. 5 blijkt.

Wilde men de maximum-fout overal tot het minimum van kol. 2 terugbrengen, dan zou men voor R, voor iedere breedte, eene andere waarde moeten nemen of daarvoor eene ingewikkelde functie van φ_m moeten kiezen, hetgeen niet aan te bevelen is; eensdeels omdat daardoor de maximum-fout maar weinig verminderd kan worden, anderdeels, omdat het daardoor toch niet mogelijk is de nauwkeurigheid van A_m te verhoogen. Men doet dan veel beter met in de berekening eenvoudige correctie-termen op te nemen, waardoor de waarden van A_m en S gelijktijdig met eene veel grootere nauwkeurigheid gevonden worden.

Uit de cijfers, in onderstaande tabel vervat, blijkt echter, dat men voor de daarin opgenomen waarden van R, namelijk: R_m, N_m en $\frac{a}{1 - e^2}$, zelfs voor afstanden van 100000 meter eene nauwkeurigheid bereikt, die gelijkstaat met de nauwkeurigheid, die met logarithmen met 7 decimalen bereikbaar is.

φ_m	Halve amplitude van de fout.	Maximumfout voor		
		$R = R_m$	$R = N_m$	$R = \frac{a}{1-e^2}$
	millimeters.	millimeters.	millimeters.	millimeters.
0°	17	**21**	35	48
5°	17	**20**	34	48
10°	17	**19**	33	46
15°	16	**18**	31	44
20°	15	**16**	28	41
25°	13	**13**	25	37
30°	12	**13**	21	33
35°	10	**13**	16	28
40°	9	13	**12**	23
45°	7	14	**7**	17
50°	6	15	**9**	12
55°	6	16	**12**	**9**
60°	7	18	**14**	**9**
65°	8	19	**17**	**8**
70°	9	20	**19**	**11**
75°	10	22	**21**	**13**
80°	11	23	**22**	**15**
85°	12	23	**23**	**16**
90°	12	23	**23**	**16**

§ 7. Wil men bij afstanden zooals de hiervoor bedoelden eene grootere nauwkeurigheid bereiken of de berekening op grootere afstanden toepassen, dan dient men de verwaarloosde

correctie-termen in rekening te brengen. De beste vorm, alsdan aan de vergelijkingen te geven, voor een later onderzoek overlatende, zullen wij ons hier er toe bepalen, die correctiën onder een anderen vorm in rekening te brengen, die voor niet al te groote afstanden zeer doelmatig is.

Bij de oplossing van dit vraagstuk, ook bij een bolvormig oppervlak, is het, bij niet al te groote afstanden, dienstig de formules in reeksen te ontwikkelen, zoodat men niet de sinussen van de kleine hoeken in rekening te brengen heeft, maar die hoeken zelven uitgedrukt in secunden.

Bij een bolvormig aardoppervlak kan men alsdan schrijven:

$$log\, \alpha' = log\,(\lambda\, sin\, \varphi_m\, sec\, \tfrac{1}{2}\beta) + [1]\, \lambda^2 cos^2 \varphi_m\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$$log(S' sin A'_m) = log\,(R' bg 1'' \lambda\, cos\, \varphi_m) - [2]\lambda^2 sin^2 \varphi_m + [3]\beta^2, \, . \, . \, (36)$$

$$log(S' cos A'_m) = log\,(R' bg 1'' \beta\, cos\, \tfrac{1}{2}\lambda) + [4]\lambda^2 cos^2 \varphi_m\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

waarin α', β en λ in secunden uitgedrukt zijn en de constanten de volgende waarden hebben, als de correctiën uitgedrukt worden in deelen van de 7[de] decimaal als eenheid:

$$[1] = \frac{M}{12} bg^2 1'' \qquad log[1] = 4{,}92975 - 10$$

$$[2] = [3] = [4] = \frac{M}{24} bg^2 1'' \qquad log[2] = 4{,}62872 - 10.$$

Past men deze zelfde ontwikkeling toe op de formules (31)—(33), dan heeft men in (36) en (37) alleen de R' te vervangen door N_m resp. R_m. Bij de berekening onder dezen vorm kan men echter de correctie-termen van de orde $e^2 s^2$ gemakkelijk in rekening brengen, door in plaats van de constanten [3] en [4] waarden te bezigen, die langzaam met φ_m veranderen en waarvan men gemakkelijk vooraf een tabelletje kan opmaken, en een kleinen correctie-term aan te brengen, die afhangt van $cos\, 2\varphi_m$, dezelfde, die ook in de formules (20) en (21) voorkomt.

Het eerste geeft dus geen meerderen arbeid dan bij de sphe-rische berekening, alleen de laatste correctie-term moet af-

zonderlijk berekend worden, maar daarvoor zijn logarithmen met drie decimalen voldoende. Komt het alleen aan op het berekenen van het azimuth, niet op het volkomen nauwkeurig berekenen van den afstand, dan kan die term zelfs achterwege blijven, daar hij geen invloed heeft op het azimuth.

De formules (36) en (37) kan men dan als volgt schrijven:

$$log\, S \sin A_m = log\,(N_m\, bg\, 1''\, \lambda \cos \varphi_m) - [2]\,\lambda^2 \sin^2 \varphi_m + [3]\,\beta^2 + \\ + [5]\,\beta^2 \cos 2\,\varphi_m\,, \quad \ldots \quad (38)$$

$$log\, S \cos A_m = log\,(R_m\, bg\, 1''\, \beta \cos \tfrac{1}{2}\lambda) + [4]\,\lambda^2 \cos^2 \varphi_m + \\ + [5]\,\beta^2 \cos 2\,\varphi_m\,, \quad \ldots \quad (39)$$

waarin:

$$\left.\begin{array}{ll} [2] = \frac{M}{24}\, 10^7\, bg^2\, 1'' & log\,[2] = 4{,}62872-10 \\ [3] = \frac{M}{24}\, 10^7\, bg^2\, 1''\left(1-6\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\varphi_m\right) & \\ [4] = \frac{M}{24}\, 10^7\, bg^2\, 1''\left(1-6\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_m\right) & \\ [5] = \frac{M}{8}\, 10^7 \frac{e^2}{1-e^2}\, bg^2\, 1'' & log\,[5] = 2{,}933-10 \end{array}\right\} \ldots (40)$$

De formule (35) kan om vroeger vermelde redenen (zie § 3) onveranderd blijven *). Voor de waarden van $log\,[3]$ en $log\,[4]$ volgt hieronder een tabelletje, zich uitstrekkende van $\varphi_m = 30^0$ tot $\varphi_m = 60^0$, dat voor de berekening voldoende is, daar het eene gemakkelijke interpolatie toelaat, en logarithmen met 4 decimalen meestal voldoende zijn.

---

*) Bij de berekening van de koorde is eene ontwikkeling, zooals hier gegeven wordt, minder aan te bevelen, omdat men ten slotte toch den sinus noodig heeft. Het in rekening brengen der correctie-termen zou er ook niet gemakkelijker om worden, omdat men, zooals uit de formules (18)—(21) onmiddellijk valt op te maken, al die correctiën afzonderlijk zou moeten berekenen; alleen voor de berekening van α zou men form. (35) met vrucht kunnen toepassen.

Bij het hier behandelde vraagstuk, waarbij men ten slotte den boog en

φ_m	*log* [3]	vers.	*log* [4]	vers.	
30°	4,62432		4,61539		60°
		27		27	
31°	4,62405		4,61566		59°
		27		28	
32°	4,62378		4,61594		58°
		28		29	
33°	4,62350		4,61623		57°
		29		29	
34°	4,62321		4,61652		56°
		29		29	
35°	4,62292		4,61681		55°
		29		30	
36°	4,62263		4,61711		54°
		30		30	
37°	4,62233		4,61741		53°
		30		30	
38°	4,62203		4,61771		52°
		30		31	
39°	4,62173		4,61802		51°
		30		30	
40°	4,62143		4,61832		50°
		31		31	
41°	4,62112		4,61863		49°
		31		31	
42°	4,62081		4,61894		48°
		31		32	
43°	4,62050		4,61926		47°
		31		31	
44°	4,62019		4,61957		46°
		31		31	
45°	4,61988		4,61988		45°
	log [4]	vers.	*log* [3]	vers.	φ_m

Als toepassing nemen wij het reeds vroeger behandelde vraagstuk met den afstand van 120000 meter.

---

niet den sinus noodig heeft, is de reeksontwikkeling beter op haar plaats. Het ontwikkelen van $\cos \frac{1}{2} \lambda$ in form. (37) en (39) is niet wenschelijk; omdat de berekening er niet door vereenvoudigd wordt en de nauwkeurigheid van de formule er belangrijk door vermindert. (De fout in A_m wordt er bijv. 14 malen grooter door.)

$\varphi_2 = 57^0$
$\varphi_1 = 56^0 13' 49'',02186$
$\varphi_m = 56^0 36' 54'',51093$

$\lambda = 1^0 22' 6'',03270 = 4926'',03270$
$\beta = 46' 10'',97814 = 2770'',97814$

$log\ \lambda$	=	3,6924972.9	$= a$
$log\ sin\ \varphi_m$	=	9,9216830.0	$= b$
$log\ sec\ \frac{1}{2}\beta$	=	98.0	
$+ c_1$	=	62.5	
$log\ \alpha$	=	3,6141963.4	
α	=	4113'',356	

$log N_m\ bg\ 1''$	=	1,4912311.7	
$log\ \lambda$	=	3,6924972.9	
$log\ cos\ \varphi_m$	=	9,7405680.1	$= c$
$- c_2$	=	— 71.96	
$+ c_3$	=	+ 31.74	
$+ c_5$	=	— 26	
$log\ S\ sin\ A_m$	=	4,9242924.2	
$log\ sin\ A_m$	=	9,8451111.8	
$log\ S$	=	5,0791812.4	

$log R_m\ bg\ 1''$	=	1,4903485.0	
$log\ \beta$	=	3,4426331.0	$= d$
$log\ cos\ \frac{1}{2}\lambda$	=	9,9999690.4	
$+ c_4$	=	30.87	
$+ c_5$	=	— 26	
$log\ S\ cos\ A_m$	=	4,9329537.0	
$log\ cos\ A_m$	=	9,8537724.6	
$log\ S$	=	5,0791812.4	

$log\ [1]$	=	4,9298
$2\ a$	=	7,3850
$2\ c$	=	9,4811
$log\ c_1$	=	1,7959

$log\ [2]$	=	4,6287
$2\ a$	=	7,3850
$2\ b$	=	9,8434
$log\ c_2$	=	1,8571

$log\ [3]$	=	4,6163
$2\ d$	=	6,8853
$log\ c_3$	=	1,5016

$log\ [5]$	=	2,933
$2\ d$	=	6,885
$log\ cos\ 2\ \varphi_m$	=	9.596_n
$log\ c_5$	=	$9,414_n$

$log\ [4]$	=	4,6234
$2\ a$	=	7,3850
$2\ c$	=	9,4811
$log\ c_4$	=	1,4895

$log\ S\ sin\ A_m$	=	4,9242924.2
$log\ S\ cos\ A_m$	=	4,9329537.0
$log\ tg\ A_m$	=	9,9913387.2

A_m	=	$44^0 25' 43'',333$
$\frac{1}{2}\alpha$	=	$34' 16'',678$

$180^0 - A_m - \frac{1}{2}\alpha = 134^0 59' 59'',989$

$360^0 - A_m + \frac{1}{2}\alpha = 316^0\ 8' 33'',345$

$S = 119999,997$

Voor de azimuthen vinden wij dezelfde waarden als vroeger; voor den afstand S vinden wij een verschil van 3 millimeter met 120000 meter: eene overeenstemming dus, die met acht decimalen niet beter te verkrijgen is. Bij de toepassing van de formules (31)—(33) met $R = N_m$, dus zonder correctiën, vindt men voor de azimuthen dezelfde waarden als in de eerste berekening van § 5, voor den afstand 120000,022, of 22 millimeter te veel.

De bij bovenstaande berekening voorkomende logarithmen van $N_m \, bg \, 1''$ en $R_m \, bg \, 1''$ zijn ontleend aan de »Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung. Berlin 1878", waarin de logarithmen van de reciproque waarden dier grootheden met 8 decimalen voorkomen, voor breedten van 47°—57°, opklimmende met eene minuut.

§ 8. Ten einde na te gaan in hoeverre de hier gebezigde ontwikkeling mag worden toegepast, zal het voldoende zijn de termen in s^4 te ontwikkelen, die onafhankelijk zijn van e^2. Wij vinden dan, dat bij de logarithmen van α, $S \sin A_m$ en $S \cos A_m$ respectievelijk de volgende termen van de orde s^4 verwaarloosd zijn:

$$\frac{M}{1440}\left[7\lambda^4 \cos^2\varphi_m - 13\lambda^4 \sin^2\varphi_m \cos^2\varphi_m - 30\,\lambda^2\beta^2 \sin^2\varphi_m\right], \ldots (41)$$

$$\frac{M}{2880}\left[11(\beta^2+\lambda^2\cos^2\varphi_m)^2 - 10\lambda^4\cos^2\varphi_m - 10\beta^4 - 30\beta^2\lambda^2 - \lambda^4\right], \ldots (42)$$

$$\frac{M}{2880}\left[11(\beta^2+\lambda^2\cos^2\varphi_m)^2 - 10\lambda^4\cos^2\varphi_m - 10\beta^4 - 30\beta^2\lambda^2 - \beta^4\right] \ldots (43)$$

Hieruit volgen voor de fout in α:

$$\frac{1}{2880}\left(\frac{S}{R}\right)^5 \frac{\sin\varphi_m}{\cos^3\varphi_m}\left[30 \sin^2\varphi_m \sin^3 A_m - (7+17\sin^2\varphi_m)\sin^5 A_m\right], \ldots (44)$$

voor de fout in A_m

$$\frac{1}{2880}\left(\frac{S}{R}\right)^4\left[\frac{\sin^5 A_m \cos A_m}{\cos^4 \varphi_m} - \sin A_m \cos^5 A_m\right] \ldots\ldots (45)$$

en voor de fout in S:

$$\frac{1}{2880}\frac{S^5}{R^4}\frac{1}{\cos^4\varphi_m}\Big[(1-\cos^4\varphi_m)\sin^6 A_m - (20\cos^2\varphi_m -$$

$$- 13\cos^4\varphi_m)\sin^4 A_m + (30\cos^2\varphi_m - 23\cos^4\varphi_m)\sin^2 A_m\Big] .. (46)$$

Met behulp van deze formules zijn de twee volgende tabellen berekend, waarin voor $S = 100000$ M. en $S = 200000$ M. de maximum-waarden van de fouten in α, A_m en S volgens de formules (35), (36) en (37) resp. (38) en (39) voor verschillende breedten zijn opgenomen. Voor de waarden van φ_m, kleiner dan die welke in de tabellen voorkomen, zijn de maximum-waarden der fouten in $\frac{1}{2}\alpha$ en A_m kleiner dan 0"00005 en die in S kleiner dan 0,5 millimeter.

$S = 100000$ Meter.

φ_m	Maximum-waarden der fouten in		
	$^1/_2\,\alpha$	A_m	S
70°	0",0000	0",0001	0 m.M.
75°	0",0000	0",0002	1 »
80°	0",0001	0",0012	3 »
85°	0",0008	0",0194	39 »
90°	—	—	—

$S = 200000$ Meter.

φ_m	Maximum-waarden der fouten in		
	$^1/_2\,\alpha$	A_m	S
40⁰	0″,0000	0″,0001	1 m.M.
45⁰	0″,0000	0″,0001	1 »
50⁰	0″,0000	0″,0001	1 »
55⁰	0″,0001	0″,0002	2 »
60⁰	0″,0001	0″,0003	3 »
65⁰	0″,0002	0″,0006	5 »
70⁰	0″,0004	0″,0013	10 »
75⁰	0″,0009	0″,0040	24 »
80⁰	0″,0031	0″,0197	95 »
85⁰	0″,0254	0″,3107	1252 »
90⁰	—	—	—

Uit deze tabellen kan men gemakkelijk nagaan, tot op welke breedte, bij een gegeven graad van nauwkeurigheid, de genoemde formules nog mogen toegepast worden bij de maximum-lengten der afstanden van 100000 en 200000 meter.

Rekent men met logarithmen met zeven decimalen, dan mag men bij eene maximum-lengte van 100000 meter die formules nog toepassen tot ongeveer 85⁰ breedte, zonder eene fout te maken, die belangrijk grooter is dan die, welke ontstaan kan door eene fout van eene eenheid van de laatste decimaal. Bij een maximum-afstand van 200000 meter mag men dit nog veilig doen tot ruim 75⁰ breedte, dat is tot op eene breedte grooter dan de grootste breedte, waarop nog driehoeksmetingen zijn uitgevoerd.

Vordert men een grooteren graad van nauwkeurigheid, bijv.

de azimuthen tot op één tienduizendste secunde en de afstanden tot op een enkelen millimeter, dan kan men bij een maximum-afstand van 100000 meter die formules nog toepassen tot eene breedte van 70°. Bij een afstand van 200000 meter mag men alsdan slechts gaan tot 40°. Tot op eene breedte van 55°, dus ook voor geheel Nederland, kan de fout echter nog hoogstens tot 0″,0002 in het azimuth en 2 m.M. in den afstand opklimmen.

Natuurlijk moet men, om bij de berekening eene dergelijke nauwkeurigheid te bereiken, logarithmen met 10 decimalen gebruiken.

B. Ontwikkeling der formules.

§ 9. Overgaande tot het bewijs van de medegedeelde formules, beschouwen wij eerst de aarde als een bol, waarop de twee punten A_1 en A_2 met de geographische breedten φ_1 en φ_2 en het lengteverschil λ gelegen zijn. Nemen wij, zooals vroeger reeds werd aangewezen, voor A_2 steeds het punt met de grootste breedte, dan kunnen zich twee gevallen voordoen, die in fig. 1 en 2 zijn voorgesteld. De bolvormige driehoek, gevormd door de verbindingslijn s' der twee punten en de gedeelten der meridianen tusschen die punten en de pool P, heeft tot zijden: $A_1 P = 90^0 - \varphi_1$ $A_2 P = 90^0 - \varphi_2$ en $A_1 A_2 = s'$ en tot hoeken $A_1 P A_2 = \lambda$, $P A_1 A_2 = A'_1 = A'_m - \frac{1}{2}\alpha'$ en $A_1 A_2 P = A'_2 = 180^0 - A'_m - \frac{1}{2}\alpha'$ waarin A'_m het gemiddeld azimuth en α' de meridiaan-convergentie voorstellen.

Stellen wij nog de gemiddelde breedte $\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) = \varphi_m$ en het breedte-verschil $(\varphi_2 - \varphi_1) = \beta$, dan geven de analogiën van Gauss onmiddellijk:

$$\cos \tfrac{1}{2} s' \sin \tfrac{1}{2} \alpha' = \sin \tfrac{1}{2} \lambda \sin \varphi_m \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\cos \tfrac{1}{2} s' \cos \tfrac{1}{2} \alpha' = \cos \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} s' \sin A'_m = \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} s' \cos A'_m = \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Stellen wij verder den straal van den bol door R', de lengte der koorde $A_1 A_2$ door K' en de lengte van den boog $A_1 A_2$ door S' voor, dan heeft men:

$$K' = 2 R' \sin \tfrac{1}{2} s'$$

$$S' = R' s'$$

waaruit gemakkelijk de formules (1) (2) (3) (28) (29) en (30) van afdeeling A volgen.

De oplossing voor een bolvormig oppervlak is hiermede geheel gegeven; voor de verdere ontwikkeling hebben wij echter nog enkele formules, die op den bol betrekking hebben, noodig; deze formules laten wij hier volgen.

Door vermenigvuldiging van (1) met (2) en van (3) met (4) volgt:

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha' \cos \tfrac{1}{2} \alpha' \cos^2 \tfrac{1}{2} s' = \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \tfrac{1}{2} \lambda \sin \varphi_m \cos \tfrac{1}{2} \beta \,.\,. (5)$$

$$\sin A'_m \cos A'_m \sin^2 \tfrac{1}{2} s' = \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m \sin \tfrac{1}{2} \beta \,.\,. (6)$$

en door die zelfde uitdrukkingen op elkaar te deelen:

$$tg \tfrac{1}{2} \alpha' = tg \tfrac{1}{2} \lambda \sin \varphi_m \sec \tfrac{1}{2} \beta \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (7)$$

$$tg A'_m = tg \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2} \beta \,,\,.\,.\,.\,.\,. (8)$$

deze twee laatsten geven wederom door deeling:

$$tg \tfrac{1}{2} \alpha' = tg \tfrac{1}{2} \beta \, tg \varphi_m \, tg A'_m \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (9)$$

Uit den sinusregel volgt verder:

$$\frac{\cos \varphi_1}{\sin A'_2} = \frac{\sin s'}{\sin \lambda} = \frac{\cos \varphi_2}{\sin A'_1} \,,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (10)$$

terwijl de cotangente formule geeft:

$$ctg A'_1 = \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda}{\cos \varphi_2 \sin \lambda} \,.\,.\,. (11)$$

en de cosinus-formule:

$$\cos s' = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \lambda \ldots (12)$$

§ 10. Stellen nu in fig. 3, $P\,O\,B_1\,B_2$ de as der elliptische aarde, $A_1\,P$ en $A_2\,P$ de meridianen van A_1 en A_2 voor, en trekken wij de twee normalen $A_1\,B_1$ en $A_2\,B_2$ dan is:

$$A_1\,B_1 = N_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}}$$

$$A_2\,B_2 = N_2 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_2}}$$

$$O\,B_1 = \frac{a\,e^2 \sin \varphi_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}} = e^2 N_1 \sin \varphi_1$$

$$O\,B_2 = \frac{a\,e^2 \sin \varphi_2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_2}} = e^2 N_2 \sin \varphi_2$$

Het verschil van de twee laatste waarden, dus de lengte van $B_1\,B_2$, zullen wij voorloopig door de letter p voorstellen, dus:

$$p = B_1 B_2 = OB_2 - OB_1 = e^2 (N_2 \sin\varphi_2 - N_1 \sin\varphi_1) \ldots (13)$$

Laten wij nu uit A_2 de loodlijn $A_2\,G$ op het meridiaanvlak van A_1 neer en uit het voetpunt daarvan de loodlijnen $G\,C$ op $O\,P$ en $G\,D$ op $A_1\,B_1$, en vereenigen C en D met A_2, dan is hoek $G\,C\,A_2 = \lambda$ het lengteverschil en hoek $A_2\,D\,G = A_1$ het azimuth van de verticale doorsnede $A_1 A_2$. Trekken wij nog uit C de loodlijn CF op $A_1\,B_1$ en uit G de loodlijn $G\,E$ op $C\,F$, dan volgt uit de figuur:

$$DG = CF - CE = CB_1 \cos\varphi_1 - CG \sin\varphi_1 = (CB_2 - B_1 B_2) \cos\varphi_1 -$$
$$- CA_2 \cos\lambda \sin\varphi_1 = (N_2 \sin\varphi_2 - p) \cos\varphi_1 - N_2 \cos\varphi_2 \cos\lambda \sin\varphi_1 =$$
$$= N_2 (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda) - p \cos \varphi_1$$

waarvoor wij ingevolge de formules (10) en (11) kunnen schrijven:

$$D\,G = N_2 \sin s' \cos A'_1 - p\,\frac{\sin s' \sin A'_2}{\sin \lambda} \quad . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Verder volgt uit diezelfde figuur:

$$G\,A_2 = C\,A_2 \sin \lambda = N_2 \cos \varphi_2 \sin \lambda$$

of, als wij op (10) letten:

$$G\,A_2 = N_2 \sin s' \sin A'_1$$

Door deze twee uitdrukkingen op elkaar te deelen, vinden wij voor het azimuth A_1:

$$ctg\,A_1 = \frac{D\,G}{G\,A_2} = ctg\,A'_1 - \frac{p}{N_2 \sin \lambda}\,\frac{\sin A'_2}{\sin A'_1}$$

Stellen wij het verschil van A'_1 en A_1 door Δ_1 voor, dus:

$$A_1 = A'_1 + \Delta_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

dan vinden wij voor Δ_1:

$$tg\,\Delta_1 = tg\,(A_1 - A'_1) = \frac{ctg\,A'_1 - ctg\,A_1}{1 + ctg\,A'_1\,ctg\,A_1} =$$

$$= \frac{\dfrac{p}{N_2 \sin \lambda}\,\dfrac{\sin A'_2}{\sin A'_1}}{1 + ctg^2 A'_1 - \dfrac{p}{N_2 \sin \lambda}\,\dfrac{\sin A'_2}{\sin A'_1}\,ctg\,A'_1} =$$

$$= \frac{\dfrac{p}{\sin \lambda} \sin A'_1 \sin A'_2}{N_2 - \dfrac{p}{\sin \lambda} \sin A'_2 \cos A'_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Stellen wij verder den hoek, dien de verticale doorsnede $A_2 A_1$ met het meridiaanvlak van A_2 maakt, door A_2 voor, en het verschil van A_2 met A'_2 door Δ_2, dus:

$$A_2 = A'_2 - \Delta_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

dan vinden wij op geheel overeenkomstige wijze, of door eenvoudig de indices 1 en 2 in form. (16) onderling te verwisselen en behoorlijk op de teekens te letten:

$$tg\,\Delta_2 = \frac{\frac{p}{sin\,\lambda}\,sin\,A'_1\,sin\,A'_2}{N_1 + \frac{p}{sin\,\lambda}\,sin\,A'_1\,cos\,A'_2}$$

Stellen wij nu den gemeenschappelijken teller van $tg\,\Delta_1$ en $tg\,\Delta_2$ door L en de halve som en het halve verschil der noemers respectievelijk door P en Q voor, dus:

$$L = \frac{p}{sin\,\lambda}\,sin\,A'_1\,sin\,A'_2 = \frac{p}{sin\,\lambda}\,(sin^2\,A'_m - sin^2\,\alpha') \; . \; . \; . \; (18)$$

$$P = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p}{sin\,\lambda}\,\frac{sin\,(A'_2 - A'_1)}{2} =$$

$$= \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p}{sin\,\lambda}\,sin\,A'_m\,cos\,A'_m \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

$$Q = \frac{N_2 - N_1}{2} - \frac{p}{sin\lambda}\,\frac{sin(A'_2 + A'_1)}{2} = \frac{N_2 - N_1}{2} - \frac{p}{sin\lambda}\,sin\alpha'\,cos\alpha' \; . \; . \; (20)$$

dan gaan die formules over in:

$$tg\,\Delta_1 = \frac{L}{P + Q} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

$$tg\,\Delta_2 = \frac{L}{P - Q} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

Voeren wij nu nog het gemiddelde (astronomische) azimuth A_m en de meridiaan-convergentie α op de ellipsoïde in, en stellen de verschillen van deze grootheden met de overeenkomstige grootheden A'_m en α' op den bol door Δ en δ voor, dan hebben wij de volgende betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_m - \tfrac{1}{2}\alpha \\ A_2 &= 180^0 - A_m - \tfrac{1}{2}\alpha \\ A_m &= A'_m + \Delta \\ \alpha &= \alpha' + \delta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

waaruit in verband met (15) en (17) volgt:

$$\Delta_1 = \Delta - \tfrac{1}{2}\delta \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

$$\Delta_2 = \Delta + \tfrac{1}{2}\delta \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Met behulp hiervan vinden wij uit (21) en (22):

$$(P + Q)\sin(\Delta - \tfrac{1}{2}\delta) = L\cos(\Delta - \tfrac{1}{2}\delta)$$

$$(P - Q)\sin(\Delta + \tfrac{1}{2}\delta) = L\cos(\Delta + \tfrac{1}{2}\delta)$$

waaruit door samentelling en aftrekking en deeling door twee volgt:

$$P\sin\Delta\cos\tfrac{1}{2}\delta - Q\cos\Delta\sin\tfrac{1}{2}\delta = L\cos\Delta\cos\tfrac{1}{2}\delta$$

$$P\cos\Delta\sin\tfrac{1}{2}\delta - Q\sin\Delta\cos\tfrac{1}{2}\delta = -L\sin\Delta\sin\tfrac{1}{2}\delta$$

Hieruit volgen onmiddellijk de twee volgende betrekkingen:

$$P\sin\tfrac{1}{2}\delta\cos\tfrac{1}{2}\delta = Q\sin\Delta\cos\Delta \ldots\ldots (26)$$

$$tg\,\Delta = \frac{L + Q\,tg\,\tfrac{1}{2}\delta}{P} \ldots\ldots\ldots (27)$$

§ 11. Stellen wij den hoek, dien de raaklijn aan de verticale doorsnede $A_1\ A_2$ met de koorde maakt, door $\tfrac{1}{2}\,s_1$ voor en de koorde zelve door K, dan is s_1 de middelpuntshoek van den cirkelboog door A_1 en A_2 gaande, die in A_1 loodrecht staat op de normaal van dat punt en $A_1\,D$ dus gelijk aan $K\sin\tfrac{1}{2}\,s_1$. Uit figuur 3 volgt voor diezelfde lijn $A_1\,D$:

$$\begin{aligned} A_1D &= A_1B_1 - B_1F - FD = N_1 - CB_1\sin\varphi_1 - CG\cos\varphi_1 = \\ &= N_1 - (N_2\sin\varphi_2 - p)\sin\varphi_1 - N_2\cos\varphi_2\cos\lambda\cos\varphi_1 = \\ &= N_1 - N_2(\sin\varphi_2\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2\cos\varphi_1\cos\lambda) + p\sin\varphi_1 \end{aligned}$$

en hieruit volgt, als wij tevens op (12) letten:

$$K \sin \tfrac{1}{2} s_1 = N_1 - N_2 \cos s' + p \sin \varphi_1 \quad . . . (28)$$

Stellen wij den hoek, dien de raaklijn in A_2 aan de verticale doorsnede $A_2\ A_1$ met de koorde $A_2\ A_1$ maakt, door $\frac{1}{2} s_2$ voor, zoodat s_2 overeenkomt met den middelpuntshoek van den cirkelboog $A_2\ A_1$, die in A_2 dezelfde raaklijn heeft als de verticale doorsnede $A_2\ A_1$, dan vindt men op overeenkomstige wijze, of eenvoudiger door de indices 1 en 2 onderling te verwisselen en behoorlijk op de teekens te letten:

$$K \sin \tfrac{1}{2} s_2 = N_2 - N_1 \cos s' - p \sin \varphi_2. \quad . . . (29)$$

Stellen wij:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s - \sigma \\ s_2 &= s + \sigma \end{aligned}\right\} \quad . . . . (30)$$

dan volgt uit (28) en (29) door het nemen van de halve som en het halve verschil en door tevens op (5) en (6) te letten:

$$\left.\begin{aligned} K \sin \tfrac{1}{2} s \cos \tfrac{1}{2} \sigma &= \frac{N_2 + N_1}{2}(1 - \cos s') - p \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \varphi_m = \\ &= 2\left[\frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p}{\sin \lambda} \sin A'_m \cos A'_m\right] \sin^2 \tfrac{1}{2} s' = 2 P \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \\ K \cos \tfrac{1}{2} s \sin \tfrac{1}{2} \sigma &= \frac{N_2 - N_1}{2}(1 + \cos s') - p \cos \tfrac{1}{2} \beta \sin \varphi_m = \\ &= 2\left[\frac{N_2 - N_1}{2} - \frac{p}{\sin \lambda} \sin \tfrac{1}{2} \alpha' \cos \tfrac{1}{2} \alpha'\right] \cos^2 \tfrac{1}{2} s' = 2 Q \cos^2 \tfrac{1}{2} s' \end{aligned}\right\} .. (31)$$

en hieruit volgt door deeling:

$$tg \tfrac{1}{2} s \; ctg \tfrac{1}{2} \sigma = \frac{P}{Q} tg^2 \tfrac{1}{2} s' \quad . . . . (32)$$

Verder vinden wij uit fig. (3):

$$A_2 D = K \cos \tfrac{1}{2} s_1 = \frac{D G}{\cos A_1}$$

of als wij de waarde van DG uit (14) overnemen:

$$K \cos \tfrac{1}{2} s_1 = \left[N_2 - \frac{p}{\sin\lambda}\frac{\sin A'_2}{\cos A'_1}\right] \sin s' \frac{\cos A'_1}{\cos A_1}.$$

Voor $\cos A_1$ kunnen wij schrijven, als wij op (15) en (16) letten:

$$\cos A_1 = \cos(A'_1 + \Delta_1) = \cos A'_1 \cos \Delta_1 (1 - tg\,\Delta_1\, tg\, A'_1) =$$

$$= \cos A'_1 \cos\Delta_1 \frac{N_2 - \frac{p}{\sin\lambda}\sin A'_2 \cos A'_1 - \frac{p}{\sin\lambda}\sin A'_1 \sin A'_2\, tg\, A'_1}{N_2 - \frac{p}{\sin\lambda}\sin A'_2 \cos A'_1} =$$

$$= \cos A'_1 \cos \Delta_1 \frac{N_2 - \frac{p}{\sin\lambda}\frac{\sin A'_2}{\cos A'_1}}{P + Q},$$

waardoor de vorige formule overgaat in:

$$K \cos \tfrac{1}{2} s_1 = \frac{P + Q}{\cos \Delta_1} \sin s'.$$

Op geheel overeenkomstige wijze vindt men:

$$K \cos \tfrac{1}{2} s_2 = \frac{P - Q}{\cos \Delta_2} \sin s'.$$

Vervangen wij nu s_1, s_2, Δ_1 en Δ_2 door hunne waarden volgens (24), (25) en (30), dan kunnen wij voor de twee laatste vergelijkingen schrijven, als wij tevens met $\cos\,\Delta_1$ respectievelijk $\cos\,\Delta_2$ vermenigvuldigen:

$$K \cos(\tfrac{1}{2} s - \tfrac{1}{2}\sigma) \cos(\Delta - \tfrac{1}{2}\delta) = (P + Q) \sin s'$$
$$K \cos(\tfrac{1}{2} s + \tfrac{1}{2}\sigma) \cos(\Delta + \tfrac{1}{2}\delta) = (P - Q) \sin s',$$

waaruit door samentelling en aftrekking en deeling door twee volgt:

$$K\left[\cos\tfrac{1}{2}s \cos\tfrac{1}{2}\sigma \cos\Delta \cos\tfrac{1}{2}\delta + \sin\tfrac{1}{2}s \sin\tfrac{1}{2}\sigma \sin\Delta \sin\tfrac{1}{2}\delta\right] = P \sin s'$$

$$K\left[\sin\tfrac{1}{2}s \sin\tfrac{1}{2}\sigma \cos\Delta \cos\tfrac{1}{2}\delta + \cos\tfrac{1}{2}s \cos\tfrac{1}{2}\sigma \sin\Delta \sin\tfrac{1}{2}\delta\right] = Q \sin s'.$$

Deelen wij deze uitdrukkingen op elkander en deelen teller en noemer van het eerste lid door $\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} \sigma \cos \Delta \cos \frac{1}{2} \delta$ dan komt er:

$$\frac{tg \frac{1}{2} s\, tg \frac{1}{2} \sigma + tg \Delta\, tg \frac{1}{2} \delta}{1 + tg \frac{1}{2} s\, tg \frac{1}{2} \sigma\, tg \Delta\, tg \frac{1}{2} \delta} = \frac{Q}{P}$$

en hieruit volgt door oplossing van $tg \frac{1}{2} s\; tg \frac{1}{2} \sigma$:

$$tg \tfrac{1}{2} s\, tg \tfrac{1}{2} \sigma = \frac{Q - P\, tg \Delta\, tg \frac{1}{2} \delta}{P - Q\, tg \Delta\, tg \frac{1}{2} \delta}.$$

Vervangen wij nu nog in den teller van deze uitdrukking de grootheid P door hare waarde uit (26) en in den noemer de grootheid Q door hare waarde eveneens uit (26), dan komt er, na eene eenvoudige herleiding:

$$tg \tfrac{1}{2} s\, tg \tfrac{1}{2} \sigma = \frac{Q}{P} \frac{\cos^2 \Delta}{\cos^2 \frac{1}{2} \delta}. \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

Deze formule geeft met (32) door vermenigvuldiging en deeling en worteltrekking:

$$tg \tfrac{1}{2} s = tg \tfrac{1}{2} s' \frac{\cos \Delta}{\cos \frac{1}{2} \delta} \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

en

$$tg \tfrac{1}{2} \sigma = \frac{Q}{P}\, ctg \tfrac{1}{2} s' \frac{\cos \Delta}{\cos \frac{1}{2} \delta}, \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

voor deze laatste kunnen wij, als wij op (26) letten, ook schrijven:

$$tg \tfrac{1}{2} \sigma = ctg \tfrac{1}{2} s' \frac{\sin \frac{1}{2} \delta}{\sin \Delta}, \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

waardoor s en σ en dus ook s_1 en s_2 bepaald zijn.

§ 12. De lengte der koorde vinden wij het gemakkelijkst uit (31); als wij die door (34) deelen, komt er:

$$K \cos \tfrac{1}{2} s \cos \tfrac{1}{2} \sigma = 2 \frac{P}{\cos \Delta} \sin \tfrac{1}{2} s' \cos \tfrac{1}{2} s' \cos \tfrac{1}{2} \delta$$

en dus:

$$K = 2\frac{P}{\cos\Delta}\sin\tfrac{1}{2}s'\frac{\cos\frac{1}{2}s'\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}\sigma} \quad \ldots\ldots (37)$$

Voor de berekening is het gemakkelijker eerst de waarden van $K\sin A_m$ en $K\cos A_m$ uit te rekenen.

Voor $\sin A_m$ en $\cos A_m$ vinden wij in verband met (23) en (27):

$$\left.\begin{aligned}
\sin A_m &= \sin(A'_m+\Delta) = \sin A'_m \cos\Delta(1+tg\Delta\, ctg A'_m) = \\
&= \sin A'_m \frac{\cos\Delta}{P}(P + L\, ctg\, A'_m + Q\, tg\tfrac{1}{2}\delta\, ctg\, A'_m) \\
\cos A_m &= \cos(A'_m+\Delta) = \cos A'_m \cos\Delta(1-tg\Delta\, tg A'_m) = \\
&= \cos A'_m \frac{\cos\Delta}{P}(P - L\, tg\, A'_m - Q\, tg\tfrac{1}{2}\delta\, tg\, A'_m)
\end{aligned}\right\} \ldots (38)$$

en hieruit volgt, door vermenigvuldiging met (37), als wij tevens op (3) en (4) letten:

$$\left.\begin{aligned}
K\sin A_m &= \\
&= 2(P + L ctg A'_m + Q tg\tfrac{1}{2}\delta ctg A'_m)\frac{\cos\frac{1}{2}s'\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}\sigma}\sin\tfrac{1}{2}\lambda\cos\varphi_m \\
K\cos A_m &= \\
&= 2(P - L tg A'_m - Q tg\tfrac{1}{2}\delta\, tg A'_m)\frac{\cos\frac{1}{2}s'\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}\sigma}\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\lambda
\end{aligned}\right\} \ldots (39)$$

§ 13. De tot hiertoe ontwikkelde formules zijn absoluut nauwkeurig; voor de directe berekening zijn zij echter weinig geschikt, wij zullen daarom enkele van de daarin voorkomende grootheden in reeksen moeten ontwikkelen. Dit zal vooral het geval zijn met de factoren:

$$P + L\, ctg\, A'_m + Q\, tg\tfrac{1}{2}\delta\, ctg\, A'_m$$
$$P - L\, tg\, A'_m - Q\, tg\tfrac{1}{2}\delta\, tg\, A'_m$$

en

$$\frac{\cos\frac{1}{2}s'\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}\sigma}$$

n met de verhouding $\frac{Q}{P}$, waaruit in verband met (26) de aan α' aan te brengen correctie δ volgt; de waarden van P en L afzonderlijk zijn minder noodig.

Uit (18), (19) en (20) volgt:

$$P + L\, ctg\, A'_m = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p}{sin\,\lambda} sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha'\, ctg\, A'_m =$$
$$= \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{tg\, A'_m}{tg\, \frac{1}{2}\lambda} \cdot \frac{cos^2 \frac{1}{2}\alpha'}{cos^2 \frac{1}{2}\lambda} \cdot \frac{tg^2 \frac{1}{2}\alpha'}{tg^2 A'_m},$$

$$P - L\, tg\, A'_m = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p}{sin\,\lambda} cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha'\, tg\, A'_m =$$
$$= \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{tg\, A'_m}{tg\, \frac{1}{2}\lambda} \cdot \frac{cos^2 \frac{1}{2}\alpha'}{cos^2 \frac{1}{2}\lambda},$$

$$Q = \frac{N_2 - N_1}{2} - \frac{p}{sin\,\lambda} sin\, \tfrac{1}{2}\alpha'\, cos\, \tfrac{1}{2}\alpha' =$$
$$= \frac{N_2 - N_1}{2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{tg\, A'_m}{tg\, \frac{1}{2}\lambda} \cdot \frac{cos^2 \frac{1}{2}\alpha'}{cos^2 \frac{1}{2}\lambda} \cdot \frac{tg\, \frac{1}{2}\alpha'}{tg\, A'_m},$$

of als wij op de betrekkingen (2), (8) en (9) letten, waaruit volgt:

$$\frac{cos\, \frac{1}{2}\alpha'}{cos\, \frac{1}{2}\lambda} = \frac{cos\, \frac{1}{2}\beta}{cos\, \frac{1}{2}s'},$$

$$\frac{tg\, A'_m}{tg\, \frac{1}{2}\lambda} = \frac{cos\, \varphi_m}{sin\, \frac{1}{2}\beta}$$

en

$$\frac{tg\, \frac{1}{2}\alpha'}{tg\, A'_m} = tg\, \tfrac{1}{2}\beta\, tg\, \varphi_m,$$

dan gaan die uitdrukkingen over in:

$$P + L\, ctg\, A'_m = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p\, cos\, \varphi_m}{2\, sin\, \frac{1}{2}\beta}\, tg^2\, \varphi_m \frac{sin^2 \frac{1}{2}\beta}{cos^2 \frac{1}{2}s'} \quad . . . (40)$$

$$P - L\, tg\, A'_m = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2}\beta} \cdot \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\beta}{\cos^2 \frac{1}{2} s'} =$$

$$= \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2}\beta} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2}\beta} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}s' - \sin^2 \frac{1}{2}\beta}{\cos^2 \frac{1}{2} s'} \quad \ldots (41)$$

$$Q = \frac{N_2 - N_1}{2} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2}\beta}\, tg\, \varphi_m \frac{\sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta}{\cos^2 \frac{1}{2} s'} \quad \ldots\ldots (42)$$

Ontwikkelen wij vooreerst de grootheden: $\frac{N_2+N_1}{2}$, $\frac{N_2-N_1}{2}$, $\frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2}\beta}$ en $\frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2}\beta}$, die uitsluitend afhangen van de breedten φ_1 en φ_2 van de twee punten.

Wij zullen deze grootheden hier in reeksen ontwikkelen en uitdrukken uitsluitend in de gemiddelde breedte φ_m en het halve breedteverschil $\frac{1}{2}\beta$ en die reeksen eenigszins verder voortzetten, dan voor de later volgende ontwikkelingen noodig is, omdat die uitdrukkingen bij vele beschouwingen te pas komen.

Vervangen wij φ_2 door $(\varphi_m + \frac{1}{2}\beta)$ dan kunnen wij voor N_2 schrijven:

$$N_2 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 (\varphi_m + \frac{1}{2}\beta)}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m - e^2 \sin \frac{1}{2}\beta (\sin 2\varphi_m \cos \frac{1}{2}\beta + \cos 2\varphi_m \sin \frac{1}{2}\beta)}}$$

of als wij teller en noemer door $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m}$ deelen en kortheidshalve:

$$\frac{e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m} = w \quad \ldots\ldots\ldots (43)$$

stellen:

$$N_2 = N_m \left[1 - w \sin \tfrac{1}{2}\beta (\sin 2\varphi_m \cos \tfrac{1}{2}\beta + \cos 2\varphi_m \sin \tfrac{1}{2}\beta)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

en hieruit volgt door ontwikkeling volgens de formule voor het binomium, als wij voor een oogenblik

$$\sin 2\varphi_m \cos \tfrac{1}{2}\beta + \cos 2\varphi_m \sin \tfrac{1}{2}\beta = x$$

stellen:

$$N_2 = N_m\Big[1 + \tfrac{1}{2} w \sin \tfrac{1}{2}\beta x + \frac{3}{8} w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta x^2 + \frac{5}{16} w^3 \sin^3 \tfrac{1}{2}\beta x^3 + \\ + \frac{35}{128} w^4 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta x^4 + \frac{63}{256} w^5 \sin^5 \tfrac{1}{2}\beta x^5 + \frac{231}{1024} w^6 \sin^6 \tfrac{1}{2}\beta x^6 + \ldots\Big].$$

Ter ontwikkeling van N_1 hebben wij β slechts van teeken te veranderen, stellen wij alsdan:

$$\sin 2\varphi_m \cos \tfrac{1}{2}\beta - \cos 2\varphi_m \sin \tfrac{1}{2}\beta = y$$

dan vinden wij:

$$N_1 = N_m\Big[1 - \tfrac{1}{2} w \sin \tfrac{1}{2}\beta y + \frac{3}{8} w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta y^2 - \frac{5}{16} w^3 \sin^3 \tfrac{1}{2}\beta y^3 + \\ + \frac{35}{128} w^4 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta y^4 - \frac{63}{256} w^5 \sin^5 \tfrac{1}{2}\beta y^5 + \frac{231}{1024} w^6 \sin^6 \tfrac{1}{2}\beta y^6 - \ldots\Big]$$

Hieruit volgt nu door het nemen van de halve som en het halve verschil:

$$\frac{N_2 + N_1}{2} = N_m\Big[1 + \tfrac{1}{2} w \sin \tfrac{1}{2}\beta \frac{x-y}{2} + \frac{3}{8} w \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \frac{x^2+y^2}{2} + \\ + \frac{5}{16} w^3 \sin^3 \tfrac{1}{2}\beta \frac{x^3-y^3}{2} + \frac{35}{128} w^4 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \frac{x^4+y^4}{2} + \\ + \frac{63}{256} w^5 \sin^5 \tfrac{1}{2}\beta \frac{x^5-y^5}{2} + \frac{231}{1024} w^6 \sin^6 \tfrac{1}{2}\beta \frac{x^6+y^6}{2} + \ldots\Big]$$

$$\frac{N_2 - N_1}{2} = N_m \tfrac{1}{2} w \sin \tfrac{1}{2}\beta \frac{x+y}{2}\Big[1 + \frac{3}{4} w \sin \tfrac{1}{2}\beta (x-y) + \\ + \frac{5}{8} w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta (x^2 - xy + y^2) + \frac{35}{64} w^3 \sin^3 \tfrac{1}{2}\beta (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) + \\ + \frac{63}{128} w^4 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta (x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) + \ldots\Big]$$

Voeren wij hierin wederom de waarden van x en y

in, vervangen tusschen de vierkante haakjes $\cos^2 \frac{1}{2}\beta$ door $(1 - \sin^2 \frac{1}{2}\beta)$ en rangschikken volgens $\sin \frac{1}{2}\beta$, dan komt er:

$$\frac{N_2 + N_1}{2} = N_m \Big[1 + \tfrac{1}{2}\, w \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \Big\{\cos 2\,\varphi_m + \frac{3}{4}\, w \sin^2 2\,\varphi_m\Big\} +$$

$$+ \frac{3}{8}\, w^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \Big\{\cos 4\varphi_m + \frac{5}{4}\, w \sin 4\varphi_m \sin 2\varphi_m + \frac{35}{48} w^2 \sin^4 2\varphi_m\Big\} +$$

$$+ \frac{5}{16}\, w^3 \sin^6 \tfrac{1}{2}\beta \Big\{\cos 6\,\varphi_m + \frac{7}{4}\, w \sin 6\,\varphi_m \sin 2\,\varphi_m +$$

$$\frac{63}{32}\, w^2 \sin 4\,\varphi_m \sin^3 2\,\varphi_m + \frac{231}{320}\, w^3 \sin^6 2\,\varphi_m\Big\} + \ldots\Big] \ldots \quad (44)$$

$$\frac{N_2 - N_1}{2} = N_m\, \tfrac{1}{2}\, w \sin \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\beta \sin 2\varphi_m \Big[1 + w \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \Big\{\frac{3}{2} \cos 2\,\varphi_m +$$

$$+ \frac{5}{8}\, w \sin^2 2\,\varphi_m\Big\} + w^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \Big\{\frac{5}{8}\,(3\cos^2 2\varphi_m - \sin^2 2\,\varphi_m) +$$

$$+ \frac{35}{16}\, w \sin^2 2\,\varphi_m \cos 2\,\varphi_m + \frac{63}{128}\, w^2 \sin^4 2\varphi_m\Big\} +$$

$$+ w^3 \sin^6 \tfrac{1}{2}\beta \Big\{\frac{35}{16}\,(\cos^3 2\,\varphi_m - \sin^2 2\,\varphi_m \cos 2\,\varphi_m) +$$

$$+ \frac{63}{64}\, w \Big(5 \sin^2 2\varphi_m \cos^2 2\varphi_m - \sin^4 2\varphi_m\Big) + \frac{693}{256} w^2 \sin^4 2\varphi_m \cos 2\varphi_m +$$

$$+ \frac{429}{1024}\, w^3 \sin^6 2\,\varphi_m\Big\} + \ldots\Big] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Door in formule (13) voor φ_1 en φ_2 de waarden $\varphi_m - \frac{1}{2}\beta$ en $\varphi_m + \frac{1}{2}\beta$ in te voeren, vindt men:

$$p = e^2 \Big[N_2 \sin(\varphi_m + \tfrac{1}{2}\beta) - N_1 \sin(\varphi_m - \tfrac{1}{2}\beta)\Big] =$$

$$= e^2 \Big[(N_2 + N_1) \cos \varphi_m \sin \tfrac{1}{2}\beta + (N_2 - N_1) \sin \varphi_m \cos \tfrac{1}{2}\beta\Big]$$

Substitueert men hierin voor e^2 de waarde $\dfrac{w}{1 + w \sin^2 \varphi_m}$

die uit (43) volgt en vermenigvuldigt met $\frac{\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}$ dan vindt men:

$$\frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}=w\left[\frac{N_2+N_1}{2}\,\frac{\cos^2\varphi_m}{1+w\sin^2\varphi_m}+\frac{N_2-N_1}{2}ctg\tfrac{1}{2}\beta\frac{\sin\varphi_m\cos\varphi_m}{1+w\sin^2\varphi_m}\right]$$

en door hierin de bovenstaande uitdrukkingen voor $\frac{N_2+N_1}{2}$ en $\frac{N_2-N_1}{2}$ over te brengen vindt men, na behoorlijke herleiding:

$$\frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}=N_m w\cos^2\varphi_m\Big[1+w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\Big\{\tfrac{1}{2}(2\cos2\varphi_m-1)+\frac{5}{8}w\sin^22\varphi_m\Big\}+$$
$$+w^2\sin^4\tfrac{1}{2}\beta\Big\{\frac{3}{8}(4\cos^22\varphi_m-2\cos2\varphi_m-1)+\frac{7}{16}w\sin^22\varphi_m(4\cos2\varphi_m-1)+$$
$$+\frac{63}{128}w^2\sin^42\varphi_m\Big\}+w^3\sin^6\tfrac{1}{2}\beta\Big\{\frac{5}{16}(8\cos^32\varphi_m-4\cos^22\varphi_m-$$
$$-4\cos2\varphi_m+1)+\frac{45}{64}w\sin^22\varphi_m(6\cos^22\varphi_m-2\cos2\varphi_m-1)+$$
$$+\frac{99}{256}w^2\sin^42\varphi_m(6\cos2\varphi_m-1)+\frac{429}{1024}w^3\sin^62\varphi_m\Big\}+\dots\Big],\ldots(46)$$

Trekken wij deze uitdrukking nog af van $\frac{N_2+N_1}{2}$ en nemen in aanmerking dat

$$N_m(1-w\cos^2\varphi_m)=N_m\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi_m}=R_m$$

is, dan vinden wij:

$$\frac{N_2+N_1}{2}-\frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}=R_m\Big[1+\tfrac{1}{2}w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\Big\{\cos2\varphi_m+\frac{5}{4}w\sin^22\varphi_m\Big\}+$$
$$+\frac{3}{8}w^2\sin^4\tfrac{1}{2}\beta\Big\{\cos4\varphi_m+\frac{7}{4}w\sin4\varphi_m\sin2\varphi_m+\frac{21}{16}w^2\sin^42\varphi_m\Big\}+$$
$$+\frac{5}{16}w^3\sin^6\tfrac{1}{2}\beta\Big\{\cos6\varphi_m+\frac{9}{4}w\sin6\varphi_m\sin2\varphi_m+\frac{99}{32}w^2\sin4\varphi_m\sin^32\varphi_m+$$
$$+\frac{429}{320}w^3\sin^62\varphi_m\Big\}+\dots\Big],\ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

§ 14. Ontwikkelen wij verder alleen tot op grootheden van de tiende orde na, waarbij wij e, s', β en $\lambda \cos\varphi_m$ als grootheden van de eerste orde beschouwen, dan kunnen wij voor de hiervoor gevonden uitdrukkingen schrijven: *)

$$\frac{N_2+N_1}{2}=N_m\Big[1+\tfrac{1}{2}w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\Big\{\cos 2\varphi_m+\frac{3}{4}w\sin^2 2\varphi_m\Big\}+$$
$$+\frac{3}{8}w^2\sin^4\tfrac{1}{2}\beta\cos 4\varphi_m+T_{10}\Big], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

$$\frac{N_2+N_1}{2}-\frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}=R_m\Big[1+\tfrac{1}{2}w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\Big\{\cos 2\varphi_m+\frac{5}{4}w\sin^2 2\varphi_m\Big\}+$$
$$+\frac{3}{8}w^2\sin^4\tfrac{1}{2}\beta\cos 4\varphi_m+T_{10}\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

$$\frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}=N_m w\cos^2\varphi_m\Big[1+\tfrac{1}{2}w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta(2\cos 2\varphi_m-1)+T_6\Big]. \quad (50)$$

Voor de uitdrukking $\frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{1}{2}s'}$, in formule (40) kunnen wij schrijven:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\beta+\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}s'+\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}s'\,tg^2\tfrac{1}{2}s'$$

en door nu deze waarde even als (48) en (50) in (40) over te brengen, vinden wij:

$$P+L\,ctg\,A'_m=N_m\Big[1+\tfrac{1}{2}w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\Big\{\cos 2\varphi_m+\frac{3}{4}w\sin^2 2\varphi_m\Big\}-$$
$$-w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m+w^2\sin^4\tfrac{1}{2}\beta\Big\{\frac{3}{8}\cos 4\varphi_m-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi_m(2\cos 2\varphi_m-1)\Big\}-$$
$$-w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\varphi_m-w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}s'\,tg^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\varphi_m+T_{10}\Big]. \quad (51)$$

Voor de uitdrukking $\frac{\sin^2\frac{1}{2}s'-\sin^2\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{1}{2}s'}$ in formule (41) kunnen wij schrijven:

---

*) T_{10} en T_6 stellen termen van de 10de respectievelijk 6de orde voor.

$$(sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda cos^2\varphi_m + sin^2 \tfrac{1}{2}\beta cos^2 \tfrac{1}{2}\lambda - sin^2 \tfrac{1}{2}\beta)\,(1 + sin^2 \tfrac{1}{2}s' + sin^2 \tfrac{1}{2}s' tg^2 \tfrac{1}{2}s') =$$
$$= sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^2 \varphi_m - sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda + sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^2 \varphi_m\, sin^2 \tfrac{1}{2}s' -$$
$$- sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, sin^2 \tfrac{1}{2}s' + sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^2 \varphi_m\, sin^2 \tfrac{1}{2}s'\, tg^2 \tfrac{1}{2}s' -$$
$$- sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, sin^2 \tfrac{1}{2}s'\, tg^2 \tfrac{1}{2}s'.$$

Brengen wij deze waarde in (41) over, dan wordt de laatste term van de 10[de] orde en kan dus verwaarloosd worden; brengen wij daarin ook de uitdrukkingen (49) en (50) over en merken op, dat:

$$N_m w = N_m \frac{e^2}{1 - e^2 sin^2 \varphi_m} = R_m \frac{e^2}{1 - e^2} \text{ is, dan vinden wij:}$$

$$P - L\, tg\, A'_m = R_m \Big[1 + \tfrac{1}{2} w\, sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \Big\{cos\, 2\varphi_m + \frac{5}{4} w\, sin^2 2\varphi_m\Big\} -$$
$$- \frac{e^2}{1 - e^2} sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^4 \varphi_m + \frac{3}{8} w^2 sin^4 \tfrac{1}{2}\beta\, cos\, 4\varphi_m +$$
$$+ \frac{e^2}{1-e^2} sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^2\varphi_m - \frac{e^2}{1-e^2} w\, sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^4\varphi_m \frac{2cos2\varphi_m - 1}{2} -$$
$$- \frac{e^2}{1-e^2} sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^4\varphi_m\, sin^2 \tfrac{1}{2}s' + \frac{e^2}{1-e^2} sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^2\varphi_m\, sin^2 \tfrac{1}{2}s' -$$
$$- \frac{e^2}{1-e^2} sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^4 \varphi_m\, sin^2 \tfrac{1}{2}s'\, tg^2 \tfrac{1}{2}s' + T_{10}\Big] \quad \ldots\ldots (52)$$

Voor de ontwikkeling van $\frac{Q}{P}$ tot op grootheden van de 9[de] orde na hebben wij:

$$\frac{N_2 - N_1}{2} = N_m w\, sin \tfrac{1}{2}\beta\, cos \tfrac{1}{2}\beta\, sin\varphi_m cos\varphi_m \Big[1 + \frac{3}{2} w\, sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, cos2\varphi_m + T_6\Big]$$

$$\frac{p\, cos\, \varphi_m}{2 sin \tfrac{1}{2}\beta} tg\varphi_m \frac{sin \tfrac{1}{2}\beta\, cos \tfrac{1}{2}\beta}{cos^2 \tfrac{1}{2}s'} = N_m\, w\, sin \tfrac{1}{2}\beta\, cos \tfrac{1}{2}\beta\, sin\,\varphi_m cos\,\varphi_m \Big[\frac{1}{cos^2 \tfrac{1}{2}s'} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} w \frac{sin^2 \tfrac{1}{2}\beta}{cos^2 \tfrac{1}{2}s'} (2\, cos\, 2\varphi_m - 1) + T_6\Big]$$

en hieruit volgt door aftrekking:

$$Q = N_m\, w \sin\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\beta \sin\varphi_m \cos\varphi_m \Big[1 - \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}s'} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} w \frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{1}{2}s'}(3\cos 2\varphi_m \cos\tfrac{1}{2}s' - 2\cos 2\varphi_m + 1) + T_6\Big]$$

of als wij $\sin^2\frac{1}{2}\beta$ door $\sin^2\frac{1}{2}s'\,\dfrac{\cos^2 A'_m}{\cos^2\frac{1}{2}\lambda}$ vervangen en verder ontwikkelen:

$$Q = -N_m\, w \sin\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\beta \sin\varphi_m \cos\varphi_m\, tg^2\tfrac{1}{2}s' \Big[1 -$$

$$- w\cos^2 A'_m \frac{\cos 2\varphi_m + 1 - 3\sin^2\frac{1}{2}s'\cos 2\varphi_m}{2\cos^2\frac{1}{2}\lambda} + T_4\Big]$$

$$= -N_m w \sin\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\beta \sin\varphi_m \cos\varphi_m tg^2\tfrac{1}{2}s' \Big[1 - w\cos^2\varphi_m \cos^2 A'_m + T_4\Big]. \quad (53)$$

Voor de waarde van P vinden wij uit (51) en (52) tot op grootheden van de vierde orde na:

$$P = (P + L\,ctg\,A'_m)\sin^2 A'_m + (P - L\,tg\,A'_m)\cos^2 A'_m =$$
$$= N_m \sin^2 A'_m + R_m \cos^2 A'_m + T_4 =$$
$$= N_m\Big[1 - w\cos^2\varphi_m \cos^2 A'_m + T_4\Big]. \quad \ldots\ldots\ (54)$$

Door deze uitdrukking op (53) te deelen vinden wij eindelijk:

$$\frac{Q}{P} = -w \sin\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\beta\, tg^2\tfrac{1}{2}s' \sin\varphi_m \cos\varphi_m + T_9 \ldots\ (55)$$

waaruit blijkt, dat $\dfrac{Q}{P}$ eene grootheid van de 5[de] orde is.

Voor L vinden wij eveneens uit (51) en (52) tot op grootheden van de 4[de] orde:

$$L = \Big[(P + L\,ctg\,A'_m) - (P - L\,tg\,A'_m)\Big]\sin A'_m \cos A'_m =$$
$$= (N_m - R_m)\sin A'_m \cos A'_m + T_4 =$$
$$= N_m\, w\cos^2\varphi_m \sin A'_m \cos A'_m + T_4. \quad \ldots\ldots\ (56)$$

§ 15. Voor $tg\,\Delta$ vinden wij uit (27) met behulp van (54) en (56)

$$tg\,\Delta = \frac{w\,cos^2\,\varphi_m\,sin\,A'_m\,cos\,A'_m}{1 - w\,cos^2\,\varphi_m\,cos^2 A'_m} + T_4\,, \quad . \; . \; . \; . \; (57)$$

waaruit volgt, dat Δ eene grootheid is van de 2[de] orde. Uit (26) volgt dan verder, dat δ van de 7[de] orde en bijgevolg $\frac{Q}{P}\,tg\,\tfrac{1}{2}\,\delta$ van de 12[de] orde is, waaruit volgt:

$$tg\,\Delta = \frac{L}{P} + T_{12}\,, \; . \; (58)$$

$$P + L\,ctg\,A'_m + Q\,tg\,\tfrac{1}{2}\,\delta\,ctg\,A'_m = P + L\,ctg\,A'_m + T_{12}\,, \, . \, . \, (59)$$

$$P - L\,tg\,A'_m - Q\,tg\,\tfrac{1}{2}\,\delta\,tg\,A'_m = P - L\,tg\,A'_m + T_{12} \, . \; . \; . \; (60)$$

Deelen wij nu de vergelijkingen (38) op elkander, dan vinden wij in verband met (51), (52), (59) en (60) tot op grootheden van de 6[de] orde na *)

$$tg\,A_m = \frac{N_m}{R_m}\,tg A'_m \left[1 - \frac{e^2}{1-e^2}\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\,\beta\,sin^2\,\varphi_m + \right.$$
$$\left. + \frac{e^2}{1-e^2}\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\,\lambda\,cos^4\,\varphi_m + T_6\right] = \frac{tg\,A'_m}{1 - w\,cos^2\,\varphi_m}\left[1 - \right.$$
$$\left. - \frac{e^2}{1-e^2}\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\,\beta\,sin^2\varphi_m + \frac{e^2}{1-e^2}\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\lambda\,cos^4\,\varphi_m + T_6\right] . \, . \, (61)$$

of tot op grootheden van de 4[de] orde na:

$$tg\,A_m = \frac{tg\,A'_m}{1 - w\,cos^2\,\varphi_m} + T_4 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (62)$$

---

*) De in deze formule voorkomende term met $sin^2\,\tfrac{1}{2}\,\beta$ is eigenlijk $w\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\,\beta\,(sin^2\,\varphi_m + w\,sin^2\,\varphi_m\,cos^2\,\varphi_m)$, maar gaat met verwaarlozing van een term van de orde $e^6\,\beta^2$ in de bovenstaande over (zie form. (71) hierachter).

Hieruit vinden wij voor Δ gemakkelijk eene uitdrukking in A_m met dezelfde nauwkeurigheid als waarmede zij in (57) in A'_m is uitgedrukt.

$$tg\,\Delta = tg\,(A_m - A'_m) = \frac{tg\,A_m - tg\,A'_m}{1 + tg\,A_m\,tg\,A'_m} =$$

$$= \frac{tg\,A_m - tg\,A_m(1 - w\cos^2\varphi_m) + T_4}{1 + tg^2 A_m(1 - w\cos^2\varphi_m) + T_4} = \frac{w\cos^2\varphi_m \sin A_m \cos A_m}{1 - w\cos^2\varphi_m \sin^2 A_m} + T_4 \,.\,.\,(63)$$

Voor de berekening van δ hebben wij volgens (26) de waarden van $sin\ \Delta$ en $cos\ \Delta$ noodig. Daarvoor vinden wij:

$$\sin\Delta = \sin(A_m - A'_m) = \sin A_m \cos A'_m - \cos A_m \sin A'_m$$

of als wij hierin de waarde van $\sin A_m \cos A'_m$ uit (61) namelijk:

$$\sin A_m \cos A'_m = \frac{\sin A'_m \cos A_m}{1 - w\cos^2\varphi_m}\Big[1 - \frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\,\sin^2\varphi_m + $$
$$+ \frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\,\cos^4\varphi_m + T_6\Big],$$

substitueeren:

$$\sin\Delta = \sin A'_m \cos A_m\Big[\frac{1}{1 - w\cos^2\varphi_m} -$$
$$- \frac{e^2}{1-e^2}\,\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\,\sin^2\varphi_m - \sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\,\cos^4\varphi_m}{1 - w\cos^2\varphi_m} - 1 + T_6\Big] =$$
$$= \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_m \sin A'_m \cos A_m\Big[1 - \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\,tg^2\varphi_m - \sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m}{1 - w\cos^2\varphi_m} + T_4\Big].(64)$$

Voor $cos\ \Delta$ vinden wij:

$$\cos\Delta = \cos A_m \cos A'_m + \sin A_m \sin A'_m$$

of als wij hierin de waarde van $\sin A'_m$ uit (62) namenlijk:

$$\sin A'_m \doteq \cos A'_m\,tg\,A_m(1 - w\cos^2\varphi_m) + T_4$$

substitueeren:

$$\cos \Delta = \frac{\cos A'_m}{\cos A_m}\left[1 - w \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m\right] + T_4 \ldots (65)$$

Deze uitdrukking in (26) overbrengende, vinden wij:

$$\tfrac{1}{2}\delta = \frac{Q}{P}\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_m \sin A'_m \cos A'_m \frac{1 - w\cos^2\varphi_m \sin^2 A_m}{1 - w\cos^2\varphi_m}\Big[$$

$$\Big[1 - w\cos^2\varphi_m - \sin^2\tfrac{1}{2}\beta\, tg^2\varphi_m + \sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m\Big] + T_{11}$$

of als wij hierin noch de waarde van $\frac{Q}{P}$ uit (55) overbrengen en op vergelijking (6) letten:

$$\tfrac{1}{2}\delta = -w\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\lambda\cos\tfrac{1}{2}\lambda\sec^2\tfrac{1}{2}s'\sin\varphi_m\cos^4\varphi_m\Big[1-$$

$$-w\cos^2\varphi_m\sin^2 A_m - \sin^2\tfrac{1}{2}\beta\, tg^2\varphi_m + \sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m\Big] + T_{11} \ldots (66)$$

Deze waarde van $\frac{1}{2}\delta$ bereikt voor den grootsten afstand van $^1/_{10}$ van den straal des equators hoogstens de waarde van 0",00015 en kan dus nog altijd verwaarloosd worden, zoodat men altijd α' in plaats van α kan nemen.

Het zal niet noodig zijn dit hier nader te ontwikkelen; wij kunnen volstaan met te verwijzen naar het genoemde werk van HELMERT, waar dit onderwerp in § 8 (Regel van DALBY) van kapittel 4, blz 150 uitvoerig behandeld wordt. Alleen willen wij opmerken, dat de daar beschouwde grootheid δ zelve is, dus het dubbel van bovenstaande correctie $\frac{1}{2}\delta$.

§ 16. Voor de ontwikkeling van den factor $\frac{\cos\frac{1}{2}s'\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}\sigma}$ hebben wij volgens (34) en (35):

$$\frac{\cos \frac{1}{2} s' \cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} s} = \sqrt{\cos^2 \frac{1}{2} s' \cos^2 \frac{1}{2} \delta \left(1 + tg^2 \frac{1}{2} s\right)} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 \tfrac{1}{2} s' \cos^2 \tfrac{1}{2} \delta + \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \cos^2 \Delta} = \sqrt{1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \Delta - \cos^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta} =$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \Delta + T_{14}} = 1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \Delta + T_{12}$$

$$\frac{1}{\cos \frac{1}{2} \sigma} = \sqrt{1 + tg^2 \tfrac{1}{2} \sigma} = \sqrt{1 + \frac{Q^2}{P^2} ctg^2 \tfrac{1}{2} s' \frac{\cos^2 \Delta}{\cos^2 \frac{1}{2} \delta}} =$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} \frac{Q^2}{P^2} ctg^2 \tfrac{1}{2} s' \cos^2 \Delta + T_{16}$$

en dus:

$$\frac{\cos \frac{1}{2} s' \cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} \sigma} = 1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \Delta + \tfrac{1}{2} \frac{Q^2}{P^2} ctg^2 \tfrac{1}{2} s' \cos^2 \Delta + T_{12}$$

Substitueeren wij hierin nog de waarden van Δ, s' en $\frac{Q^2}{P^2}$ volgens (4), (55) en (64), dan vinden wij tot op grootheden van de tiende orde:

$$\frac{\cos \frac{1}{2} s' \cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} \sigma} = 1 - \tfrac{1}{2} \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^6 \varphi_m \cos^2 A_m \Big[1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta tg^2 \varphi_m +$$

$$+ 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^2 \varphi_m\Big] + \tfrac{1}{2} w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta tg^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m + T_{10} \quad . \; . \; (67)$$

§ 17. Ontwikkelen wij thans de logarithmen van de twee factoren, die in de formules (39) voorkomen en die wij kortheidshalve door V en W zullen voorstellen, namelijk:

$$V = (P + L \, ctg \, A'_m + Q \, tg \, \tfrac{1}{2} \delta \, ctg \, A'_m) \frac{\cos \frac{1}{2} s' \cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} \sigma}$$

$$W = (P - L \, tg \, A'_m - Q \, tg \, \tfrac{1}{2} \delta \, tg \, A'_m) \frac{\cos \frac{1}{2} s' \cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} \sigma}$$

dan vinden wij tot op termen van de 8ste orde na, ingevolge (51), (52), (59), (60) en (67):

$$\log V = \log N_m + M w \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \left\{ \tfrac{1}{2} \cos 2 \varphi_m + \frac{3}{8} w \sin^2 2 \varphi_m \right\} -$$

$$- M w \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \varphi_m - M w \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \varphi_m -$$

$$- \tfrac{1}{2} M \left(\frac{e^2}{1 - e^2} \right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^6 \varphi_m \cos^2 A_m + T_8,$$

$$\log W = \log R_m + M w \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \left\{ \tfrac{1}{2} \cos 2 \varphi_m + \frac{5}{8} w \sin^2 2 \varphi_m \right\} -$$

$$- M \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^4 \varphi_m + M \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^2 \varphi_m -$$

$$- M \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^4 \varphi_m \sin^2 \tfrac{1}{2} s' -$$

$$- \tfrac{1}{2} M \left(\frac{e^2}{1 - e^2} \right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^6 \varphi_m \cos^2 A_m + T_8.$$

De hierbij behoorende termen van de 8ste orde zijn,

voor $\log V$:

$$- \frac{1}{8} M w^2 \sin^4 \tfrac{1}{2} \beta \cos^2 2 \varphi_m - \tfrac{1}{2} M w^2 \sin^4 \tfrac{1}{2} \beta \sin^4 \varphi_m +$$

$$+ M w^2 \sin^4 \tfrac{1}{2} \beta \tfrac{1}{2} \cos 2 \varphi_m \sin^2 \varphi_m + M w^2 \sin^4 \tfrac{1}{2} \beta \left\{ \frac{3}{8} \cos 4 \varphi_m - \right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{2} \sin^2 \varphi_m (2 \cos 2 \varphi_m - 1) \right\} - M w \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \tfrac{1}{2} s' tg^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \varphi_m +$$

$$+ M \left(\frac{e^2}{1 - e^2} \right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \cos^4 \varphi_m \sin^2 \varphi_m \cos^2 A_m -$$

$$- M \left(\frac{e^2}{1 - e^2} \right)^2 \sin^4 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^8 \varphi_m \cos^2 A_m +$$

$$+ \tfrac{1}{2} M w^2 \sin^3 \tfrac{1}{2} \beta \, tg^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

en voor *log W*:

$$-\frac{1}{8} M\, w^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \cos^2 2\varphi_m - \tfrac{1}{2} M \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^8 \varphi_m +$$

$$+ M w \frac{e^2}{1-e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^4 \varphi_m \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi_m + \frac{3}{8} M w^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \cos 4\varphi_m -$$

$$- M \frac{e^2}{1-e^2} w \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^4 \varphi_m \frac{2\cos 2\varphi_m - 1}{2} +$$

$$+ M \frac{e^2}{1-e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^2 \varphi_m \sin^2 \tfrac{1}{2} s' -$$

$$- M \frac{e^2}{1-e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^4 \varphi_m \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \, tg^2 \tfrac{1}{2} s' +$$

$$+ M \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \varphi_m \cos^4 \varphi_m \cos^2 A_m -$$

$$- M \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^8 \varphi_m \cos^2 A_m +$$

$$+ \tfrac{1}{2} M w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \, tg^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (69)$$

Brengen wij nu, zooals wij in de eerste afdeeling gedaan hebben, alleen de termen van de zesde en van lagere orden in rekening, dan kunnen wij bovenstaande uitdrukkingen voor *log V* en *log W* nog vereenvoudigen. Splitsen wij dan tevens de termen, die daarin voorkomen in twee groepen, in eene waarin alleen de termen voorkomen, die aan *log V* en *log W* gemeenschappelijk zijn en dus geen invloed hebben op de waarde van A_m en die wij door *log* q_3 zullen voorstellen en in eene tweede groep, die de termen bevat, die alleen voorkomen in één van beide uitdrukkingen en die wij door *log* q_1 en *log* q_2 voorstellen, dan kunnen wij stellen:

$$V = N_m q_1 q_3$$
$$W = R_m q_2 q_3$$

waaruit de formules (22), (23) en (24) van afdeeling A voortvloeien.

Tot de termen van $log\, q_3$ kunnen wij rekenen:

$$\tfrac{1}{2} M w \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \cos 2 \varphi_m + \frac{5}{8} M w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 2 \varphi_m -$$

$$- \tfrac{1}{2} M \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^6 \varphi_m \cos^2 A_m.$$

In den eersten term hiervan schrijven wij voor w de waarde:

$$w = \frac{e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi_m} = \frac{e^2}{1-e^2} \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi_m} = \frac{e^2}{1-e^2} \frac{R_m}{N_m}.$$

In den tweeden term kunnen wij voor w^2 eene constante waarde nemen; nemen wij daarvoor $\frac{e^4}{1-e^2}$, dan verwaarloozen wij een term van de 8ste orde, namelijk:

$$\frac{5}{8} M \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 2 \varphi_m \left(w^2 - \frac{e^4}{1-e^2}\right) =$$

$$= \frac{5}{8} M \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 2 \varphi_m e^4 \frac{1-e^2-(1-e^2 \sin^2 \varphi_m)^2}{(1-e^2)(1-e^2 \sin^2 \varphi_m)^2} =$$

$$= -\frac{5}{8} M \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 2 \varphi_m e^6 (1-2 \sin^2 \varphi_m) + T_{10} =$$

$$= -\frac{5}{8} M e^6 \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 2 \varphi_m \cos 2 \varphi_m + T_{10},$$

die zoowel aan (68) als aan (69) moet toegevoegd worden.

Voor $log\, q_3$ kunnen wij dus schrijven:

$$log\, q_3 = \tfrac{1}{2} M \frac{e^2}{1-e^2} \frac{R_m}{N_m} \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \cos 2 \varphi_m +$$

$$+ \frac{5}{8} M \frac{e^4}{1-e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 2 \varphi_m - \tfrac{1}{2} M \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^6 \varphi_m \cos^2 A_m =$$

$$= \tfrac{1}{2} [1] \frac{R_m}{N_m} \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \cos 2 \varphi_m + [1] \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \varphi_m [2] \cos^2 \varphi_m -$$

$$- [1] \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^4 \varphi_m [3] \cos^2 \varphi_m \cos^2 A_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

dit is de formule (27) van afdeeling A.

Voor de termen van $log\, q_1$ blijven als nu over, in de eerste plaats:

$$- \frac{1}{4} M\, w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 2\, \varphi - M\, w \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \varphi_m =$$

$$= - M\, w \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \varphi_m (1 + w \cos^2 \varphi_m) =$$

$$= - M\, e^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \varphi_m \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m + e^2 \cos^2 \varphi_m}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^2} =$$

$$= - M \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \varphi_m \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^2 - e^4 \cos^4 \varphi_m}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^2}.$$

Met verwaarloozing van een term van de 8ste orde kunnen wij dus hiervoor schrijven:

$$- M \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \varphi_m$$

terwijl de verwaarloosde term, die aan (68) moet toegevoegd worden, is:

$$+ M\, e^6 \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \varphi_m \cos^4 \varphi_m + T_{10}. \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

De tweede term, die in $log\, q_1$ voorkomt, is:

$$- M\, w \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \varphi_m .$$

In dezen term van de zesde orde mogen wij w door eene constante vervangen; voor het gemak van de berekening nemen wij daarvoor $\frac{e^2}{1 - e^2}$ en verwaarloozen dus een term van de 8ste orde, die aan (68) moet worden toegevoegd; deze term is:

$$- M \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \varphi_m \left(w - \frac{e^2}{1 - e^2} \right) =$$

$$= + M\, e^4 \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m + T_{10}.$$

Stellen wij nu nog:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} s' = \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \cos^2 \tfrac{1}{2} \lambda + \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^2 \varphi_m ,$$

dan vinden wij voor $\log q_1$:

$$\log q_1 = -M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m - M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\lambda -$$

$$- M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m, \quad \dots \quad (72)$$

dat is de formule (25) van afdeeling A.

Onder de termen van $\log q_2$ komt de term

$$- M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}s'$$

voor, waarvoor wij kunnen schrijven:

$$-M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m\left[\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m+\sin^2\tfrac{1}{2}\beta-\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\right];$$

de laatste van deze termen namelijk:

$$+ M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^4\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}\beta$$

is van de achtste orde en moet toegevoegd worden aan (69). De overige termen geven te zamen met:

$$- M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m + M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m$$

na eene eenvoudige herleiding:

$$\log q_2 = -M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m - M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m +$$

$$+ M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m, \quad \dots\dots \quad (73)$$

dat is de formule (26) van afdeeling A.

§ 18. Ter beoordeeling van de nauwkeurigheid van de ontwikkelde formules hebben wij de verwaarloosde termen van de 8ste orde na te gaan. Vatten wij al die ter-

men samen en verdeelen ze in de drie zelfde groepen als de andere termen en brengen ze door verwaarloozing van termen van de 10[de] orde onder den eenvoudigsten vorm, dan vinden wij het hier volgende stel termen. De daar achter gevoegde cijfers geven de grootste positieve en negatieve waarden dier termen aan, voor een afstand gelijk aan één tiende van den straal des equators of 638 kilometer, in deelen van de tiende decimaal als eenheid.

Termen van de 8[ste] orde in $log\, q_1$

$+ \frac{1}{2} M e^4 sin^4 \frac{1}{2} s' sin^4 \varphi_m cos^4 A_m$	$+ 0{,}60 - 0{,}00$
$+ M e^4 sin^4 \frac{1}{2} s' sin^2 \varphi_m cos^2 \varphi_m cos^2 A_m$	$+ 0{,}30 - 0{,}00$
$+ M e^6 sin^2 \frac{1}{2} s' sin^2 \varphi_m cos^4 \varphi_m cos^2 A_m$	$+ 0{,}48 - 0{,}00$
$- M e^2 sin^6 \frac{1}{2} s' sin^2 \varphi_m cos^2 A_m$	$+ 0{,}00 - 0{,}45$

Termen van de 8[ste] orde in $log\, q_2$

$- \frac{1}{2} M e^4 sin^4 \frac{1}{2} s' cos^4 \varphi_m sin^4 A_m$	$+ 0{,}00 - 0{,}60$
$+ M e^4 sin^4 \frac{1}{2} s' sin^2 \varphi_m cos^2 \varphi_m sin^2 A_m cos^2 A_m$	$+ 0{,}08 - 0{,}00$
$- M e^2 sin^6 \frac{1}{2} s' cos^2 \varphi_m sin^2 A_m$	$+ 0{,}00 - 0{,}45$
$+ M e^2 sin^6 \frac{1}{2} s' sin^2 A_m cos^2 A_m$	$+ 0{,}11 - 0{,}00$
$+ M e^2 sin^6 \frac{1}{2} s' sin^4 A_m cos^2 A_m$	$+ 0{,}07 - 0{,}00$

Termen van de 8[ste] orde in $log\, q_3$

$+ \frac{1}{4} M e^4 sin^4 \frac{1}{2} s' (1 - 10\, sin^2 \varphi_m cos^2 \varphi_m) cos^4 A_m$	$+ 0{,}30 - 0{,}45$
$+ M e^4 sin^4 \frac{1}{2} s' sin^2 \varphi_m cos^2 \varphi_m sin^2 A_m cos^4 A_m$	$+ 0{,}02 - 0{,}00$
$- M e^4 sin^4 \frac{1}{2} s' cos^4 \varphi_m sin^4 A_m cos^2 A_m$	$+ 0{,}00 - 0{,}18$
$+ \frac{1}{2} M e^4 sin^4 \frac{1}{2} s' sin^2 \varphi_m cos^2 \varphi_m cos^2 A_m$	$+ 0{,}15 - 0{,}00$
$- \frac{5}{8} M e^6 sin^2 \frac{1}{2} s' sin^2 2 \varphi_m cos\, 2 \varphi_m cos^2 A_m$	$+ 0{,}77 - 0{,}77$

Nemen wij de sommen van de bovenstaande maximumwaarden van de termen der 8[ste] orde, dan vinden wij:

$log\, q_1$	$+ 1{,}38$	$- 0{,}45$
$log\, q_2$	$+ 0{,}26$	$- 1{,}05$
$log\, q_3$	$+ 1{,}24$	$- 1{,}40.$

In *log tg* A_m komt nu de uitdrukking *log* q_1 — *log* q_2 voor; de grootste fout, die door het verwaarloozen van de termen van de 8ste orde daarin kan ontstaan, zou dus zijn:

$$1{,}38 + 1{,}05 = 2{,}43$$

indien alle maximum-waarden gelijktijdig bereikt werden. Dit is echter op verre na niet het geval. Van de twee hoofdtermen b. v. in bovenstaande sommen, die daarin met de waarden + 0,60 en — 0,60 voorkomen, verkrijgt de eerste die maximum-waarde voor $\varphi_m = 90^0$, $A_m = 0^0$ als wanneer de tweede nul wordt; de tweede verkrijgt zijne grootste waarde voor $\varphi_m = 0$, $A_m = 90^0$ als wanneer de eerste nul wordt. De gezamentlijken invloed van beiden kan echter nooit hooger klimmen dan 0,60, zoodat van bovenstaand bedrag van 2,43 minstens 0,60 moet afgetrokken worden en dus hoogstens 1,83 overblijft.

Gaat men nu na, dat om in A_m een verschil te krijgen van 0,0001 secunde, in de tiende decimaal van *log tg* A_m een verschil moet voorkomen van 4,21 eenheden, dan blijkt het onmiddellijk, dat door het verwaarloozen van de termen van de achste orde geen fout kan ontstaan van de *helft van de vierde decimaal van de secunden* of 0",00005. In werkelijkheid zal die fout nog veel kleiner zijn, daar alleen voor hoeken van 45⁰ genoemd verschil ontstaat bij een verschil in de logarithme van 4,21 eenheden der tiende decimaal; voor andere azimuthen geeft een gelijk verschil in de *log tg* een kleiner verschil in den hoek.

De voornaamste termen, die in *log* q_1 en *log* q_2 verwaarloosd zijn, verkrijgen alleen hunne maximum-waarden voor $A_m = 0$ of $A_m = 90^0$ dus wanneer hun invloed op A_m zelve zoo klein mogelijk is. Het zal echter niet noodig zijn de werkelijke invloed van de verschillende termen op A_m na te gaan, aangezien uit het bovenstaande reeds genoegzaam blijkt, dat voor de bedoelde afstanden de fout zoo klein is, dat zij zeker altijd verwaarloosd kan worden.

De grootste waarde van den invloed van de verwaarloosde termen in *log* q_1 en *log* q_2 op *log* K, is, zoo als gemakkelijk

valt na te gaan, hoogstens gelijk aan de grootste van beide termen, dus hier hoogstens + 1,38 of — 1,05; voegt men daar nog bij de maximum-waarde van de termen, die alleen invloed hebben op *log K* niet op A_m (3[de] groep), dan vindt men:

$$+ 1{,}38 + 1{,}24 = + 2{,}62$$
$$- 1{,}05 - 1{,}40 = - 2{,}45$$

Ook deze maximum-waarden zullen, om gelijke reden als boven, niet bereikt worden. Om slechts een voorbeeld te noemen, de twee termen, die in bovenstaande som van + 2,62 voorkomen met de waarden 0,48 en 0,77, bereiken te zamen nooit de waarde 0,48 + 0,77 = 1,25, maar hoogstens 0,90, waardoor + 2,62 zeker reeds gereduceerd wordt tot + 2,27.

Gaat men nu na, dat, om in de koorde een verschil te krijgen van een millimeter, in de logarithme een verschil van 6,81 eenheden van de tiende decimaal moet voorkomen, dan is het duidelijk, dat in de koorde nooit eene fout kan ontstaan ter grootte van *één halven millimeter*.

Alles te zamen vattende zien wij dus, dat de termen van de 8[ste] orde bij den afstand van 638 kilometer nog altijd verwaarloosd kunnen worden.

Ten einde den invloed van de termen van de 8[ste] orde na te gaan op het hiervoor behandelde voorbeeld Berlijn-Koningsbergen, volgen hieronder de waarden van die termen in deelen van de tiende decimaal.

+ 0,006	— 0,022	— 0,008
+ 0,028	+ 0,022	+ 0,005
+ 0,038	— 0,041	— 0,009
— 0,021	+ 0,025	+ 0,028
	+ 0,020	+ 0,080
+ 0,051	+ 0,004	+ 0,096

De invloed op *log tg* A_m is dus:

$$+ 0{,}051 - 0{,}004 = 0{,}047$$

overeenkomende met:

$$0'',00000092$$

en de invloed op *log K*:

$$+ 0,041 + 0,096 = 0,137$$

overeenkomende met:

0,017 millimeter.

De waarde van $\frac{1}{2}\,\delta$ volgens formule (66), dat is de fout in $\frac{1}{2}\,\alpha$, is gelijk aan:

$$0'',000021$$

§ 19. De lengte van den elliptischen boog S tusschen de punten $A_1\,A_2$ zullen wij hier alleen ontwikkelen tot op grootheden van de orde $e^2\,s^5$. Daar het verschil van de twee elliptische bogen $A_1\,A_2$ en $A_2\,A_1$ met de geodetische lijn slechts eene grootheid van de orde $e^4\,s^5$ is, die zelfs bij een afstand van 1000 kilometer nog geen millimeter bedraagt, zoo hebben wij tusschen beide bogen geen onderscheid te maken.

Stellen wij de lengte van den cirkelboog door A_1 en A_2 getrokken, die in A_1 met de normale doorsnede in dat punt dezelfde raaklijn heeft, door S_1 en den straal van dien cirkelboog door R_1 voor, dan is:

$$S_1 = R_1\,s_1$$

Substitueeren wij hierin voor R_1 de waarde, die uit (37) volgt, als wij K door $2\,R_1\,\sin\frac{1}{2}\,s_1$ vervangen, namelijk:

$$R_1 = \frac{P}{\cos\Delta}\,\frac{\sin s'\cos\frac{1}{2}\,\delta}{2\sin\frac{1}{2}\,s_1\cos\frac{1}{2}\,s\cos\frac{1}{2}\,\sigma}$$

dan vinden wij:

$$S_1 = \frac{P}{\cos\Delta}\,s'\,\frac{\sin s'}{s'}\,\frac{\frac{1}{2}\,s_1}{\sin\frac{1}{2}\,s_1}\,\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\,s}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\,\delta}{\cos\frac{1}{2}\,\sigma}.$$

Bij den graad van nauwkeurigheid boven aangegeven kun-

nen wij voor $\frac{\cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} \sigma}$ de eenheid schrijven, terwijl wij de uitdrukking $\frac{\sin s'}{s'} \frac{\frac{1}{2} s_1}{\sin \frac{1}{2} s_1} \frac{1}{\cos \frac{1}{2} s}$ slechts te ontwikkelen hebben tot op grootheden van de orde s^4 waardoor wij feitelijk tot op grootheden van de orde $e^2 s^4$ ontwikkelen, aangezien voor $e^2 = 0$, $s = s_1 = s'$ wordt en dus alle termen, behoorlijk ontwikkeld, minstens e^2 als factor bezitten.

Wij vinden dus:

$$\frac{\sin s'}{s'} \frac{\frac{1}{2} s_1}{\sin \frac{1}{2} s_1} \frac{1}{\cos \frac{1}{2} s} = 1 - \frac{1}{6} s'^2 + \frac{1}{24} s_1^2 + \frac{1}{8} s^2$$

of als wij s_1 door $s - \sigma$ vervangen en den term σ^2, die van de orde $e^4 s^4$ is, verwaarloozen:

$$1 - \frac{1}{6} s'^2 + \frac{1}{6} s^2 - \frac{1}{12} s \sigma.$$

Voor s^2 volgt nu uit (34) $s'^2 \cos^2 \Delta$ en voor $s\sigma$ uit (33) $4 \frac{Q}{P} \cos^2 \Delta$, waardoor bovenstaande uitdrukking overgaat in:

$$1 - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta - \frac{1}{3} \frac{Q}{P} \cos^2 \Delta,$$

zoodat wij voor S_1 vinden:

$$S_1 = \frac{P}{\cos \Delta} s' \left(1 - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta - \frac{1}{3} \frac{Q}{P} \cos^2 \Delta\right) \ldots (74)$$

Voor den cirkelboog S_2, die door dezelfde punten gaat, maar in A_2 met de normale doorsnede in dat punt dezelfde raaklijn heeft, vindt men op overeenkomstige wijze:

$$S_2 = \frac{P}{\cos \Delta} s' \left(1 - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta + \frac{1}{3} \frac{Q}{P} \cos^2 \Delta\right) \ldots (75)$$

Uit deze formules blijkt, dat beide cirkelbogen alleen ver-

schillen door den term $\frac{1}{3} Q s' \cos \Delta$, die van de orde $e^2 s^4$ is en dus niet verwaarloosd kan worden.

Bij het ontwikkelen van dien term kunnen wij alle termen van de eerste orde in s ten opzichte van de eenheid verwaarloozen, zoodat wij dus alle daarvoor benoodigde grootheden slechts bij eerste benadering te berekenen hebben.

Voor den elliptischen boog S volgt dan uit de vergelijkingen (74) en (75) zelven:

$$S = \frac{P}{\cos \Delta} s'$$

of:

$$s' = \frac{S \cos \Delta}{P} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (76)$$

De waarde van P volgt uit (54); ten einde daaruit echter den hoek A'_m tusschen de haakjes te doen verdwijnen, substitueeren wij in:

$$\cos \Delta = \cos A_m \cos A'_m + \sin A_m \sin A'_m$$

voor $\sin A_m$ de waarde uit (62) namelijk:

$$\sin A_m = \frac{\cos A_m \operatorname{tg} A'_m}{1 - w \cos^2 \varphi_m}$$

waardoor wij vinden:

$$\cos \Delta = \frac{\cos A_m}{\cos A'_m} \; \frac{1 - w \cos^2 \varphi_m \cos^2 A'_m}{1 - w \cos^2 \varphi_m}$$

en waardoor (54) overgaat in:

$$P = N_m (1 - w \cos^2 \varphi_m) \cos \Delta \frac{\cos A'_m}{\cos A_m} = R_m \cos \Delta \frac{\cos A'_m}{\cos A_m}$$

Met behulp hiervan volgt uit (76):

$$s' = \frac{S}{R_m} \; \frac{\cos A_m}{\cos A'_m} \quad \ldots \ldots \ldots (77)$$

Uit (55) vinden wij met verwaarloozing van termen van de orde s ten opzichte van de eenheid:

$$\frac{Q}{P} = -\frac{1}{8} w \beta s'^2 \sin\varphi_m \cos\varphi_m$$

of als wij β door $s' \cos A'_m$ vervangen en op (77) letten:

$$\frac{Q}{P} = -\frac{1}{8} w \frac{S^3}{R^3_m} \sin\varphi_m \cos\varphi_m \frac{\cos^3 A_m}{\cos^2 A'_m}$$

Deze uitdrukking met het vierkant van (65) vermenigvuldigende komt er:

$$\frac{Q}{P}\cos^2\Delta = -\frac{1}{8}\frac{S^3}{R^3_m} w \sin\varphi_m \cos\varphi_m \cos A_m (1 - w\cos^2\varphi_m \sin^2 A_m)^2$$

en in (74) en (75) overgebracht komt er ten slotte:

$$S_1 = \frac{P}{\cos\Delta} s'\left(1 - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2\Delta\right) +$$
$$+ \frac{1}{24}\frac{S^4}{R^3_m} w \sin\varphi_m \cos\varphi_m \cos A_m (1 - w\cos^2\varphi_m \sin^2 A_m)^2 \dots . (78)$$

$$S_2 = \frac{P}{\cos\Delta} s'\left(1 - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2\Delta\right) -$$
$$- \frac{1}{24}\frac{S^4}{R^3_m} w \sin\varphi_m \cos\varphi_m \cos A_m (1 - w\cos^2\varphi_m \sin^2 A_m)^2 \dots . (78')$$

§ 20. De lengten der hier ontwikkelde cirkelbogen stemmen niet overeen met den elliptischen boog S; om deze er uit af te leiden moet nog eene correctie worden aangebracht. Om deze te vinden zullen wij eerst de verschillen opmaken tusschen een elliptischen boog in den meridiaan en de twee cirkelbogen, die door de eindpunten gaan en resp. in een van beide punten met den elliptischen boog dezelfde raaklijn hebben.

Stellen wij $\lambda = 0$ dan wordt:

$$A_m = 0,\ A'_m = 0,\ \Delta = 0 \text{ en } s' = \beta$$

en letten wij er op, dat uit (19) ingevolge (6) volgt:

$$P = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2} s'} \frac{\sin \frac{1}{2} \beta}{\sin \frac{1}{2} s'},$$

dan vinden wij voor de twee genoemde cirkelbogen uit (78) en (78')

$$S_1 = \left(\frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2} \beta}\right) \beta + \frac{1}{24} \frac{S^4}{R^3_m} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m$$

en

$$S_2 = \left(\frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2} \beta}\right) \beta - \frac{1}{24} \frac{S^4}{R^3_m} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m$$

of als wij op (47) letten:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= R_m \beta \left[1 + \frac{1}{8} w \beta^2 \left(\cos 2 \varphi_m + \frac{5}{4} w \sin^2 2 \varphi_m\right)\right] + \\ &\qquad + \frac{1}{24} \frac{S^4}{R^3_m} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m \\ S_2 &= R \beta \left[1 + \frac{1}{8} w \beta^2 \left(\cos 2 \varphi_m + \frac{5}{4} w \sin^2 2 \varphi_m\right)\right] - \\ &\qquad - \frac{1}{24} \frac{S^4}{R^3_m} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m \end{aligned}\right\} \ldots (79)$$

De lengte van den elliptischen boog vindt men uit:

$$S = \int_{-\frac{1}{2}\beta}^{+\frac{1}{2}\beta} R\, d x$$

waarin R de kromtestraal van den meridiaan voor de breedte $\varphi = \varphi_m + x$ voorstelt.

Met behulp van de reeks van TAYLOR vindt men:

$$R = R_m + x R'_m + \frac{1}{2} x^2 R''_m + \frac{1}{6} x^3 R'''_m + \frac{1}{24} x^4 R^{IV}_m + \text{enz.}$$

en hieruit volgt door integratie:

$$S = \beta R_m + \frac{1}{24} \beta^3 R''_m + \frac{1}{1920} \beta^5 R^{IV}_m + \text{enz.} =$$

$$= R_m \beta \left[1 + \frac{1}{24} \beta^2 \frac{R''_m}{R_m} + \frac{1}{1920} \beta^4 \frac{R^{IV}_m}{R_m} + \text{enz.}\right].$$

Door differentiatie vindt men verder:

$$R'_m = \frac{3}{2} R_m w \sin 2 \varphi_m$$

$$R''_m = 3 R_m w \cos 2 \varphi_m + \frac{15}{4} R_m w^2 \sin^2 2 \varphi_m$$

en dus tot op grootheden van de orde $e^2 \beta^5$ na:

$$S = R_m \beta \left[1 + \frac{1}{8} \beta^2 w \left(\cos 2 \varphi_m + \frac{5}{4} w \sin^2 2 \varphi_m\right)\right] \; . \; . \; (80)$$

Door hiervan de uitdrukkingen (79) af te trekken, vinden wij voor de aan te brengen correctie voor een boog van den meridiaan:

$$S - S_1 = -\frac{1}{24} \frac{S^4}{R^3_m} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m =$$

$$= -\frac{1}{24} \frac{S^4}{a^3} \frac{e^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^{7/2} \sin \varphi_m \cos \varphi_m}{(1 - e^2)^3}, \; . \; . \; . \; . \; . \; (81)$$

$$S - S_2 = + \frac{1}{24} \frac{S^4}{R^3_m} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m =$$

$$= + \frac{1}{24} \frac{S^4}{a^3} \frac{e^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^{7/2} \sin \varphi_m \cos \varphi_m}{(1 - e^2)^3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (81')$$

§ 21. Ten einde nu de correctie te vinden, die aan de

formule (78) moet worden aangebracht, moeten wij in bovenstaande uitdrukking (81.) a en e vervangen door de groote as a' en de excentriciteit e' van de normale doorsnede $A_1 A_2$ en φ_m door het gemiddelde φ'_m van de hoeken, die de twee normalen in A_1 en A_2 op die normale doorsnede met de groote as maken. Hierbij mogen wij echter overal grootheden van de eerste orde ten opzichte van grootheden van de nulde orde verwaarloozen. Dit in aanmerking genomen, vinden wij gemakkelijk uit de formules (5), (6), (7) en (8), voorkomende op de blz. 10 en 11 van de verhandeling van J. J. BAEYER. *Das Messen auf der Sphäroidischen Erdoberfläche*, Berlin 1862, de volgende uitdrukkingen:

$$a' = \frac{a\sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 \varphi_m \cos^2 A_m}}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)(1 - e^2 \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m)}}$$

$$e'^2 = \frac{e^2 (1 - \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m)}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m}$$

$$1 - e'^2 \sin^2 \varphi'_m = \frac{1 - e^2 + e^2 \cos^2 \varphi_m \cos^2 A_m}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m}$$

$$1 - e'^2 = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m}$$

$$\sin\varphi'_m \cos\varphi'_m = \frac{tg\, \varphi'_m}{1 + tg^2 \varphi'_m} = \frac{\sin \varphi_m \cos \varphi_m \cos A_m}{\cos^2 \varphi_m \cos^2 A_m + \sin^2 \varphi_m} = \frac{\sin\varphi_m \cos\varphi_m \cos A_m}{1 - \cos^2\varphi_m \sin^2 A_m}$$

en door deze uitdrukkingen in (81) over te brengen:

$$S - S_1 =$$

$$= -\frac{1}{24} S^4 \frac{e^2 \sin\varphi_m \cos\varphi_m \cos A_m (1 - e^2 + e^2 \cos^2 \varphi_m \cos^2 A_m)^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^{3/2}}{a^3 (1 - e^2)^3} =$$

$$= -\frac{1}{24} \frac{S^4}{R^3_m} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m \cos A_m (1 - w \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m)^2.$$

Op overeenkomstige wijze vinden wij uit (81'):

$$S - S_2 = +\frac{1}{24} \frac{S^4}{R^3_m} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m \cos A_m (1 - w \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m)^2$$

Brengen wij deze correctiën nu aan de formules (78) en (78') aan, dan geven beide voor den elliptischen boog tot op grootheden van de orde $e^2 s^5$:

$$S = \frac{P}{\cos\Delta} s' \left(1 - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta\right) \ldots\ldots (82)$$

§ 22. Met behulp van bovenstaande uitdrukkingen voor de lengte van den boog kunnen wij nu gemakkelijk de formules (31)—(34) en (38)—(39) van de afdeeling A dezer verhandeling bewijzen.

Nemen wij de formules voor de spherische oplossing in aanmerking en letten er op dat met verwaarloozing van termen van de orde $e^2 s^2$ de tangens van A_m gelijk is aan den tangens van A'_m vermenigvuldigd met $\frac{N_m}{R_m}$, dan kunnen wij schrijven:

$$\left.\begin{aligned} R \sin \tfrac{1}{2} s_0 \sin A^0_m &= N_m \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m \\ R \sin \tfrac{1}{2} s_0 \cos A^0_m &= R_m \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda \\ S_0 &= R s_0 \end{aligned}\right\} \ldots (83)$$

Dat zijn de formules (31), (32) en (33) van afdeeling A op de indices *nul* na, die wij hier aanbrengen om onderscheid te maken tusschen de juiste waarden en de benaderde waarden volgens bovenstaande formules.

De juiste waarde van A_m vinden wij door deeling van de formules (39) en als wij er op letten dat uit (51) en (52) in verband met (59) en (60) tot op grootheden van de orde $e^2 s^4$ volgt:

$$\left.\begin{aligned} &P + L \operatorname{ctg} A'_m + Q \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta \operatorname{ctg} A'_m = \\ &= N_m\left[1 + \frac{1}{8}\beta^2 w\left(\cos 2\varphi_m + \frac{3}{4} w \sin^2 2\varphi_m\right) - \frac{1}{4}\beta^2 w \sin^2 \varphi_m\right] = \\ &\qquad = N_m (1 + \eta_1) \\ &P - L \operatorname{tg} A'_m - Q \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta \operatorname{tg} A'_m = \\ &= R_m\left[1 - \frac{1}{8}\beta^2 w\left(\cos 2\varphi_m + \frac{5}{4} w \sin^2 2\varphi_m\right) - \frac{1}{4}\lambda^2 \frac{e^2}{1-e^2} \cos^4 \varphi_m\right] = \\ &\qquad = R_m (1 + \eta_2) \end{aligned}\right\} \ldots (84)$$

dan vinden wij daarvoor:

$$tg\,A_m = \frac{N_m}{R_m}\;\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda\cos\varphi_m}{\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\lambda}(1+\eta_1-\eta_2)\,.\;.\;.\;.\;(85)$$

terwijl uit (83) volgt:

$$tg\,A^0_m = \frac{N_m}{R_m}\;\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda\cos\varphi_m}{\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\lambda}\,.$$

Uit beide formules te zamen volgt:

$$tg\,A_m = tg\,A^0_m\,(1+\eta_1-\eta_2)$$

en hieruit vinden wij voor het verschil van A_m en A^0_m, welk verschil wij door ε zullen voorstellen:

$$tg\,\varepsilon = tg(A_m - A^0_m) = \frac{tg A_m - tg A^0_m}{1 + tg A_m\, tg A^0_m} = (\eta_1-\eta_2)\sin A^0_m \cos A^0_m\;.\;.\;(86)$$

waaruit onmiddellijk formule (12) van afdeeling A voor de fout in A^0_m volgt:

Uit de formules (83) en (4) vinden wij:

$$R_m \sin\tfrac{1}{2}s'\cos A'_m = R\sin\tfrac{1}{2}s_0\cos A^0_m$$

en met behulp hiervan:

$$s' = \frac{\frac{1}{2}s'}{\sin\frac{1}{2}s'}\;\frac{\sin\frac{1}{2}s_0}{\frac{1}{2}s_0}\;s_0\,\frac{\sin\frac{1}{2}s'}{\sin\frac{1}{2}s_0} = s_0\left(1+\frac{1}{24}s'^2-\frac{1}{24}s_0^2\right)\frac{R\cos A^0_m}{R_m\cos A'_m} =$$

$$= s_0\,\frac{R}{R_m}\left(1+\frac{1}{24}s'^2-\frac{1}{24}s^2\right)\frac{\cos A_m}{\cos A'_m}\;\frac{\cos A^0_m}{\cos A_m}\,.$$

Stellen wij nu:

$$A_m = A'_m + \Delta = A^0_m + \varepsilon$$

dan vinden wij met behulp van (27), (84) en (86):

$$\frac{\cos(A'_m + \Delta)}{\cos A'_m} \; \frac{\cos A^0_m}{\cos(A^0_m + \epsilon)} = \frac{\cos\Delta}{\cos\epsilon} \; \frac{(1 - tg\,\Delta\, tg\, A'_m)}{(1 - tg\,\epsilon\, tg\, A^0_m)} =$$

$$= \frac{\cos\Delta}{P} \; \frac{P - L\, tg\, A'_m}{1 - (\eta_1 - \eta_2) \sin^2 A^0_m} = \frac{\cos\Delta}{P} \; \frac{R_m (1 + \eta_2)}{1 - (\eta_1 - \eta_2) \sin^2 A^0_m} =$$

$$= \frac{R_m \cos\Delta}{P} \left[1 + \eta_1 \sin^2 A^0_m + \eta_2 \cos^2 A^0_m\right].$$

voor s'^2 vinden wij verder uit (3) en (4) door de som van de vierkanten te nemen:

$$s'^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi_m$$

en evenzoo voor s_0^2 uit (83):

$$s_0^2 = \beta^2 \frac{R^2_m}{R^2} + \lambda^2 \cos^2 \varphi_m \frac{N^2_m}{R^2}.$$

Door deze waarden nu in bovenstaande uitdrukking voor s' over te brengen, vinden wij:

$$s' = s_0 \frac{R \cos\Delta}{P} \left[1 + \eta_1 \sin^2 A^0_m + \eta_2 \cos^2 A^0_m + \frac{1}{24} \beta^2 \left(1 - \frac{R^2_m}{R^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{24} \lambda^2 \cos^2 \varphi_m \left(1 - \frac{N^2_m}{R^2}\right)\right]$$

en deze uitdrukking in (82) substitueerende, vinden wij voor den boog S als wij op (83) letten:

$$S = S_0 \left[1 + \eta_1 \sin^2 A^0_m + \eta_2 \cos^2 A^0_m + \frac{1}{24} \beta^2 \left(1 - \frac{R^2_m}{R^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{24} \lambda^2 \cos^2 \varphi_m \left(1 - \frac{N^2_m}{R^2}\right) - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta\right] \quad \ldots\ldots (87)$$

Uit (69) volgt nu nog:

$$s' \sin\Delta = \frac{e^2}{1 - e^2} s' \sin A'_m \cos^2 \varphi_m \cos A_m$$

of met behulp van (3);

$$s' \sin \Delta = \frac{e^2}{1 - e^2} \lambda \cos^3 \varphi_m \cos A_m .$$

Brengen wij deze waarde evenals de uitdrukkingen voor η_1 en η_2 uit (84) in (87) over, dan vinden wij de formule (34) van afdeeling A voor de fout $S_0 - S$ in S_0.

§ 23. Om de termen van de orde $e^2 s^2$ in rekening te brengen op de wijze als zulks in § 7 gedaan is, kunnen wij met het oog op (39) en (85) schrijven:

$$\left.\begin{aligned} S \sin A_m &= 2\, q\, N_m \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m (1 + \eta_1) \\ S \cos A_m &= 2\, q\, R_m \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda (1 + \eta_2) \end{aligned}\right\}, \ldots (88)$$

waarin q een nog te bepalen factor is. Uit (88) in verband met (3) volgt hieruit voor S:

$$S = 2\, q\, N_m \sin \tfrac{1}{2} s' \frac{\sin A'_m}{\sin A_m} (1 + \eta_1) = \frac{2\, q\, N_m \sin \tfrac{1}{2} s' (1 + \eta_1)}{\cos \Delta (1 + tg \Delta \, ctg A'_m)}$$

of als wij hierin de waarde van $tg\, \Delta$ uit (58) substitueeren en op (84) letten:

$$S = \frac{2\, P q N_m \sin \tfrac{1}{2} s' (1 + \eta_1)}{\cos \Delta (P + L\, ctg A'_m)} = 2 \frac{P}{\cos \Delta} q \sin \tfrac{1}{2} s'.$$

Deze uitdrukking nu gelijkstellende aan de waarde van S volgens (82) vinden wij onmiddellijk voor q:

$$q = \frac{\tfrac{1}{2} s'}{\sin \tfrac{1}{2} s'} \left(1 - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta\right),$$

waardoor de formules (88) overgaan in:

$$\left.\begin{aligned} S \sin A_m &= 2\, N_m \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m \frac{\tfrac{1}{2} s'}{\sin \tfrac{1}{2} s'} \left(1 + \eta_1 - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta\right) \\ S \cos A_m &= 2\, R_m \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda \frac{\tfrac{1}{2} s'}{\sin \tfrac{1}{2} s'} \left(1 + \eta_2 - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta\right) \end{aligned}\right\} \ldots (89)$$

Ten einde deze formules voor korte afstanden geschikt te maken, stellen wij:

$$\sin \tfrac{1}{2} \lambda = \tfrac{1}{2} \lambda \left(1 - \frac{1}{24} \lambda^2\right)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} \beta = \tfrac{1}{2} \beta \left(1 - \frac{1}{24} \beta^2\right)$$

$$\frac{\tfrac{1}{2} s'}{\sin \tfrac{1}{2} s'} = 1 + \frac{1}{24} s'^2 = 1 + \frac{1}{24} \beta^2 + \frac{1}{24} \lambda^2 \cos^2 \varphi_m ,$$

waarbij termen van de orde β^4 en λ^4 verwaarloosd zijn; wat of het gevolg van deze verwaarloozing is en binnen welke grenzen de formules dus mogen gebruikt worden, is in § 8 reeds uitvoerig nagegaan. Met behulp hiervan gaan bovenstaande formules over in:

$$\left.\begin{aligned} S \sin A_m &= N_m \lambda \cos \varphi_m \left(1 - \frac{1}{24} \lambda^2 \sin^2 \varphi_m + \frac{1}{24} \beta^2 + \eta_1 - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta\right) \\ S \cos A_m &= R_m \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda \left(1 + \frac{1}{24} \lambda^2 \cos^2 \varphi_m + \eta_2 - \frac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta\right) \end{aligned}\right\} \ldots (90)$$

Voor η_1 kunnen wij met verwaarloozing van een term van de orde $\beta^2 e^6$ (zie form. (71)) schrijven:

$$\eta_1 = - \frac{1}{4} \beta^2 \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 \varphi_m + \frac{1}{8} \beta^2 w \cos 2 \varphi_m + \frac{5}{32} \beta^2 w^2 \sin^2 2 \varphi_m ,$$

terwijl η_2 gelijk is aan:

$$\eta_2 = - \frac{1}{4} \lambda^2 \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^4 \varphi_m + \frac{1}{8} \beta^2 w \cos 2 \varphi_m + \frac{5}{32} \beta^2 w^2 \sin^2 2 \varphi_m .$$

Brengen wij alleen de termen van de orde $\beta^2 e^2$ in rekening, dan kan in den term $\frac{1}{8} \beta^2 w \cos 2 \varphi_m$ de w vervangen worden door de constante $\frac{e^2}{1 - e^2}$, waardoor wij verwaarloozen:

$$- \frac{1}{8} \beta^2 \frac{e^4 \cos^2 \varphi_m \cos 2 \varphi_m}{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)};$$

de volgende term:

$$\frac{5}{32}\beta^2 w^2 \sin^2 2\,\varphi_m$$

is van dezelfde orde, evenals de term:

$$\frac{1}{6}s'^2 \sin^2 \Delta = \frac{1}{6}\lambda^2\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \cos^4 \varphi_m \cos^2 A_m\,;$$

deze beide termen kunnen wij dus ook verwaarloozen. Deze drie termen hebben alleen invloed op den afstand, niet op A_m; hun maximum-invloed op den afstand is voor $S = 100000$ resp. 0,139, 0,173 en 0,046 millimeter; hun gezamenlijke invloed ten hoogste 0,178 millimeter. Voor een afstand van $S = 200000$ meter wordt hun invloed 8-maal grooter, dus 1,15, 1,39 en 0,35 millimeter; hun gezamenlijke invloed ten hoogste 1,46 millimeter.

Men kan deze termen dus nog verwaarloozen zonder op een afstand van 200000 meter een fout van 2 millimeter te maken.

Met verwaarloozing van deze termen gaan nu de formules (90) over in:

$$\left.\begin{aligned} S \sin A_m &= N_m\,\lambda \cos\varphi_m\Big[1 - \frac{1}{24}\lambda^2 \sin^2\varphi_m + \\ &+ \frac{1}{24}\left(1 - 6\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\varphi_m\right)\beta^2 + \frac{1}{8}\frac{e^2}{1-e^2}\beta^2\cos 2\,\varphi_m\Big] \\ S \cos A_m &= R_m\,\beta \cos\tfrac{1}{2}\lambda\Big[1 + \frac{1}{24}\left(1 - 6\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_m\right)\lambda^2\cos^2\varphi_m + \\ &+ \frac{1}{8}\frac{e^2}{1-e^2}\beta^2\cos 2\,\varphi_m\Big] \end{aligned}\right\} \ldots (91)$$

Drukt men nu nog λ en β in secunden uit en neemt men de logarithmen, dan volgen daaruit de formules (38) en (39) van afdeeling A.

Delft, Januari 1882.

Fig. 1.

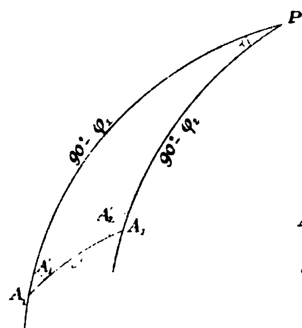


Fig. 2.

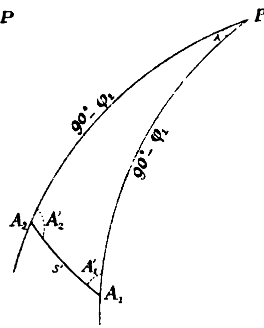
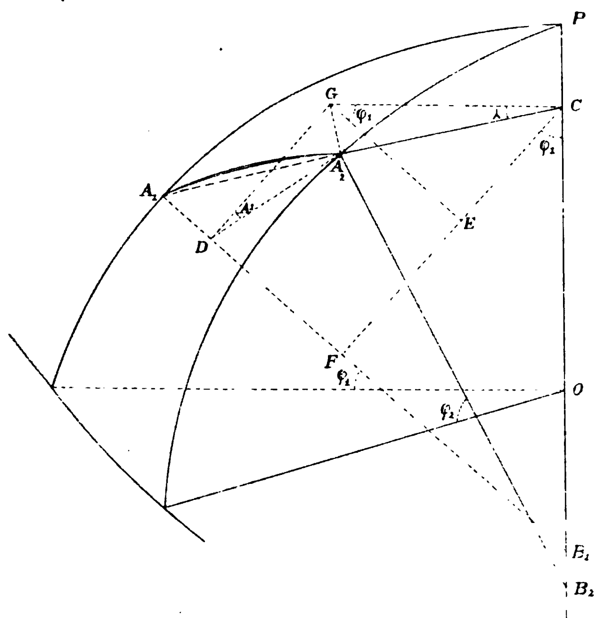


Fig. 3.



RAPPORT OVER EENE VERHANDELING

VAN DEN HEER **Dr. J. W. VAN WIJHE**,

GETITELD:

„UEBER DIE MESODERMSEGMENTE UND DIE ENTWICKELUNG DER NERVEN DES SELACHIERKOPFES."

(Uitgebracht in de Vergadering van 25 Maart 1882).



In de vergadering van de Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen van 25 Februari l.l., werden de ondergeteekenden benoemd tot verslaggevers over eene voor de werken der Akademie aangeboden verhandeling van Dr. J. W. VAN WIJHE, assistent bij het zoötomisch instituut te Leiden, getiteld: »Ueber die Mesodermsegmente und die Entwickelung der Nerven des Selachierkopfes." Zij hebben de eer het volgende, als uitkomst van hun onderzoek, te vermelden en voor te stellen.

Dr. VAN WIJHE deelt in zijne uitgebreide verhandeling de uitkomsten mede van een zelfstandig onderzoek omtrent een der moeielijkste en meest ingewikkelde vraagstukken der vergelijkende ontleedkunde en ontwikkelingsleer. Dat vraagstuk kan in den meer beperkten vorm, waarin het gewoonlijk voorkomt, en vooral ook de belangstelling wekt van de beoefenaars der ontleedkunde van den mensch, omschreven worden als: verklaring van den bouw des schedels en van het verloop en den oorsprong der hersenzenuwen, door vergelijking met den meer eenvoudigen gang van zaken bij de ontwikkeling der wervelkolom en van de zenuwen van het ruggemerg.

De zoogenoemde werveltheorie van den schedel en het al of niet toepasselijk zijn der merkwaardige wet van CH. BELL omtrent de gevoels- en beweegzenuwvezels in de achterste en voorste wortels der ruggemergszenuwen — om slechts deze twee punten te noemen - hangen ten nauwste met dat vraagstuk samen.

Na eene korte inleiding, waarin de Schrijver zijne methode van onderzoek, in het zoölogisch station te Napels volbracht, mededeelt, volgen twee uitgebreide hoofdstukken: I. Ueber die Mesodermsegmente des Kopfes; II. Die Entwickelung der Kopfnerven. Een moeielijk punt in de beschouwing van den nervus trigeminus doet den Schrijver verder nog een korte afzonderlijke afdeeling daaraan wijden. In een eveneens korte laatste afdeeling: »Allgemeine Resultate" getiteld, beschouwt hij eindelijk de overeenkomst tusschen hersen- en ruggemergszenuwen, voornamelijk met het oog op de wet van BELL. Voorts zijn bij het opstel 48, trouwens niet zeer veel vlakte-uitgebreidheid beslaande, teekeningen gevoegd.

Ter waardeering en beoordeeling van des Schrijvers eerste hoofdstuk, merken de verslaggevers op, dat onze kennis omtrent de vorming van zoogenoemde segmenten of somieten, in de streek van den kop der gewervelde dieren (welke segmenten homoloog zijn met de zoogenoemde »Urwirbelplatten, Protovertebrae of Metameren, waaruit de wervelkolom ontstaat) het best gekenschetst wordt door de uitspraak van MILNES MARSHALL *). Na de beschrijving van hetgeen reeds door BALFOUR omtrent de vorming van segmenten in de schedelstreek der Selachii was gezien, en door MARSHALL niet onaanzienlijk uitgebreid werd, zegt deze: »It becomes now an interesting question, which, owing to insufficient material, I am unable as yet to answer definitely, whether this division of the head-coelom into dorsal and ventral portions is not strictly comparable to the division of the body-coelom into vertebral and parietal portions. I have only observed

*) In zijne verhandeling: „The head-cavities and nerves of Elasmobranchs," (*Quarterly Journal of microscopical science*, Vol. XXI, 1881, blz. 75).

these dorsal portions in the first three head cavities — the premandibular, mandibular and hyoidean."

Die drie met »Urwirbel" of segmenten aan den romp overeenkomende »dorsal portions" worden ook in figuur 9 van plaat V zeer duidelijk afgebeeld. Doch uit de voorafgaande beschrijving van hetgeen door MARSHALL zelf, en in hoofdzaak reeds door BALFOUR, omtrent nog meer »achterste deelen" van »the head cavity" was gezien (te veel om hier aangehaald te worden) blijkt, dat reeds veel van de vorming van mesoderm-segmenten in den kop der Selachii bekend was,

VAN WIJHE beschrijft, in zijn aangehaalde eerste hoofdstuk, *negen* door hem in embrya van *Scyllium* en *Pristiurus* gevonden segmenten of somieten, toont die door teekeningen van overlangsche doorsneden dier embrya duidelijk aan, en vermeldt de bijzonderheden, wat hunne ligging en hunne verhouding tot de zich tegelijkertijd vormende kaak, tongbeensgordel en kieuwboogen betreft, ook bestudeerd op dwarse doorsneden en door talrijke afbeeldingen toegelicht.

Reeds hier meenen de ondergeteekenden te moeten opmerken, dat deze uitkomst van VAN WIJHE's onderzoek van groot belang mag heeten. Uit de zoo even aangehaalde voortreffelijke verhandeling van MARSHALL bleek toch eensdeels, wel is waar, dat VAN WIJHE geenszins de ontdekker der mesoderm-segmenten in den kop der haaien is; maar anderdeels is het aantal, de tijd van ontstaan dier segmenten en hunne verhouding tot de hersenzenuwen door MARSHALL niet volledig bestudeerd; en daarenboven spreekt hij de volkomen homologie dier kopsegmenten met de segmenten der wervelkolom nog niet nadrukkelijk uit, al ligt in de aangehaalde zinsneden: »It becomes now an interesting question, enzv." zijne overtuiging omtrent die homologie volkomen voor oogen.

VAN WIJHE echter gaat veel verder. Zoo als gezegd werd, bepaalde hij het aantal dier »schedelwervels" op negen, en daarenboven toont hij (bladz. 4 en 5) op afdoende gronden aan, dat er volkomen overeenkomst tusschen die mesodermsegmenten van den schedel en de protovertebrae der wervelkolom bestaat.

De negen schedel-segmenten of somieten worden nu achtereenvolgens nauwkeurig beschreven. De eerste, praeorale genoemd, hangt door die ligging *niet* met de zijplaten samen. De tweede ligt boven (achter) de holte, in de viscerale boog welke de kaak zal voortbrengen; samenhang tusschen deze holte en die welke in de somiet is waar te nemen, bestaat duidelijk. Daarentegen hangen de spleten in de volgende somieten niet samen met de daaraan beantwoordende *spleten in de viscerale bogen* (blz. 15. v. o). Die spleten zijn blijkbaar de overblijfsels der holte tusschen de zijplaten (coeloma, voor een deel = pleuro-peritoneale holte), welke door de vorming der ruimten tusschen de kieuwbogen (kieuwspleten) in even zoo vele stukken werd verdeeld. — Verder kan een samenhang van het coeloma der kieuwbogen met de holte van het pericardium worden aangetoond, met name (zie blz. 9 van het manuscript) op de hoogte der tweede kieuwspleet. Dit feit komt aan v. WIJHE belangrijk voor, dewijl het, in verband met nog andere, een beschouwing moet steunen, welke op blz. 15 en 16 wordt gevonden. De holten (spleten) in de vierde tot zevende kieuwboog kunnen, volgens v. WIJHE, wegens den tijd van haar ontstaan, nimmer met de holten (spleten) in de correspondeerende somieten in verband hebben gestaan; wel de coeloma-spleten van de kaak- en hyoid-visceraal-boog. Daaruit zou volgen, dat de spleten in de vierde tot zevende kieuwboog (welke eveneens met de holte van het pericardium tijdelijk in samenhang staan) slechts gemeenschap hebben gehad *met*, en homoloog zijn *aan*, het zoogenoemde *secundaire* coeloma, d. i. de ruimte tusschen de zijplaten (huidplaat- en darmvezelplaat der oudere embryogenesis). Verder zou dan (blz. 16) daarop de meening mogen worden gevestigd, dat de wanden der zoo even genoemde viscerale bogen (waaruit *willekeurige* spieren, kieuw- en onderkaakspieren voortkomen) met het vormingsmateriaal der zijplaten homoloog zijn. Terwijl aan den romp het stelsel der willekeurige spieren geheel *van de somieten* afkomstig zou zijn, zouden aan het hoofd (den hals) *de zijplaten* een groot deel der willekeurige spieren voortbrengen. De Schrijver gebruikt later deze beschouwing

als grondslag voor eene karakteristiek der hersenzenuwen, waarop wij nog opzettelijk de opmerkzaamheid zullen moeten vestigen. Doch ook omtrent dien grondslag schijnt ons hier een enkel woord gewenscht.

De gansche beschouwing van v. WIJHE komt ons eenigszins gezocht, gewrongen, voor. Hare juistheid blijft natuurlijk voor zijne rekening, met name voor die der tijdsbepalingen omtrent het ontstaan der hierbij in aanmerking komende deelen. Het mag evenwel eenigszins bevreemden dat sommige der coeloma-spleten in de viscerale bogen van het *primaire* coeloma worden afgeleid, andere met het ventrale, afgesnoerde (secundaire) coeloma alleen in verband zouden geweest zijn.

Het komt ons voor dat de Schrijver langs een eenvoudiger weg had kunnen betoogen, dat de wanden der viscerale bogen homoloog met de zijplaten zijn, en dat hij zich te veel heeft begeven in eene polemiek tegen de beschouwingen van BALFOUR. Deze kende de kop-somieten niet of gebrekkig, *vergelijkt echter de visceraal-boog-vorming geheel met de segmentatie* aan den romp. Met de primaire cavitas parietalis (coeloma) vormt de holte van het pericardium een geheel. Op blz. 40, van Deel II, van B's »comparative embryology" lezen wij: »at first the pericardial cavity is quite continuous with the body-cavity". Weet men nu dat »the body-cavity" niets anders is dan het *primaire* coeloma (dat volgens BALFOUR in het hoofd en de streek der latere viscerale bogen het eerst ontstaat), en dat na de vorming van de wervels het voorste (ventrale) deel van dat coeloma (cavitas pleuroperitonealis wordende) het *secundaire* coeloma heet, dan moeten, van zelf, de pericardiale holte en de coeloma-spleten van de viscerale bogen met dat secundaire coeloma in samenhang staan, want al die ruimten zijn oorspronkelijk een doorloopend geheel. Nu is het niet te ontkennen, dat BALFOUR, die geen zelfstandige (met wervelsegmenten in den eigenlijken zin des woords te vergelijken) kop-somieten kent, eenigszins verward of onduidelijk wordt in zijne nomenclatuur, wanneer hij toch de visceraalbogen-vorming geheel met de somieten-segmentatie op één lijn stelt. Doch, vooreerst

was door den BALFOUR's onderzoekingen aanvullenden arbeid van MARSHALL in den laatsten tijd meer van de kopsomieten bekend; en voorts zou BALFOUR ongetwijfeld, na de kennis verkregen te hebben van de kop-somieten, welke v. WIJHE thans bezit, de coeloma-spleten in de kieuwbogen als homoloog met het *secundaire* coeloma beschouwen.

Dat die homologie *op zich zelf* een steun zou zijn voor v. WIJHE's opvatting van de genetische beteekenis der kieuw- en kaakspieren, vinden de ondergeteekenden niet duidelijk. De eenvoudigere (ten minste zekerdere) boven bedoelde weg om die opvatting te steunen is blijkbaar: aantoonen uit den morphogenetischen gang van zaken, *dat de kopsomieten bedoelde spieren niet voortbrengen.* Zij moeten dan wel uit de zijplaten (de wanden der viscerale bogen) voortkomen, en niemand zal aan de juistheid der beschouwing van VAN WIJHE twijfelen.

Zonder daarom dit gedeelte van het door hen te beoordeelen werk af te keuren of onjuist te noemen, meenen de ondergeteekenden den Schrijver eene omwerking en verduidelijking daarvan (met name van bladz. 15 & 16) te moeten aanbevelen.

De verdere beschouwingen van den Schrijver over de opeenvolgende veranderingen der somieten en van hare verhouding tot de zich ontwikkelende hersenzenuwen, geven geen stof tot opmerkingen. Slechts zouden wij gaarne aan het slot van dit hoofdstuk, op blz. 24, een kleine tabel gezien hebben, waarin de kopsomieten en de zich daaruit ontwikkelende deelen, naar getallenorde, waren voorgesteld. Het is geen gemakkelijk werk, uit de doorloopende beschrijving dier deelen een blijvenden indruk te verkrijgen.

Ten slotte vermelden de ondergeteekenden nog, dat VAN WIJHE eerst na het schrijven zijner verhandeling vond dat SCHNEIDER reeds in 1879, in zijne »Beiträge zur vergl. Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Wirbelthiere" langs anderen weg tot dezelfde meening omtrent het genetisch verschil van het spierstelsel der gewervelde dieren in het algemeen, als hij zelf omtrent dat der haaien, was gekomen. Dat wil zeggen: aan den romp komen de wille-

keurige spieren van de somieten, aan hoofd en hals *vele* van de zijplaten (visceraalbogen).

In het tweede hoofdstuk zijner verhandeling geeft v. WIJHE opeenvolgende beschrijvingen van de met elke kop-somiet, bij de door hem onderzochte haaien (*Scyllium* en *Pristiurus*), in betrekking staande zenuw-oorsprongen.

Met het eerste kop-segment staan de ramus ophthalmicus profundus n. trigemimi en de nerv. oculomotorius in verband. (De nervus olfactorius en opticus worden, als hersendeelen of praevertebrale zenuwen, buiten beschouwing gelaten).

De nervus trigeminus (minus den ramus profundus, nervus naso-ciliaris, der hoogere gewervelde dieren) en de n. trochlearis zijn de zenuwen van het tweede kop-segment.

In het algemeen vindt de Schrijver de onderzoekingen van MARSHALL omtrent het ontstaan en de verdere lotgevallen der genoemde zenuwen bevestigd. Het door MARSHALL eerst in het zoogenoemde stadium K. der embryonale ontwikkeling ontdekte *ganglion ciliare* werd door v. WIJHE veel vroeger gezien en afgebeeld. Ook vond hij een in de richting der arteria ophthalmica loopenden tak van het *ganglion nervi oculomotorii*, dat door SCHWALBE beschreven en voor het ganglion ciliare werd gehouden. Op grond daarvan, en van het tijdsverschil in het ontstaan der twee knoopen en van hunne ligging, meent v. WIJHE dat het door MARSHALL en hem beschreven ganglion het eigenlijke ganglion ciliare, vergelijkbaar met een interspinaal ganglion, moet heeten; terwijl het door SCHWALBE aan den nervus oculomotorius gevonden knoopje, door v. WIJHE voor een sympathisch ganglion wordt verklaard. Bij de door v. WIJHE onderzochte Selachii gaat het, volgens hem, *ware*, ganglion ciliare later weder in ontwikkeling terug. Hij laat derhalve in het midden, of het ganglion ciliare van de hoogere werveldieren, van den mensch bijv., het ganglion van MARSHALL of van SCHWALBE is.

De nervus trochlearis zou als *ventrale* wortel voor het

tweede schedelsegment beschouwd moeten worden, al is zijn oorsprong daarvoor niet bewijzend. Het voorkomen der spier, naar welke de zenuw gaat (M. obliq. oculi super.), uit de tweede kop-somiet, zou voldoenden grond voor die opvatting geven.

Het mag overbodig genoemd worden, bijzonderheden omtrent de verdere beschouwingen van VAN WIJHE over de zenuwen der verschillende kop-segmenten te vermelden; vooral omdat de verslaggevers toch nog zullen moeten terugkomen op die beschouwingen, bij het beoordeelen der einduitkomsten van het onderzoek. Alleen wenschen zij nog op te merken, dat alles in dit hoofdstuk van degelijke en uitgebreide nasporing der door VAN WIJHE onderzochte voorwerpen getuigt. Vooral verdient loffelijke vermelding het ruime en grondige onderzoek van den gang van zaken bij het ontstaan der wortels van den nervus vagus. Mogen nu geene belangrijke, sterk in het oog springende, nieuwe feiten daardoor aan het licht gekomen zijn, menige bijzonderheid, wier vermelding en toelichting hier te groote uitvoerigheid zou eischen, wordt opgemerkt, menig nog niet genoegzaam zeker feit bevestigd. 't Is niet te verwonderen als men, bij veel stof tot prijzen, ook aanleiding tot het maken van enkele aanmerkingen vindt. Behoudens de nog te geven beoordeeling der eindbeschouwing, of theorie, van VAN WIJHE omtrent de genetische verklaring der hersenzenuwen, merken de ondergeteekenden op dat de S. dikwijls, tot steun van de eene of andere bewering, zich ook beroept op de *histologische structuur* van het behandeld wordende deel, zonder dat hij van die histologische structuur iets vermeldt, of zelfs in het algemeen van een histologisch onderzoek, in den gewonen zin van het woord, doet blijken. Verder moet de aandacht gevestigd worden op bladz. 41, vergeleken met bladz. 59: »Die ventrale Wurzel des vierten Segmentes fehlt; wir werden im allgemeinen Theile dieser Arbeit die wahrscheinliche Ursache dieses Fehlens kennen lernen." En (blz. 59) »das vierte und fünfte Myotom abortiren ehe es zur Ausbildung von Muskelfasern kommt". Dus is het niet tot ontwikkeling komen van het gansche materiaal, waaruit

(of ten minste in verband waarmede) de zenuwwortel ontstaan moet »die *wahrscheinliche* Ursache" van haar ontbreken!

Een andere formuleering van hetgeen de Schrijver bedoelt is hier blijkbaar mogelijk.

Nog is het noodig op te merken, dat, op bladz. 36, de nervus facialis en abducens als zenuwwortels van het *derde* en *vierde* kop-segment worden beschreven, terwijl in de »Allgemeine Resultate" (blz. 59) gezegd wordt: »Der nerv. facialis versorgt die Wand der *zweiten* Visceralbogenhöhle". De Schrijver zal hebben te beslissen of dit met elkander te rijmen is.

Terwijl de indruk, welken de arbeid van Dr. VAN WIJHE maakt, tot nu toe in hoofdzaak gunstig mag genoemd worden, moeten de ondergeteekenden thans hunne weinige ingenomenheid met de twee bovenvermelde korte slot-afdeelingen uitspreken en toelichten.

De eerste heeft tot titel: »Die morphologische Bedeutung der Trigeminus-Zweige". Ter loops slechts zij opgemerkt dat »*morphogenetische* Bedeutung", naar het gewone spraakgebruik, juister zou zijn. Wat den Schrijver er toe brengt, aan deze zenuw, toch reeds in zijn tweede hoofdstuk, even als de overige, uitvoerig beschouwd, nog eene bijzondere afdeeling te wijden, is de moeielijkheid om aan den tweeden tak (de bovenkaakszenuw) een plaats in het stelsel der dorsale en ventrale takken — naar de opvatting van VAN WIJHE — aan te wijzen: naar de opvatting van VAN WIJHE — want, volgens de algemeen geldige beschouwingen omtrent zenuwwortels en zenuwtakken, is de moeielijkheid, welke de Schrijver hier opwerpt, bezwaarlijk te begrijpen. Het zij geoorloofd, hier de elementaire feiten in herinnering te brengen. Bij de ruggemergszenuwen hebben wij een achtersten (dorsalen) sensitieven of centripetalen wortel (radix) en een voorsten (ventralen) motorischen of centrifugalen (wet van BELL). Aan gene zijde van den knoop, door den achtersten wortel gevormd, vermengen beide wortels zich, en uit

die vereeniging ontspringen gemengde, uit gevoels- en beweegzenuwvezels bestaande zenuwtakken (rami). Ook deze rami worden, naar hun verloop, als achterste (dorsale) en voorste (ventrale) onderscheiden. Op de verdere takverdeelingen zou dezelfde benaming weder toepasselijk zijn, indien niet door de verbindingen der zenuwen onderling de bepaling moeielijk werd, en de verhouding der zenuwtakken tot andere deelen, zoowel wat de topographie, als de eindbestemming betreft, tot de meer karakteristieke gebruikelijke benamingen voerde.

Passen wij deze algemeen geldige beschouwingen op de interpretatie der hersenzenuwen toe, dan heeft men dus in de eerste plaats de homologe (met die der ruggemergszenuwen overeenkomende) *wortels* te bepalen, en VAN WIJHE tracht zulks dan ook, in zijn tweede hoofdstuk, voor elk der segmentale zenuwen te doen. Zijne meeningen daaromtrent komen straks nog ter sprake. — Voor den nervus trigeminus nu, vindt hij (blz. 33) »dass er bei seiner Anlage zwei dorsale Wurzeln repräsentirt". Op bladz. 55 (begin der afzonderlijke aan den n. trigemin. gewijde afdeeling) lezen wij: »Der ramus I trigemini gehört bekanntlich zu den rami dorsales, der ramus maxill. inferior ist ramus ventralis, *und zwar ein ramus posterior* (onderschrapt door de verslaggevers). Gewoonlijk worden ramus ventralis en ramus anterior als synoniem gebruikt! — Maar nog minder duidelijk wordt hetgeen nu omtrent de groote »moeielijkheid": den tweeden trigeminus-tak, volgt. Er worden eenige redenen vermeld, waarom die geen *ramus anterior* kan zijn. Doch (blz. 56): »mit einem *ramus posterior* ist er auch nicht vergleichbar". Eenige bezwaren tegen die vergelijking worden vermeld, en dan volgt: »es bleibt also nichts Anderes übrig als den ramus II *als zu rami dorsales gehörig* zu betrachten. — En *ramus posterior* en *dorsalis* zijn volgens het gewone spraakgebruik synoniem!

Het schijnt dus dat VAN WIJHE een eigen nomenclatuur heeft, waarbij posterior, anterior, dorsalis, ventralis andere beteekenissen hebben dan de algemeen aangenomene. Het is intusschen denkbaar, dat hij in dit opzicht niet alleen staat,

maar dat den ondergeteekenden, in de ontzaggelijk uitgebreide literatuur omtrent dit onderwerp, een beschouwing of stelsel van den een of ander onbekend is gebleven. — In elk geval had dan toelichting behooren plaats te hebben. Daarenboven is het, bij elke conjectuur omtrent de nomenclatuur van den Schrijver, moeielijk te vatten, wat hij met het slot der hier ter sprake zijnde afdeeling bedoelt: dat de zenuw (ram. II n. trigem.), als ramus dorsalis gekenmerkt, ook wel voor een deel »ramus ventralis" en wel een »ramus posterior" zijn kan. Eerst na de uitkomsten van verder onderzoek wil de Schrijver »auf die paradox scheinende Meinung: dass ein Nerv zugleich ramus dorsalis und ventralis sein kann, weiter eingehen".

Dit punt moet noodzakelijk verduidelijkt worden; evenals de afwijking van de gewone nomenclatuur, welke tot verwarring voert. Het is den ondergeteekenden niet gelukt, bij de in aanmerking komende zoölogen van den laatsten tijd iets overeenkomstigs te vinden. STANNIUS, die hier, om zijn bijzondere studie van het zenuwstelsel der visschen, wel het eerst in aanmerking komt, zegt, in zijne Vergl. *Anatomie d. Wirbelthiere*, 1846, 1ster Buch, Absch. 4, *Die Fische*, S. 62, het volgende: »Sogleich nach der Ganglienbildung der hinteren Wurzel verflicht sich die vordere mit ihr, und alsbald treten die Zweige aus dieser verbundenen Nervenmasse hervor. In der Regel sind Rami dorsales *seu* posteriores, und Rami ventrales *seu* anteriores vorhanden."

En in »das peripherische Nervensyst. d. Fische, Rostock, 1849, S. 77—79" zou, alleen bij oppervlakkige lezing, eenige grond voor VAN WIJHE's opvatting schijnen te liggen. Van den nervus glossopharyngeus wordt daar gezegd, dat er uit voortkomt een ramus anterior en een r. arcus branchialis primi. Deze worden sub 1° en sub 2° beschreven; terwijl dan, sub 3°, nog van een bij de haaien voorkomenden, bij de roggen ontbrekenden *ramus dorsalis* eene beschrijving volgt. Uit den ganschen inhoud van dit gedeelte, en de beschrijving der overige zenuwen, blijkt echter volkomen, dat hier ramus anter. en r. branchialis primus (welke ook *niet* posterior genoemd wordt) zijn de Rami ventrales s. an-

teriores der »Vergleich. Anatomie", tegenover den, sub 3⁰. beschreven ramus dorsalis, waarbij men gerust kan voegen *seu posterior.*

In de slot-afdeeling »Algemeine Resultate" begint de Schrijver met de opmerking: »Viele Untersucher haben sich mit der Frage beschäftigt, ob das BELL'sche Gesetz auch für den Kopf gellte."

De gemengde, motorisch-sensitieve, aard, van den nerv. trigeminus, glossopharyngeus, vagus, e. a., welke toch, morphogenetisch, geheel met achterste wortels schijnen overeen te stemmen, moeten bij den eersten oogopslag elke poging van dien aard bedenkelijk maken.

VAN WIJHE vermeldt de poging van BALFOUR om, door een vernuftige veronderstelling, toch nog een genetische overeenstemming tusschen ruggemergs- en hersenzenuwen mogelijk te maken. Die poging, wier aard en strekking hier, zonder groote uitvoerigheid, niet kunnen verduidelijkt worden, mag als mislukt beschouwd worden.

Als VAN WIJHE dat heeft aangetoond, tracht hij, op eene andere wijze, de toepasselijkheid der (gewijzigde) wet van BELL op de hersenzenuwen vol te houden. Daartoe maakt hij gebruik van de reeds vroeger toegelichte, door hem gevonden, tegenstelling tusschen de ontwikkeling der willekeurige spieren aan den romp uit de somieten of »Urwirbelplatten", en aan den hals en het hoofd (voor een groot deel) uit de zijplaten. Op grond daarvan: »muss das BELL'sche Gesetz für den Kopf folgender Weise formulirt werden" blz. (60).

Die dorsalen Wurzeln sind sensitiv und innerviren nur die aus den Seiten-platten, nicht aber aus den Somiten stammenden Muskeln.

Die ventralen Wurzeln sind rein motorisch, innerviren aber nur die Muskeln der Somiten, nicht diejenigen der Seitenplatten.

Het bevreemdende van »dorsalen Wurzeln, welche sensitiv sind, und Muskeln (waaronder willekeurige; wij noemen slechts den musc. stylo-hyoideus en digastricus) innerviren",

wordt getemperd door eene kleine toelichting, welke de gansche opvatting van VAN WIJHE wel niet, naar de meening der verslaggevers, zonder meer, aannemelijk maakt, maar haar toch verduidelijkt.

Die toelichting volgt terstond op de dubbel onderschrapte twee stellingen, welke »le couronnement de l'édifice" van VAN WIJHE's beschouwing over de genetische beteekenis der hersenzenuwen vormen: »lassen wir die vegetativen Muskeln ausser Acht — wie dies so viel ich es beurtheilen kann, von den das BELL'sche Gesetz prüfenden Physiologen geschehen zu sein scheint — so folgt für den Rumpf, wenn wir das Gesetz in der obigen Fassung zupassen:

Die dorsalen Wurzeln sind nicht motorisch sondern rein sensitiv; die ventralen sind nicht sensitiv sondern rein motorisch = das BELL'sche Gesetz in seiner gewöhnlicher Fassung."

De zin dier, niet in nadere bijzonderheden omschreven, beschouwing is blijkbaar deze: *zelfs* bij de ruggemergszenuwen, voor welke de wet van BELL gevonden werd, is het de vraag of niet in de achterste wortels vezelen voorkomen, welke zich in de spierlagen van het darmkanaal en zijne aanhangsels vertakken. Zij zouden dan, in den strengsten zin van het woord, reeds niet meer zuiver sensitief zijn. Nu gaat VAN WIJHE, op grond zijner morphogenetische onderzoekingen, een stap verder, en zegt: ook de kieuwboog- en kaakspieren (schoon voor een groot deel willekeurige en dwarsgestreepte spieren) komen uit hetzelfde vormingsmateriaal voort als de darmvezelplaat, derhalve is dat geen beletsel voor de beschouwing der daarheen gaande achterste (dorsale) zenuwwortels, in het licht der wet van BELL.

Tegen deze beschouwing zouden velerlei bedenkingen te maken zijn.

Wat de formuleering betreft, zou men liever lezen, in plaats van: die dorsalen (hersenzenuw) Wurzeln sind sensitiv und innerviren . . . . Muskeln": die dorsalen Wurzeln enthalten den bei den Rückenmarksnerven rein sensitiven Theil der segmentalen Nerven, und innerviren überdiess, u. s. w. — of een dergelijke omschrijving.

Doch hoofdzakelijk wenschen de ondergeteekenden te doen

opmerken, dat het karakteriseeren der hersenzenuwen als dorsale en ventrale zenuwwortels (waarop het bovenal aankomt) door andere ontleedkundigen op geheel andere wijze geschiedt dan door VAN WIJHE. In het stelsel van dezen is de nervus trochlearis *ventrale* wortel, in de tabel van SCHWALBE (in diens voortreffelijk Lehrbuch der Neurologie) *dorsale*. De nervus facialis, bij VAN WIJHE *dorsale* wortel, is bij SCHWALBE *ventrale*. De beteekenis der ganglia in het verloop der hersenzenuwen wordt door VAN WIJHE niet, of slechts ter loops, in aanmerking genomen; bij SCHWALBE zijn zij voor de interpretatie van groot belang. Wij zagen reeds hoe in dit opzicht, wat het ganglion ciliare betreft, verschil van opvatting tusschen VAN WIJHE en SCHWALBE bestaat.

Verder maakt VAN WIJHE volstrekt geen melding van de beschouwing der hersenzenuwen, waartoe WIEDERSHEIM te Freiburg *) op grond van anatomisch en genetisch onderzoek gekomen is. De nervus hypoglossus, én bij VAN WIJHE én bij SCHWALBE ventrale wortel, wordt bij de voorstelling van WIEDERSHEIM een stelsel van *vier dorsale* en even zoo vele ventrale wortels. Op grond van het onderzoek der zenuwen, neemt WIEDERSHEIM bij Petromyzon *elf* (VAN WIJHE bij de Selachiers *negen*) segmenten aan.

Daarenboven geeft WIEDERSHEIM eene theorie omtrent het ontstaan der zoo samengestelde toestanden der hersenzenuwen bij de hoogere gewervelde dieren, welke alle belangstelling verdient, maar hier niet kan medegedeeld worden, indien de ondergeteekenden geen uitvoerig zelfstandig overzicht over het gansche vraagstuk zullen schrijven.

Zij vermelden deze hoofdzaken slechts om te doen zien, wat men denken moet van de rangschikking der hersenzenuwen naar de zoogenoemde wet van BELL; en vragen, of er bij eene opvatting als van VAN WIJHE nog van die wet sprake kan zijn. Daarmede beweren zij niet dat diens fundamen-

*) Morphologische Studien. 1. Das Gehirn von Ammocoetes und Petromyzon Planeri, mit besonderer Berücksichtigung der spinalartigen Hirnnerven. Jena, 1880,

teele beschouwingen onjuist zouden zijn. Zij meenen slechts dat, bij den tegenwoordigen stand van zaken, zulke beschouwingen niet als vast staande waarheid mogen gedrukt worden, maar dat blijken van bekendheid met en in aanmerking nemen van anderer meeningen niet geheel behooren te ontbreken. Eene omwerking der verhandeling van Dr. VAN WIJHE, al geldt het dan voornamelijk aanvulling en wijziging van den vorm der twee laatste korte afdeelingen, schijnt hun dus wenschelijk alvorens die verhandeling in »de werken der Akademie" wordt opgenomen.

Op grond van het bovenstaande stellen de ondergeteekenden voor: Dr. VAN WIJHE gelegenheid te geven, door kennisneming van dit verslag, tot wijziging en aanvulling zijner verhandeling; en deze, als zulks naar het oordeel der verslaggevers voldoende is geschied, in de werken der Akademie te doen drukken.

Utrecht, *Leiden*, Maart 1882.

W. KOSTER.
C. K. HOFFMANN.

RAPPORT OVER EENE VERHANDELING

VAN DEN HEER

P. L. BAKKER:

„DE SCHIJF, TER VERVANGING VAN DE KRUK AAN DE AS, ONTLEEND AAN DEN ONTWONDEN CIRKEL, IN TOEPASSING TE BRENGEN OP DE WERKTUIGEN."

(Uitgebragt in de gewone Vergadering van 25 Februarij 1882).

De Heer BAKKER, te Everdingen, heeft aan de Akademie opgedragen een Opstel, dat tot titel heeft: »Verhandeling van de schijf, ter vervanging van de kruk aan de as, ontleend aan den ontwonden cirkel, in toepassing te brengen op de werktuigen."

Die titel heeft, evenals het opstel, de eigenschap van niet zeer duidelijk te zijn.

De omzetting eener regtlijnige in eene ronddraaijende beweging heeft bij de werktuigen veelal plaats door middel van eene kruk; de krukstang maakt met den arm hoeken, die afwisselen van 0° tot 180° en er gaat dus van de aangewende kracht een groot deel te loor.

Ter vervanging van de kruk wil de Schrijver gebruik maken van eene schijf, begrensd door de ontwindende kromme lijn van een cirkel en wentelende om het middelpunt van den ontwonden cirkel.

De krukstang wordt vervangen door eene rol, die om haar centrum draait en tegen de schijf drukt. De normaal op de gemeenschappelijke raaklijn is tangens aan den ontwonden cirkel en de kracht werkt dus altijd op een hefboomsarm, gelijk aan den straal van dien cirkel, zoodat inderdaad

de doode punten van de kruk worden vermeden en de kracht altijd in de meest gunstige rigting wordt aangewend.

De Schrijver onderscheidt enkele en dubbele schijven. Enkel noemt hij eene schijf, die aan eene zijde van eene middellijn van den ontwonden cirkel door eene evolvente, aan de andere zijde willekeurig begrensd is; dubbel, wanneer de eene zijde door eene regtsche, de andere door eene linksche ontwindende is gevormd.

Om een denkbeeld te geven van de werking zijner schijven, levert de Schrijver schetsen, voorstellende de toepassing eener enkele schijf op eene draaibank en van twee enkele schijven op eene vélocipède, welke beide schetsen ongelukkig zeer misteekend zijn, doch waaruit wel te begrijpen is, wat hij bedoelt.

Eene derde schets is, volgens het opschrift, toepasselijk op stoomvermogen. Het is mij, zelfs met de beschrijving, niet mogen gelukken de bedoeling van den Schrijver te begrijpen.

De verlengde zuigerstang van het werktuig kan, voor een deel, om een scharnier, eene slingerende beweging aannemen. Die stang draagt twee rollen, waartusschen zich eene dubbele schijf bevindt. Bij de voor- en achterwaartsche beweging van den zuiger deelen de rollen vermoedelijk niet in de slingerende beweging; maar zij drukken beurtelings tegen den rand der schijf, waardoor deze om haar middelpunt draait.

De verlengde zuigerstang is met het einde van een blok verbonden, dat in eene slede van een hefboom kan heen en weer schuiven. Het draaipunt van dien hefboom en het hart van de schijf zijn vaste punten.

Door de heen en weer gaande beweging van de zuigerstang draait het daarmede verbonden einde van het blok om het draaipunt van den hefboom en schuift het blok in de slede heen en weder.

Of nu het einddoel van den Schrijver is de heen en weer gaande beweging van het blok, de ronddraaijende beweging van zijn eene uiteinde, of eene slingerende beweging van den hefboom, is niet te raden. Zeker is het, dat men voor

geene dezer bewegingen de tusschenkomst der schijf noodig heeft.

Ook de schets is niet gelukkig uitgevallen. Een werktuig, daarnaar uitgevoerd, zou tot stilstand gedoemd zijn.

Nogtans is ook hier eene ronddraaijende beweging, zonder doode punten, te verkrijgen, door de lijn, die haaks op de rigting van beweging van den zuiger, door het middelpunt van den ontwonden cirkel gaat, als hartlijn van de omwentelingsas der machine aan te nemen, en de zuigerstang, door daaraan verbonden rollen, beurtelings, regts en links, op den omtrek eener enkele schijf te doen drukken.

Het voordeel der normale drukking gaat echter voor een groot deel, zoo niet geheel, verloren, door de omstandigheid, dat de straal van den ontwonden cirkel niet grooter zijn kan dan ongeveer drie tienden van de slaglengte der machine, terwijl de arm van de gewone kruk de helft dier slaglengte tot lengte heeft.

Het is mij niet bekend dat soortgelijke schrijven ooit bij werktuigen zijn toegepast, doch het komt mij voor, dat het praktisch bezwaar, verbonden aan de constructie eener zuivere ontwindende op eene groote schaal, te zwaar weegt tegenover het voordeel der constante normale drukking, om daarvan bij stoomwerktuigen gebruik te maken en dat dit voordeel geheel verloren gaat door de beperkte afmetingen van den hefboom.

Waar de lengte van den krukarm van geen ander deel van het werktuig afhankelijk is, of de grootte van de schijf door geene bijomstandigheden wordt beperkt, kan zij misschien toepassing vinden.

Ter opneming in de werken van de Akademie is het opstel niet geschikt.

Den Haag, Februarij 1882.

MICHAËLIS.

BRIEF

VAN HET LID DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

E. H. VON BAUMHAUER

AAN DE

NATUURKUNDIGE AFDEELING DERZELFDE AKADEMIE.

(Voorgelezen in de Vergadering van 28 April 1882).

De ondergeteekende, lid der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, neemt de vrijheid aan de afdeeling Wis- en Natuurkundige Wetenschappen een briefwisseling met bijlagen mede te deelen, door hem met Z.E. den Minister van Binnenlandsche Zaken gevoerd ten aanzien van de, naar zijn oordeel wenschelijke, deelneming van de Nederlandsche Regeering aan het op het Internationaal Geologisch Congres in 1881 te Bolagna besloten plan, tot het doen vervaardigen van een geologische kaart van geheel Europa, met geldelijken steun der verschillende Staten.

De ondergeteekende hoopt dat de Afdeeling, lettende op alinea *a* van Artikel 2 en alinea *b* van Artikel 3 van het Reglement voor de Koninklijke Akademie van Wetenschappen, vastgesteld bij Koninklijk Besluit van 23 Februari 1855, n^0. 1, termen zal vinden om zich in het belang dezer hoogst nuttige wetenschappelijke onderneming tot Z.E. den Minister van Binnenlandsche Zaken te wenden, met verzoek op zijn afwijzende beschikking terug te komen, of wel, gebruik makende van Art. 22 van genoemd Reglement, aan de Regeering voor te stellen een tijdelijk verhoogd subsidie tot dit aangewezen doel te verleenen.

De eer van Nederland op wetenschappelijk gebied gedoogt, naar het oordeel van den ondergeteekende, niet dat ons vaderland bij deze wetenschappelijke internationale onderneming, die zoo luttele geldelijke offers vordert, achterwege blijve.

E. H. VON BAUMHAUER.

A D V I E S

BETREFFENDE

EENE NIEUWE GEOLOGISCHE KAART VAN EUROPA.

In antwoord op een schrijven van den Secretaris d.d. 24 *April* 1882.

(Voorgedragen in de Vergadering van 28 April 1882).

Door den Secretaris der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, afdeeling Wis- en Natuurkunde, namens het Bestuur daartoe verzocht, heb ik de eer de Akademie voor te lichten omtrent eene nieuwe geologische kaart van geheel Europa.

Het plan dezer kaart is opgevat geworden op het tweede internationale geologische Congres, gehouden te Bologna in September 1881, en de uitvoering daarvan opgedragen aan eene internationale Commissie, waarvan de Heeren Beijrich en Hauchecorne te Berlijn tot Directeuren benoemd zijn. De laatst genoemde Heeren hebben de teekening der kaart aan den Heer H. Kiepert te Berlijn toevertrouwd. Door de zamenwerking dezer mannen is de deugdelijke uitvoering van het grootsche werk alleszins verzekerd, indien de Commissie door de Europeesche gouvernementen in voldoende mate van wetenschappelijk materiaal en van geldmiddelen wordt voorzien.

Aan bouwstoffen worden gewenscht: de topographische en de geologische kaarten der verschillende landen. Voor Nederland zouden in aanmerking komen: de topographische kaart, uitgegeven door het Ministerie van Oorlog en de geologische kaart, bewerkt door wijlen Dr. Staring, insgelijks uitgegeven door het Ministerie van Oorlog.

De geldmiddelen, voor de vervaardiging der kaart van Europa vereischt, worden op 100.000 frs. geraamd. Blijkens eene hierbij overgelegde memorie der Directeuren BEIJRICH en HAUCHECORNE, zullen de Europeesche Staten deze som door aankoop van 900 exemplaren der kaart, à 100 frs., bijeenbrengen. De Commissie veronderstelt dat de acht groote Staten bereid zullen zijn tot den aankoop van honderd exemplaren elk, en dat de overblijvende honderd onder de zes kleinere Staten verdeeld zullen worden, zoodat dus Nederland zich tot den aankoop van 17 exemplaren zoude moeten verbinden, waarvan de betaling, die over den tijd van vijf jaar verdeeld wordt, jaarlijks 340 frs. zoude vereischen, gelijk staande met 164 gulden Ned. Ct.

De wenschelijkheid eener nieuwe geologische kaart van geheel Europa behoeft voorzeker geen betoog, aangezien de bestaande te klein en bovendien verouderd zijn.

De nieuwe kaart zal op eene schaal van 1: $1^1/_2$ millioen uitgevoerd worden, in 49 bladen van nagenoeg 50 c.M. kantlengte. Met het oog hierop, komt mij de prijs zeer billijk voor, en de wijze waarop de medewerking der gouvernementen ingeroepen wordt, dunkt mij zeer doelmatig te zijn, aangezien tal van universiteiten en scholen binnen kort tot de aanschaffing der kaart zouden moeten overgaan, indien daarin niet bij voorbaat door de gouvernementen werd voorzien.

Nederland mag zich, mijns inziens, niet aan eene dergelijke wetenschappelijke onderneming onttrekken, die met luttel gelds veel nut zal stichten; ik acht het dus mijn plicht, mij bij het voorstel van den Heer E. H. VON BAUMHAUER, hiernevens overgelegd, aan te sluiten.

Delft, 27 April 1882.

Het Lid der Kon. Akad.
van Wetenschappen,
Dr. Th. BEHRENS.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING

„EENIGE OPMERKINGEN OMTRENT GEWONE LINEAIRE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN," DOOR Dr. W. KAPTEIJN.

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 April 1882).

De verhandeling van Dr. W. KAPTEIJN, waarover wij te rapporteeren hebben, bestaat uit twee, geheel afgescheiden, gedeelten.

De eerste paragraaf behandelt lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, van herleiden vorm, en zoekt ze terug te brengen tot zulke met standvastige coëfficiënten, *a*) door de onafhankelijk veranderlijke, *b*) door de afhankelijk veranderlijke te vervangen door eene andere. Zulke substitutie levert eene nieuwe lineaire differentiaalvergelijking, waarvan nu de coëfficiënten, om aan de gestelde voorwaarde te beantwoorden, evenredig moeten zijn aan de genoemde standvastigen. Hierdoor verkrijgt men twee vergelijkingen, waaruit men de nieuw ingevoerde veranderlijke en haar differentiaalquotient wederom kan elimineeren, om alzoo tot de gezochte voorwaarde te geraken.

De tweede paragraaf behandelt lineaire differentiaalvergelijkingen der m^{de} orde

$$\sum_0^m p_k(x)\frac{d^{m-k}y}{dx^{m-k}} = p(x),$$

waarbij ondersteld wordt, dat altijd $\alpha^k p_k(\alpha x) = p_k(x)$ en ook $\alpha^m p(\alpha x) = p(x)$ [waar $\alpha^\mu = 1$ is]. Eene integraal $f(x)$ levert er dan $\mu - 1$ andere $f(\alpha^k x)$.

Schrijver neemt vooreerst den herleiden vorm, dus $p(x) = 0$,

en bepaalt een determinant Δ, waarvan het niet-nul zijn aangeeft, dat er geenerlei afhankelijkheid bestaat tusschen de μ bijzondere integralen $f(\alpha^k x)$ voor $k = 0, 1, 2, .. \mu - 1$; hierbij is $u \leqq m$. Wanneer die determinant Δ echter wel nul is, geeft hij aan, hoe dit ontstaat door het nul worden van alle uit de laatste ν kolommen te vormen onderdeterminanten van de ν^{de} orde; zoodat er alsdan $\mu - \nu + 1$ lineaire betrekkingen bestaan tusschen die μ bijzondere integralen.

Het geval eener niet-herleide vergelijking wordt tot het vorige teruggebracht door het invoeren van het rekenkundig midden der μ bijzondere integralen, eene ten opzichte der wortels α symmetrieke functie.

En nu leidt schrijver, als gevolg, het theorema af:

»Van eene lineaire differentiaalvergelijking, voldoende aan de bovenvermelde voorwaarden $\alpha^k p_k(\alpha x) = p_k(x)$ en $\alpha^m p(\alpha x) = p(x)$, $[\alpha^\mu = 1]$, is bekend, dat eene bijzondere integraal ontwikkeld worden kan naar de opklimmende en afdalende machten van x; dan heeft hare integraal den vorm

$$y = \Sigma A_{i\mu} x^{n-i\mu} \quad \text{of} \quad y = \Sigma A_{r\mu} x^{r\mu},$$

al naarmate $p(x)$ al of niet nul is."

Het gezegde wordt toegepast op de differentiaalvergelijkingen der LEGENDRE'sche coëfficiënten, der toegevoegde functiën, der BESSEL'sche functiën van de 1ste soort, der BESSEL'sche functiën van de 2de soort, zoowel voor n oneven, alsook, na eenige discussie, voor n even; eindelijk nog op eene differentiaalvergelijking, vroeger door den schrijver behandeld in Versl. en Meded., 2de Reeks, Deel XVII.

Ten slotte wordt nog gesproken over lineaire differentiaalvergelijkingen, wier coëfficiënten eene zelfde periode α bezitten, en waarvan dan eene bijzondere integraal $f(x)$ ook de integralen $f(x + k\alpha)$ met zich brengt.

Uwe verslaggevers meenen de Afdeeling te kunnen aanraden, de behandelde »Opmerkingen" in de Verslagen en Mededeelingen op te nemen.

April 1882.

D. BIERENS DE HAAN.
F. J. VAN DEN BERG.

NADER RAPPORT

AANGAANDE DE

VERHANDELING VAN Dr. J. W VAN WIJHE.

In de Vergadering der Afdeeling »Natuurkunde" van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen, van Maart l.l., werden de ondergeteekenden, rapporteurs over eene aan de Akademie aangeboden verhandeling van Dr. J. W. VAN WIJHE, gemachtigd, om, in overleg met het bestuur der Afdeeling, genoemde verhandeling in de werken der Akademie te doen opnemen, als de Schrijver zijn arbeid op de door rapporteurs wenschelijk geachte wijze zou hebben aangevuld en gewijzigd.

Zij hebben de eer thans aan het bestuur der Afdeeling mede te deelen, dat door Dr. VAN WIJHE, naar hunne meening, op voldoende wijze aan de gemaakte bedenkingen te gemoet is gekomen.

Zij nemen derhalve de vrijheid voor te stellen, de gewijzigde en opnieuw ingezonden verhandeling, naar den wensch des Schrijvers, in de werken der Akademie eene plaats te verleenen.

Utrecht, *Leiden*, 14 April 1882.

W. KOSTER.
C. K. HOFFMANN.

EENIGE OPMERKINGEN

OMTRENT

GEWONE LINEAIRE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN.

DOOR

Dr. W. KAPTEIJN.



De opmerkingen die hier zullen volgen hebben gedeeltelijk betrekking op gewone lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, gedeeltelijk op die van willekeurige orde. De eerste, die vereenigd zijn in de eerste paragraaf, hebben ten doel vergelijkingen te vinden die door verandering van onafhankelijk of door zekere verandering der afhankelijk veranderlijke tot vergelijkingen met constante coëfficiënten kunnen worden herleid; de laatste, in de tweede paragraaf vermeld, strekken om een paar eigenschappen van de integralen van zekere klassen van differentiaalvergelijkingen aan te toonen.

§ 1. De differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - (r_1 + r_2) \frac{d y}{d x} + r_1 r_2 y = 0 \, , \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

waarin r_1 en r_2 constante waarden voorstellen, heeft tot algemeene integraal:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

C_1 en C_2 willekeurige constanten zijnde.

Stellen nu P en Q twee functiën van x voor dan zal het somtijds mogelijk zijn door geschikte verandering van de onafhankelijk of afhankelijk veranderlijke, de vergelijking:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

tot den vorm (1) te herleiden; wanneer dit het geval is zal uit het volgende blijken.

a. Bepaling van de voorwaarde waaraan alle vergelijkingen van den vorm (3) moeten voldoen opdat het mogelijk zij door eene substitutie:

$$x = \varphi(t)$$

waarin φ een functieteeken voorstelt, deze te herleiden tot den vorm (1).

Stelt men $x = \varphi(t)$ dan gaat (3) over in:

$$\left(\frac{d t}{d x}\right)^2 \frac{d^2 y}{d t^2} + \left(\frac{d^2 t}{d x^2} + P \frac{d t}{d x}\right) \frac{d y}{d t} + Q y = 0.$$

De voorwaarden opdat deze vergelijking identiek zij met:

$$\frac{d^2 y}{d t^2} - (r_1 + r_2) \frac{d y}{d t} + r_1 r_2 y = 0$$

zijn:

$$\frac{\left(\frac{d t}{d x}\right)^2}{1} = - \frac{\frac{d^2 t}{d x^2} + P \frac{d t}{d x}}{r_1 + r_2} = \frac{Q}{r_1 r_2}$$

Schrijft men deze beide vergelijkingen:

$$r_1 r_2 \left(\frac{d t}{d x}\right)^2 = Q \text{ en } \frac{d^2 t}{d x^2} + P \frac{d t}{d x} + (r_1 + r_2) \left(\frac{d t}{d x}\right)^2 = 0 \ldots (4)$$

dan geeft de eliminatie van t;

$$\frac{2PQ + \frac{dQ}{dx}}{Q^{3/2}} = -\frac{2(r_1 + r_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} = \text{const.} = c. \quad . \quad . \quad (5)$$

De coëfficiënten P en Q van alle differentiaalvergelijkingen van den vorm (3), waarbij eene dergelijke herleiding mogelijk is, moeten derhalve aan de voorwaarde (5) voldoen.

Indien wederkeerig in eene differentiaalvergelijking van den vorm (3) deze voorwaarde vervuld is, dan vindt men de noodige substitutieformule uit eene der vergelijkingen (4). Hieruit volgt dat de gegeven differentiaalvergelijking op de volgende wijze kan geïntegreerd worden.

De waarde van c is bekend: met weet dus ééne betrekking tusschen de grootheden r_1 en r_2, te weten:

$$-\frac{2(r_1 + r_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Men neme hierbij nog eene betrekking tusschen deze twee grootheden aan die niet in strijd is met de laatste vergelijking en losse uit deze beide r_1 en r_2 op. Verder zoeke men de waarde van t uit eene der vergelijkingen (4), bijv. de eerste; dan is:

$$t = \int \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{r_1 r_2}} \, dx = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Deze waarde van t, waarbij geene willekeurige constante moet gevoegd worden, en de gevonden waarde r_1 en r_2 substitueerende in:

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

vindt men de algemeene integraal van de gegeven differentiaalvergelijking.

Een bijzonder geval doet zich voor indien de constante c wordt gevonden gelijk -4; alsdan toch is, zooals blijkt uit (6): $r_1 = r_2$. Het is duidelijk dat de algemeene integraal in dit geval wordt:

had men klaarblijkelijk dezelfde voorwaarde tusschen de coëfficiënten P en Q gevonden.

b. Bepaling van de voorwaarde waaraan alle vergelijkingen van den vorm (3) moeten voldoen, opdat het mogelijk zij, door invoering eener nieuwe afhankelijk veranderlijke, deze te herleiden tot den vorm:

$$\frac{d^2(yz)}{dx^2} - (r_1 + r_2)\frac{d(yz)}{dx} + r_1 r_2 y z = 0, \quad \ldots . (8)$$

waarin z eene onbepaalde functie van x voorstelt.

Schrijft men de laatste vergelijking

$$z\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{2\frac{dz}{dx} - (r_1 + r_2)z\right\}\frac{dy}{dx} + \left\{\frac{d^2z}{dx^2} - (r_1 + r_2)\frac{dz}{dx} + r_1 r_2 z\right\}y = 0,$$

dan blijkt terstond dat alleen dan (3) met (8) identiek kan zijn indien:

$$\frac{z}{1} = \frac{2\frac{dz}{dx} - (r_1 + r_2)z}{P} = \frac{\frac{d^2z}{dx^2} - (r_1 + r_2)\frac{dz}{dx} + r_1 r_2 z}{Q}.$$

Elimineert men uit deze beide vergelijkingen, te weten:

$$Pz = 2\frac{dz}{dx} - (r_1 + r_2)z \quad \text{en} \quad Qz = \frac{d^2z}{dx^2} - (r_1 + r_2)\frac{dz}{dx} + r_1 r_2 z \,..\, (9)$$

de functie z en hare differentiaalquotienten, dan vindt men dat tusschen P en Q de volgende betrekking moet bestaan:

$$2\frac{dP}{dx} + P^2 - 4Q = (r_1 - r_2)^2 = \text{constante} = c \ldots (10)$$

Indien in eene differentiaalvergelijking van den vorm (3) wederkeerig deze voorwaarde vervuld is, dan vindt men de functie z uit eene der vergelijkingen (9). Hieruit volgt dat de gegeven vergelijking op de volgende wijze kan geïntegreerd worden.

De waarde van c is bekend uit (10); met weet dus ééne betrekking tusschen de grootheden r_1 en r_2, te weten:

$$(r_1 - r_2)^2 = c. \qquad (11)$$

Men neme hierbij nog eene tweede betrekking tusschen deze grootheden aan, die niet in strijd is met de eerste en bepale uit deze beide de waarden van r_1 en r_2.

Verder bepale men z uit eene der vergelijkingen (9), bijvoorbeeld de eerste; dan komt:

$$z = e^{\int \frac{P + r_1 + r_2}{2} dx} \qquad (12)$$

Deze waarde van z, zonder willekeurige constante, met de gevonden waarden van r_1 en r_2, stelle men eindelijk in de algemeene integraal van (8), te weten:

$$y = \frac{1}{z}(C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}),$$

men vindt dan

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int P dx}\left(C_1 e^{\frac{1}{2}(r_1 - r_2) x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}(r_1 - r_2) x}\right)$$

als algemeene integraal van de gegeven differentiaalvergelijking. Ingeval de constante c gelijk nul gevonden wordt, dan is $r_1 = r_2$. Stelt men dit in (12), dan gaat hiermede de algemeene integraal van (8), namelijk:

$$y = \frac{1}{z}(C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$$

over in

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} (C_1 + C_2 x).$$

Eenige vergelijkingen, waarin de voorwaarde (10) vervuld is, zijn o. a.:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + 2 b x \frac{d y}{d x} + (a + b^2 x^2) y = 0 \text{ *)},$$

*) SCHLÖMILCH, *Höhere Analysis.* Zweite Auflage p. 346.

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-a^2xy=0 \text{ *)},$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2ax\frac{dy}{dx}+\{a(a-1)-b^2x^2\}y=0 \text{ †)}.$$

Past men hierop bovenstaande methode toe, dan vindt men voor c:

$$4(b-a), \qquad 4a^2, \qquad 4b^2.$$

Beschikt men over de willekeurige betrekking tusschen r_1 en r_2 in alle drie gevallen zoodanig dat:

$$r_1+r_2=0,$$

dan vindt men voor $r_1=-r_2$:

$$\sqrt{b-a}, \qquad a, \qquad b.$$

Verder is dan z:

$$e^{\frac{bx^2}{2}}, \qquad x, \qquad x^a$$

waarmede de algemeene integralen worden:

$$y=e^{-\frac{bx^2}{2}}\left(C_1e^{x\sqrt{b-a}}+C_2e^{-x\sqrt{b-a}}\right)$$

$$y=\frac{1}{x}\left(C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}\right)$$

$$y=\frac{1}{x^a}\left(C_1e^{bx}+C_2e^{-bx}\right)$$

Wanneer men alle vergelijkingen van vorm (3) bepaalt wier algemeene integralen de gedaante:

$$y=f(x)\left(C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\right)$$

---

*) Frenet, *Recueil d'Exercices*. Deuxième Edition p. 233.

†) Schlömilch, *Höhere Analysis*, p. 346.

hebben, waarin $f(x)$ eene onbepaalde functie van x voorstelt, vindt men natuurlijk dezelfde conditie (10) als hierboven tusschen de coëfficiënten P en Q.

§ 2. *Zij α een oorspronkelijke wortel van de vergelijking:*

$$\alpha^{\mu} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en:

$$\frac{d^m y}{d x^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + p_2(x)\frac{d^{m-2} y}{d x^{m-2}} + \ldots p_m(x) y = p(x) \quad \ldots (2)$$

eene lineaire differentiaalvergelijking waarin $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... $p_m(x)$, $p(x)$ functien van x voorstellen die voldoen aan de volgende voorwaarden:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha p_1(\alpha x) = p_1(x) \\ \alpha^2 p_2(\alpha x) = p_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^m p_m(\alpha x) = p_m(x) \\ \alpha^m p(\alpha x) = p(x) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

dan zullen, indien eene functie $f(x)$ van x aan de vergelijking (2) *voldoet, ook $f(\alpha x)$, $f(\alpha^2 x) \ldots f(\alpha^{\mu-1} x)$ aan deze vergelijking voldoen.*

Het bewijs dezer stelling is zeer eenvoudig. Stelt men toch $x = \alpha z$ dan gaat de vergelijking (2) over in:

$$\frac{d^m y}{d z^m} + \alpha p_1(\alpha z)\frac{d^{m-1} y}{d z^{m-1}} + \alpha^2 p_2(\alpha z)\frac{d^{m-2} y}{d z^{m-2}} + \ldots \alpha^m p_m(\alpha z) y = \alpha^m p(\alpha z)$$

of, indien de voorwaarden (3) voldaan zijn, in:

$$\frac{d^m y}{d z^m} + p_1(z)\frac{d^{m-1} y}{d z^{m-1}} + p_2(z)\frac{d^{m-2} y}{d z^{m-2}} + \ldots p_m(z) y = p(z)$$

Hieruit blijkt dat, indien $y = f(x)$ aan (2) voldoet, ook zal voldoen $y = f(z) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Verandert men dus in eenige

integraal $f(x)$, x in $\frac{x}{\alpha}$ dan verkrijgt men weder een integraal; herhaalt men deze bewerking dan ziet men dat ook $f\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)$, $f\left(\frac{x}{\alpha^3}\right)$, ... $f\left(\frac{x}{\alpha^{\mu-1}}\right)$ integralen van (2) zullen zijn, en hiermede is het gestelde beweren, immers:

$$f\left(\frac{x}{\alpha^i}\right) = f(\alpha^{\mu-i}),$$

waarin i een geheel getal voorstelt.

Wanneer derhalve de vergelijkingen (3) voldaan zijn en eene integraal $f(x)$ van (2) gegeven is, zijn onmiddellijk nog μ—1 integralen bekend. Deze laatste zijn echter niet altijd verschillend van de eerste; alleen is het duidelijk dat wanneer een van deze gelijk is aan de oorspronkelijke ook alle anderen daaraan gelijk zullen zijn.

Met behulp dezer stelling kan men menigmaal uit eene gegeven integraal algemeenere afleiden. Daarbij is het echter wenschelijk twee gevallen te onderscheiden, namelijk het geval waarin het tweede lid der vergelijking (2) gelijk nul is en het geval waarin dit tweede lid niet nul is.

1. $\rho(x) = 0$.

Zij $f(x)$ een integraal van de vergelijking (2) waarin de voorwaarden (3) vervuld zijn en waarin het tweede lid nul is, dan zijn $f(\alpha x)$, $f(\alpha^2 x) \ldots f(\alpha^{\mu-1} x)$ ook integralen dezer vergelijking. Noemt men deze μ integralen kortweg y_1 $y_2 \ldots y_\mu$ dan is de voorwaarde die voldaan moet worden, zullen deze niet verbonden zijn door eene lineaire vergelijking:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_\mu y_\mu = 0$$

waarin C_1 C_2 .. C_μ zekere constanten, die ook nul kunnen zijn, voorstellen, zooals bekend is deze, dat de volgende determinant niet verdwijnt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d^{\mu-1} y_1}{d x^{\mu-1}}, & \dots & \frac{d y_1}{d x}, & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{\mu-1} y_\mu}{d x^{\mu-1}}, & \dots & \frac{d y_\mu}{d x}, & y_\mu \end{vmatrix}$$

of:

$$\Delta \neq 0$$

Is derhalve $f(x)$ gegeven dan kan Δ bepaald worden; wordt dan gevonden $\Delta \neq 0$ dan is dus:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots C_\mu y_\mu$$

eene algemeenere integraal van de differentiaalvergelijking, daar hierin nu $C_1 \, C_2 \dots C_\mu$ de beteekenis van willekeurige constanten hebben.

Het is duidelijk dat dit geval slechts kan plaats hebben wanneer $\mu \leq m$ is. Ter opheldering moge dit voorbeeld dienen. Zij gegeven dat aan de differentiaalvergelijking.

$$\frac{d^m y}{d x^m} - \frac{1}{x^{2m}} y = 0 \text{ *)}$$

voldaan wordt door:

$$y_1 = x^{m-1} e^{-\frac{1}{x}} = f(x)$$

dan vindt men terstond nog $m-1$ andere integralen aangezien de voorwaarde:

$$\alpha^m p_m(\alpha x) = p_m(x) = -\frac{1}{x^{2m}}$$

voldaan is indien men α kiest als een oorspronkelijke wortel van de vergelijking $\alpha^m = 1$.

---

*) SPITZER, *Studien* 1860. Vorwort p. 8.

Deze integralen met weglating van constante factoren zijn:

$$x^{m-1} e^{-\frac{\alpha}{x}},\ x^{m-1} e^{-\frac{\alpha^2}{x}},\ \ldots\ x^{m-1} e^{-\frac{\alpha^{m-1}}{x}}$$

Hiermede is de algemeene integraal:

$$y = x^{m-1} \left\{ C_1 e^{-\frac{1}{x}} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{x}} + C_3 e^{-\frac{\alpha^2}{x}} + \ldots + C_\mu e^{-\frac{\alpha^{m-1}}{x}} \right\},$$

daar nog bewezen kan worden dat deze integralen niet door eenige lineaire betrekking verbonden zijn.

Daar alle μ integralen een zelfde factor x^{m-1} bezitten, behoeft slechts bewezen te worden dat de functies:

$$e^{-\frac{1}{x}},\ e^{-\frac{\alpha}{x}},\ e^{-\frac{\alpha^2}{x}} \ldots\ldots e^{-\frac{\alpha^{m-1}}{x}}$$

lineaír onafhankelijk zijn. Stelt men deze in plaats van $y_1\ y_2\ y_3 \ldots y_\mu = y_m$ in Δ en noemt de corresponderende waarde dezer determinant Δ' dan is het gemakkelijk in te zien dat deze beide determinanten van elkaar afhankelijk moeten zijn. Dit is reeds opgemerkt geworden door Hesse die bewezen heeft (Crelle 54, p. 249) dat:

$$\Delta = (x^{m-1})^m\, \Delta'.$$

Tevens geeft Hesse daar ter plaatse een middel aan de hand ter berekening van Δ' dat op het volgende neêr komt, waarbij gebruik gemaakt zal worden van de notaties door Christoffel (Celle 55, p. 298) gebezigd.

Noemt men de functies:

$$e^{-\frac{1}{x}},\ e^{-\frac{\alpha}{x}},\ e^{-\frac{\alpha^2}{x}},\ \ldots\ e^{-\frac{\alpha^{m-1}}{x}}$$

respectievelijk:

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_{m-1}$$

en voorts:

$$f_{i,k} = \frac{d}{dx}\left(\frac{f_{i,\,k-1}}{f_{k,\,k-1}}\right)$$

waarin i en k geheele getallen beteekenen en

$$f_{i,-1} = f_i,\ f_{0,-1} = f$$

ondersteld wordt, dan is:

$$\Delta' = f^m \cdot f_{1,0}^{m-1} \cdot f_{2,1}^{m-2} \cdot f_{3,2}^{m-3} \cdots f_{m-2,m-3}^{2} \cdot f_{m-1,m-2}$$

Houdt men nu in 't oog dat in het bovenstaand geval

$$f_1 = f^{\alpha}\ f_2 = f^{\alpha^2} \cdots f_{m-1} = f^{\alpha^{m-1}},$$

dan vindt men:

$$f_{1,0} = (\alpha - 1)\, f^{\alpha-2}\frac{df}{dx},$$

$$f_{2,1} = \alpha\,(\alpha^2 - 1)\, f^{\alpha^2-\alpha-1}\frac{df}{dx},$$

$$f_{3,2} = \alpha^2\,(\alpha^3 - 1)\, f^{\alpha^3-\alpha^2-1}\frac{df}{dx},$$

. . . .

$$f_{m-2,m-3} = \alpha^{m-3}\,(\alpha^{m-2} - 1)\, f^{\alpha^{m-2}-\alpha^{m-3}-1}\frac{df}{dx},$$

$$f_{m-1,m-2} = \alpha^{m-2}\,(\alpha^{m-1} - 1)\, f^{\alpha^{m-1}-\alpha^{m-2}-1}\frac{df}{dx},$$

waaruit, na herleiding volgt:

$$\Delta' = \alpha^{-\frac{m(m-1)(m-2)}{3}}(\alpha - 1)^{m-1}(\alpha^2 - 1)^{m-2} \cdots$$

$$\cdots (\alpha^{m-1} - 1)^1 f^{-\frac{m(m-1)}{2}}\left(\frac{df}{dx}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}}.$$

Hierin substituerende $f = e^{-\frac{1}{x}}$ wordt

$$\Delta' = \alpha^{-\frac{m(m-1)(m-2)}{3}} (\alpha-1)^{m-1}(\alpha^2-1)^{m-2} \ldots (\alpha^{m-1}-1) x^{-m(m-1)}$$

en

$$\Delta = \alpha^{-\frac{m(m-1)(m-2)}{3}} (\alpha-1)^{m-1}(\alpha^2-1)^{m-2} \ldots (\alpha^{m-1}-1),$$

waaruit men mag besluiten:

$$\Delta \neq 0.$$

Wordt gevonden $\Delta = 0$ dan zijn de μ integralen afhankelijk van elkaâr en alsdan is het van belang te kunnen bepalen hoevelen dezer onderling onafhankelijk zijn.

Hiertoe zij opgemerkt dat wanneer tusschen μ functiën ν lineaire betrekkingen bestaan, men deze betrekkingen steeds zoo kan schrijven, dat ieder hunner $\mu - \nu + 1$ functiën bevat. Geldt eene zoodanige betrekking, dàn zal ook een determinant van orde $\mu - \nu + 1$, op dezelfde wijze als vroeger gevormd uit deze $\mu - \nu + 1$ functiën, nul zijn. Deze ν betrekkingen geldende, zullen dus ν determinanten $(\mu - \nu + 1)^e$ orde nul zijn. Deze zijn juist de onafhankelijke determinanten die men kan vormen door uit de Δ gevormd met behulp der μ functiën de $\nu - 1$ eerste kolommen weg te laten en de overblijvende μ rijen, ieder van $\mu - \nu + 1$ elementen, $\mu - \nu + 1$ aan $\mu - \nu + 1$ te vereenigen.

Daar nu omgekeerd een determinant, gevormd als boven, nul zijnde, ook eene lineaire betrekking bestaat tusschen de functiën in deze determinant voorkomende, zoo volgt uit het zooeven gezegde deze regel:

Wanneer in Δ alle determinanten ν^e orde die uit de laatste ν kolommen, door vereeniging telkens van ν rijen, gevormd kunnen worden, nul zijn, bestaan er $\mu - \nu + 1$ lineaire betrekkingen tusschen de μ functiën $y_1 y_2 \ldots y_\mu$.

Zij bijvoorbeeld gegeven dat aan de vergelijking:

$$\frac{d^4 y}{d x^4} - \frac{2}{x}\frac{d^3 y}{d x^3} + \frac{7}{x^2}\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{15}{x^3}\frac{d y}{d x} + \frac{16}{x^4} y = 0$$

voldoet $x^2 \, lg\, x$, dan zullen, aangezien voor $\alpha^4 = 1$ aan de voorwaarden (3) voldaan is, ook:

$$x^2 \, lg\, \alpha x, \; x^2 \, lg\, \alpha^2 x, \; x^2 \, lg\, \alpha^3 x$$

integralen dezer vergelijking zijn.

Bepaalt men nu de determinant Δ dan vindt men:

$$\Delta = 2 x^2 \begin{vmatrix} 1, & 2\, lg\, x + 3, & 2\, lg\, x + 1, & lg\, x \\ 1, & 2\, lg\, \alpha x + 3, & 2\, lg\, \alpha x + 1, & lg\, \alpha x \\ 1, & 2\, lg\, \alpha^2 x + 3, & 2\, lg\, \alpha^2 x + 1, & lg\, \alpha^2 x \\ 1, & 2\, lg\, \alpha^3 x + 3, & 2\, lg\, \alpha^3 x + 1, & lg\, \alpha^3 x \end{vmatrix}$$

Hierin zijn alle determinanten 3e orde die uit de 3 laatste kolommen gevormd kunnen worden nul, derhalve bestaan er tusschen de vier functiën 2 lineaire betrekkingen.

Deze zijn:

$$x^2 \, lg\, x - 2 x^2 \, lg\, \alpha x + x^2 \, lg\, \alpha^2 x = 0$$

en:

$$x^2 \, lg\, \alpha x - 2 x^2 \, lg\, \alpha^2 x + x^2 \, lg\, \alpha^3 x = 0.$$

Men kan dus twee dezer functiën lineair in de overigen uitdrukken en vindt dus als algemeenere uit de gegeven integraal:

$$C'_1 \, x^2 \, lg\, x + C'_2 \, x^2 \, lg\, \alpha x$$

of stellende: $C'_1 + C_2' = C_2, \; C_2' \, lg\, \alpha = C_1$

$$x^2 (C_1 + C_2 \, lg\, x).$$

Het is duidelijk dat men deze algemeenere integraal meer direct had kunnen vinden, als ook dat men hier aan μ

andere waarden dan 4 had kunnen toekennen; als toepassing evenwel van het boven gezegde, is bij voorkeur deze weg gevolgd.

2. $p(x) \neq 0$.

Zij $f(x)$ een integraal van de vergelijking (2) waarin de voorwaarden (3) vervuld zijn en waarin het tweede lid niet nul is, dan zijn $f(\alpha x)$, $f(\alpha^2 x) \ldots f(\alpha^{\mu-1} x)$ ook integralen dezer vergelijking.

Stelt men nu:

$$\frac{f(x) + f(\alpha x) + \ldots f(\alpha^{\mu-1} x)}{\mu} = f_0(x)$$

en:

$$f(x) - f_0(x) = F(x)$$

dan is $f_0(x)$, eene functie die onveranderd blijft indien x door αx vervangen wordt, een integraal van de vergelijking (2) en zijn $F(x)$, $F(\alpha x), \ldots F(\alpha^{\mu-1} x)$ μ integralen van de vergelijking waarin (2) overgaat indien het tweede lid door nul vervangen wordt. Bepaalt men voor deze laatste weder de functie Δ dan kan men daaruit afleiden hoevelen dezer afhankelijk zijn. Zij dit aantal ν, dan is derhalve de volgende uitdrukking:

$$f_0(x) + C_1 F(x) + C_2 F(\alpha x) + \ldots C_\nu F(\alpha^{\nu-1} x)$$

eene algemeenere integraal van de vergelijking (2).

Verlaat men nu de onderstelling dat een particuliere integraal gegeven is, dan kan uit het bovenstaand theorema nog het volgend belangrijk gevolg worden afgeleid.

Indien van eene vergelijking (2), *waarin de condities* (3) *vervuld zijn, bekend is dat zij een integraal bezit die volgens de positieve en negatieve machten van x kan ontwikkeld worden, dan bezit* (2), *indien* $p = 0$, *een integraal van den vorm:*

$$y = \Sigma A_{i\mu} x^{n-i\mu}$$

waarin het tweede lid eene som van termen voorstelt, die verkregen worden door aan i verschillende geheele positieve waar-

den te geven en n een geheel getal beteekent; is daarentegen $p =|= 0$, dan bezit (2) *een integraal van den vorm:*

$$y = \Sigma A_{n-r\mu} x^{r\mu}$$

waarin r een geheel getal en A evenals in den vorigen vorm eene constante aanduidt.

Zij vooreerst $p = 0$; indien dan

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + .. A_n + A_{n+1} x^{-1} + \ldots$$

een integraal van (2) is, dan zijn ook $f(\alpha x), f(\alpha^2 x), .. f(\alpha^{\mu-1} x)$ integralen. Derhalve voldoet ook

$$\frac{1}{\mu}\{f(x) + \alpha^{\mu-n} f(\alpha x) + \alpha^{2(\mu-n)} f(\alpha^2 x) + .. \alpha^{(\mu-1)(\mu-n)} f(\alpha^{\mu-1} x)\}$$

aan deze vergelijking. Substitueert men in deze laatste uitdrukking de waarden van $f(x)$, $f(\alpha x)$ enz. en geeft acht op de eigenschappen van de wortels der vergelijking $\alpha^\mu = 1$, dan vindt men terstond

$$\Sigma A_{i\mu} x^{n-i\mu}$$

Zij verder $p =|= 0$; indien dan weder:

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + .. A_n + A_{n+1} x^{-1} + \ldots$$

een integraal van (2) is, voldoet ook aan deze vergelijking:

$$\frac{1}{\mu}\{f(x) + f(\alpha x) + f(\alpha^2 x) + .. f(\alpha^{\mu-1} x)\}.$$

Substitueert men hierin de waarden van $f(x)$, $f(\alpha x)$ enz. dan blijkt terstond dat alleen de termen overblijven waarin de exponenten van x veelvouden zijn van μ, derhalve wordt deze uitdrukking:

$$\Sigma A_{n-r\mu} x^{r\mu}.$$

Men ziet het voorgaande bevestigd in vele bekende integralen van differentiaalvergelijkingen.

In de vergelijkingen, o. a.:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{2(m+1)x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{(n-m)(n+m+1)}{1-x^2} y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

waarin m en n geheele positieve getallen, waarvan het eerste kleiner dan het tweede, voorstellen, vindt men de voorwaarden:

$$\alpha\, p_1(\alpha x) = p_1(x)$$

$$\alpha^2 p_2(\alpha x) = p_2(x)$$

indien α de oorspronkelijke wortel -1 van de vergelijking $\alpha^2 = 1$ beteekent, voldaan. De bekende integralen dezer vergelijkingen, te weten:

$$y = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - ..$$

$$y = x^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} x^{n-m-2} +$$
$$+ \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-m-4} - ..$$

$$y = x^n \left(1 - \frac{x^2}{2.(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - ..\right),$$

die, afgezien van een coëfficiënt, respectievelijk den naam van LEGENDRE's coëfficiënten, *Toegevoegde* functiën en BESSELSCHE functiën 1ste soort, dragen bezitten, zooals men onmiddellijk opmerkt, den vorm $\Sigma A_{i\mu} x^{n-i\mu}$, waarin $\mu = 2$.

Evenzoo blijkt dat aan de vergelijking

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{3}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2-1}{x^2}\right) y = \frac{n}{x^2},$$

waarin n een oneven getal voorstelt, voldaan wordt door

$$y = \frac{n}{x^2}\left(1 + \frac{n^2 - 1^2}{x^2} + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{x^4} + \ldots\right)$$

eene uitdrukking van den vorm: $\Sigma A_{n-2r}\, x^{2r}$, hetgeen niet kan bevreemden, aangezien de voorwaarden

$$\begin{aligned} \alpha\, p_1(\alpha x) &= p_1(x) \\ \alpha^2 p_2(\alpha x) &= p_2(x) \\ \alpha^2 p\ (x) &= p\ (x) \end{aligned}$$

waarin $\alpha = -1$, voldaan zijn.

Zooals bekend is heeten de waarden der laatste integraal voor verschillende oneven waarden van n BESSEL'SCHE functiën van de 2e soort, terwijl de BESSEL'SCHE functiën van de 2e soort voor n even worden bepaald uit

$$y = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{n^2}{x^2} + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{x^4} + \ldots\right)$$

eene functie die voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$\varphi(y) = \frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{3}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2 - 1}{x^2}\right) y = \frac{1}{x}.$$

Hierin zijn de voorwaarden (3) niet geheel vervuld en het is daaraan toe te schrijven, dat ook hier niet de vorm $\Sigma A_{n-2r}\, x^{2r}$ gevonden wordt. Daar hier echter de voorwaarden

$$\begin{aligned} \alpha\, p_1(\alpha x) &= p_1(x) \\ \alpha^2 p_2(\alpha x) &= p_2(x) \\ \alpha^2 p\ (\alpha x) &= \alpha\, p\,(x) = -\, p\,(x) \end{aligned}$$

gelden, mag men besluiten dat indien $f(x)$ voldoet aan

$$\varphi(y) = \frac{1}{x}$$

$f(-x)$ zal voldoen aan de vergelijking

$$\varphi(y) = -\frac{1}{x}$$

zoodat

$$\varphi\left(\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right)=\frac{1}{x},$$

waaruit blijkt dat de differentiaalvergelijking voldaan kan worden door eene onevene functie, immers

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\psi(x)$$

zijnde, is:

$$\psi(x)=-\psi(-x).$$

Is nu $f(x)$ eene functie die volgens positieve en negatieve machten van x kan ontwikkeld worden, dan heeft $\psi(x)$ de gedaante $\frac{1}{x}\ \Sigma A_{n-2r}\, x^{2r}$ hetgeen overeenstemt met het bovenvermelde.

Als toepassing van het voorgaande zal bovendien nog aangetoond worden hoe daarmede een bewijs, door schrijver dezes elders gegeven, merkwaardig kan bekort worden.

In een onderzoek, betreffende den vorm van zekere differentialen, wier integralen zuiver algebraïsche functiën zijn *), vindt men bewezen dat aan de vergelijking

$$x(a+bx^n)\frac{dy}{dx}+\{(1+m)(a+bx^n)+(1+p)\,n\,b\,x^n\}y=c,$$

waarin m en n geheele getallen, p een willekeurige breuk en c eene constante beteekenen, niet door een polynomium P van graad i voldaan kan worden tenzij

$$(1+p)n+1+m+i=0 \quad \text{en} \quad P=\sum_{r=0}^{=\frac{i}{n}} A_{rn}\,x^{rn},$$

zijnde r een geheel positief getal.

Dit volgt nu onmiddellijk uit het voorgaande, immers in-

*) *Versl. en Meded. der Koninkl. Akad. v. Wet.* Afd. Natuurk., Dl. XVII.

dien een polynomium van graad i aan de vergelijking kan voldoen, moet na substitutie van dit polynomium de coëfficiënt van x^{i+n} nul wezen, derhalve moet

$$(1+p)\,n+1+m+i=0$$

en voorts zal, α een oorspronkelijke wortel van $\alpha^n=1$ zijnde, daar

$$\alpha\, p_1(\alpha\, x)=p_1(x)$$
$$\alpha\, p\;(\alpha\, x)=p\;(x)$$

het polynomium, als het bestaat den vorm

$$\Sigma\, A_{rn}\, x^{rn}$$

moeten bezitten.

Somtijds zijn de coëfficiënten der vergelijking (2) zoodanig dat steeds de voorwaarden

$$\alpha\; p_1\,(\alpha\, x)=p_1\,(x)$$
$$\alpha^2 p_2\,(\alpha\, x)=p_2\,(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha^m\, p_m\,(\alpha\, x)=p_m\,(x)$$
$$\alpha^m\; p\;(\alpha\, x)=p\,(x)$$

vervuld zijn, welke waarde ook α bezitte.

Men kan gemakkelijk bepalen bij welke vergelijkingen zich dit voordoet; immers zij r eene der waarden $1, 2, \ldots m$, dan moeten

$$\alpha^r\, p_r\,(\alpha\, x)=p_r\,(x)$$
$$\alpha^m\, p\,(\alpha\, x)=p\;(x)$$

ook wanneer α verandert. Differentieert men daarom de eerste dezer vergelijkingen naar α, dan moet:

$$r\,\alpha^{r-1}\, p_r\,(\alpha\, x)+\alpha^r\frac{d\, p_r\,(\alpha\, x)}{d\,(\alpha\, x)}\,.\, x=0\,,$$

waaruit

$$p_r\,(\alpha\, x)=\frac{A_r}{(\alpha\, x)^r}\,;$$

zoodat

$$p_r(x) = \frac{A_r}{x^r}.$$

Evenzoo volgt uit de tweede der vergelijkingen

$$p(x) = \frac{A}{x^m}$$

wanneer A_r en A onbepaalde constanten beteekenen.

De vergelijking waarin dus de gestelde voorwaarden voldaan zijn is:

$$\frac{d^m y}{d x^m} + \frac{A_1}{x} \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + \frac{A_2}{x^2} \frac{d^{m-2} y}{d x^{m-2}} + \cdots \frac{A_m}{x^m} y = \frac{A}{x^m}.$$

Ten slotte zij nog opgemerkt dat de integralen van de vergelijking:

$$\frac{d^m y}{d x^m} + p_1(x) \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + p_2(x) \frac{d^{m-2} y}{d x^{m-2}} + \cdots p_m(x) y = p(x), \ldots (4)$$

wier coëfficiënten en tweede lid eene zelfde periode α bezitten, zoodat:

$$\left.\begin{array}{l} p_1(x+\alpha) = p_1(x) \\ p_2(x+\alpha) = p_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_m(x+\alpha) = p_m(x) \\ p(x+\alpha) = p(x) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

eene dergelijke eigenschap bezitten als die van (2), waarin de voorwaarden (3) vervuld zijn.

Is $f(x)$ *een integraal van* (4) *waarin de voorwaarden* (5) *vervuld zijn, dan zijn ook* $f(x+\alpha)$, $f(x+2\alpha) \ldots$ *integralen dezer vergelijking.*

Stelt men toch in (4) $x = z - \alpha$, dan gaat zij over in:

$$\frac{d^m y}{d z^m} + p_1(z-\alpha) \frac{d^{m-1} y}{{}^{m-1}} + p_2(z-\alpha) \frac{d^{m-2} y}{d z^{m-2}} + \cdots p_m(z-\alpha) y = p(z-\alpha)$$

of, indien de vergelijkingen (5) voldaan zijn, in:

$$\frac{d^m y}{dz^m} + p_1(z)\frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + p_2(z)\frac{d^{m-2} y}{dz^{m-2}} + \ldots p_m(z)\, y = p\,(z).$$

Hieruit blijkt terstond dat indien $y = f(z)$ een integraal is van (4), aan deze vergelijking ook zal voldoen $y = f(z) = f(x + \alpha)$. Verandert men dus in eenige integraal x in $x + \alpha$ dan verkrijgt men weder een integraal; derhalve zijn ook $f(x + 2\,\alpha)$.. integralen der vergelijking (4).

RAPPORT OVER EENE VERHANDELING

VAN

Dr. MAX WEBER,

GETITELD:

OVER COALESCENTIA CALCANEO-NAVICULARIS.

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 April 1882).

Bij besluit der Vergadering van de Afdeeling Natuurkunde der Koninklijke Akademie van Wetenschappen van 25 Maart j.l. werd aan de ondergeteekenden opgedragen rapport uit te brengen over eene verhandeling van den Heer Dr. Max Weber, getiteld: Over coalescentia calcaneo-navicularis. Ter voldoening aan die opdracht hebben zij de eer daaromtrent het volgende mede te deelen.

Op eene korte inleiding, waarin de Schrijver wijst op de groote zeldzaamheid der door hem besproken vergroeiing van het hielbeen met het scheepswijze been en op het practisch belang, dat zij bezit, volgt een nauwkeurige beschrijving van twee gevallen dier abnorme verbinding: het eerste aan beide zijden bij een 13jarigen knaap, het tweede aan den rechter voet van een pasgeboren, voldragen kind, omtrent welks linker voet geen nadere kennis verkregen werd.

De zeldzaamheid der afwijking blijkt uit het geringe aantal gevallen, dat de Schrijver in de literatuur heeft kunnen opsporen en uit het feit dat Gruber haar in 2500 opzettelijk daartoe onderzochte voetwortels slechts eenmaal heeft aangetroffen.

Door vergelijking der hem bekend gewordene gevallen, komt de Heer Weber er toe de volgende vormen der abnorme

verbinding tusschen calcaneus en os naviculare te onderscheiden:

1°. door fibreus weefsel, waarin een beentje (geval van Zuckerkandl);

2°. door kraakbeen, waarbij een spleet nog de scheiding tusschen de synchondrose en den processus anterior calcanei aanduidt (Gruber, 2de geval van Weber);

3°. eveneens door kraakbeen, waarbij de scheiding tusschen synchondrose en processus anterior calcanei niet meer is waar te nemen (Verneuil (?), 1ste geval van Weber).

Een geleidelijke overgang tusschen de aangehaalde gevallen is niet te ontkennen en bij voortgaande verbeening der synchondrose zou zich nog een 4de verbindingsvorm, namelijk een synostose tusschen de beide beenderen, kunnen voordoen.

Bij het bespreken van den invloed, dien de coalescentia calcaneo-navicularis op de functie van den voet zal uitoefenen, geeft de Schrijver als zijne meening te kennen dat men, het kootbeen tegenover den geheelen overigen voetwortel plaatsende en het in zekeren zin als een meniscus tusschen voetwortel en onderbeen beschouwende, spreken kan van een talo-tarsaalgewricht. Deze opvatting wordt gesteund door het feit dat in het eerste door den Schrijver medegedeelde geval, niettegenstaande de vaste verbinding tusschen calcaneus en os naviculare, geen stoornis in de beweging was op te merken. Het besluit wordt dus getrokken dat in het talo-tarsaalgewricht de beweging normaal zoodanig plaats heeft alsof de beide beenderen één geheel vormen, namelijk in dien zin dat slechts van een zeer beperkte, afzonderlijke beweging van het os naviculare op het hoofd van den talus sprake kan zijn.

De grootere bewegelijkheid, als pronatie en supinatie, die zoowel den jeugdigen kindervoet als den apenvoet van den voet van den volwassen mensch onderscheidt, moet gezocht worden in de articulatio talo-calcanea posterior, getuigen o. a. de cijfers, welke door Miss Ann Elizabeth Clark bij hare metingen verkregen werden. De coalescentia calcaneo-navicularis zal hoogstens de pronatie en supinatieeen weinig beper-

ken, hetgeen voor het gebruik van den voet van weinig belang geacht kan worden. Deze bewegingen zal men mogen opvatten als een overblijfsel der ruimere bewegelijkheid, welke de voet moet bezeten hebben toen hij nog meer was dan een steunend orgaan, dat het lichaam slechts te dragen heeft.

Phylogenetisch moet de voet van den mensch zich ontwikkeld hebben uit een voet met grootere bewegelijkheid, zooals die aangetroffen wordt bij de anthropomorphe apen, waar hij tevens grijporgaan is, en bij den kindervoet zoo lang deze het gewicht van het lichaam nog niet te dragen heeft.

Ten slotte beweert de Schrijver, in strijd met de meening van Holl, dat er geen aanleiding bestaat om de vergroeiing tusschen hielbeen en scheepswijze been onder de aetiologische momenten van pes valgus op te nemen.

Na deze mededeeling van den inhoud der aangeboden verhandeling, die zich door nauwkeurige beschrijving en bondigen redeneertrant onderscheidt, aarzelen de ondergeteekenden niet aan de Afdeeling voor te stellen haar, overeenkomstig den wensch van den Schrijver, in de *Verslagen en Mededeelingen* op te nemen.

T. ZAAIJER.
W. KOSTER.

OVER

COALESCENTIA CALCANEO-NAVICULARIS.

DOOR

Dr MAX WEBER.

Abnorme verbindingen der voetwortelbeenderen onderling behooren nog steeds tot de zeldzaamheden; vooral is de hier bedoelde verbinding van den calcaneus met het naviculare slechts in weinige gevallen waargenomen geworden.

Wellicht is reeds hierdoor de beschrijving van twee nieuwe gevallen gerechtvaardigd; meer nog daardoor, dat de verbinding niet van praktisch belang ontbloot is wegens de veranderingen, die het gewricht van CHOPART hierdoor ondergaat en omdat men in die verbinding een aetiologisch moment voor pes valgus heeft willen zien.

De door mij waargenomen gevallen zijn juist in staat over dit laatste vraagstuk een helder licht te verspreiden en tevens de enkele, in de literatuur beschreven, gevallen onderling in verband te brengen.

Aan de bespreking van deze laatsten moge de beschrijving van die abnorme voeten voorafgaan, die door mij onderzocht werden.

Het eene der beide gevallen van coalescentia calcaneonavicularis werd door mij in den winter 1881 op het Anatomisch laboratorium te Amsterdam aan beide voeten van een ongeveer 13jarigen overigens goedgevormden knaap gevonden. Aan beide voeten was noch van buiten, noch bij de praeparatie der spieren, bloedvaten en zenuwen iets abnorms waar te nemen. Eerst bij ontleding van het CHOPART'sche

gewricht bleek dit in tweeën verdeeld te zijn door eene kraakbeenige massa, die den calcaneus met het naviculare tot één geheel verbond. (Men vergelijke fig. 1.)

Het nader onderzoek leerde, dat de calcaneus overigens normaal gevormd is. Eene facies articularis medialis anterior ontbreekt, iets wat meer het geval is, en hier in verband staat met de ontwikkeling der abnorme verbinding van calcaneus en naviculare. Deze verbinding wordt door eene strook van hyalin kraakbeen tot stand gebracht, die zich van den bovensten, binnensten rand van den processus anterior calcanei ontwikkelt, aan haar oorsprong 15 mm breed en 5 mm. dik is en die vervolgens overgaat in de kraakbeenige laag, die niet alleen de beide geledingsvlakten van het naviculare, doch ook nog deszelfs overige vlakten voor het grootste gedeelte bekleedt, overeenkomstig aan de nog niet voltooide verbeening.

De proximale, naar boven en achteren ziende vlakte van deze kraakbeenige strook gaat geleidelijk over in de komvormige proximale geledingsvlakte van het naviculare, terwijl de distale vlakte van de strook als voortzetting der facies articularis cuboidea calcanei eveneens overgaat in de distale geledingsvlakte van het naviculare. Zoodoende is het naviculare in zijn geheele hoogte door eene stevige synchondrose onbeweeglijk met den processus anterior calcanei verbonden.

De kortste afstand der synchondrose van haar oorsprong aan den processus anterior calcanei tot daar, waar zij aan de beenkern van het naviculare grenst, bedraagt 8 mm. Uit de oneffenheid van genoemde beenkern op deze plaats mag worden opgemaakt, dat de ossificatie bezig was zich van hier uit verder in de synchondrose uit te strekken. Zoo komt het, dat de rand van de beenkern van het naviculare puntig uitsteekt in de synchondrose.

De talus doet zich normaal voor. Wat aangaat de distale geledingsvlakte van het naviculare en die van den processus anterior calcanei, zoo werd bij het onderzoek van het versche voorwerp hieromtrent evenmin als over de proximale geledingsvlakte van het cuboid iets genoteerd. Later was zulks niet meer mogelijk, daar door onachtzaamheid de ge-

ledingsvlakten tengevolge van al te hevige maceratie verwijderd werden. Zoodoende kan niet met zekerheid worden uitgemaakt of de proximale geledingsvlakte van het cuboid enkelvoudig of in twee facetten verdeeld was. Ik meen mij te herinneren, dat het laatste het geval was en dat de eene: grootere facette met den processus anterior calcanei, de andere: kleinere met de kraakbeenstrook articuleerde.

Het tweede geval heb ik aan de goedheid van Prof. Fürbringer te Amsterdam te danken. Hij vond het, korten tijd nadat het bovenvermelde geval door mij was waargenomen, aan den rechter voet van een pasgeboren, voldragen kind.

Ook hier was van buiten niets afwijkends aan den voet waar te nemen.

De calcaneus is normaal gevormd. Zijne facies articularis medialis is zeer duidelijk kegelvormig. De facies articularis cuboidea calcanei is ovaal, tibio-fibulaarwaarts een weinig uitgehold. Naar boven en binnen zet zich de processus door middel van eene overhangende kraakbeenige strook voort in het naviculare. Deze strook is 7,5 mm. hoog, 4 mm. dik en aan haar distaal vlak van eene geledingsvlakte voorzien, waarmede eene supernumeraire proximale, mediaal gelegene geledingsvlakte van het cuboid articuleert. De geledingsvlakte van den processus anterior calcanei en die van de kraakbeenige strook zijn plantaarwaarts tot in de halve hoogte van den processus anterior calcanei door eene ondiepe spleet oppervlakkig van elkander gescheiden.

Door die kraakbeenige brug is dus de calcaneus onbeweeglijk verbonden met het naviculare, er bestaat eene echte synchondrose.

Beschouwt men den voetwortel van boven, dan ziet men, dat de geheele dorsale vlakte van den processus anterior calcanei zich onafgebroken voortzet in die synchondrose en door middel hiervan in het naviculare. Eene facies articularis medialis anterior bestaat niet als zelfstandige geledingsvlakte, zij is betrokken in die van de synchondrose en het naviculare. De sulcus interarticularis accessorius ligt zoodoende tusschen de facies articularis medialis posterior en

den lateralen rand van de vergroote proximale geledingsvlakte van het naviculare.

De eenige afwijking — als het eene afwijking verdient genoemd te worden — die aan den overigens normalen talus is waar te nemen, is die, dat de geledingsvlakte voor de articulatie met de facies articularis medialis calcanei naar achteren puntig uitloopt en een weinig langer is dan gewoonlijk.

Dat het cuboid aan zijn proximaal vlak buiten de gewone geledingsvlakte voor den processus anterior calcanei nog eene tweede kleinere, mediaal gelegene heeft voor de gewrichtsverbinding met de synchondrose, werd reeds opgemerkt. Beide vereenigen zich plantaarwaarts onder eenen scherpen hoek, meer naar den rug van den voet zijn zij door eene derde kleine driehoekige facette van elkander gescheiden.

De genoemde kleinere geledingsvlakte is nu niet identisch met die geledingsvlakte, die volgens Gruber *) in de helft van alle voeten aan het mediale vlak van het cuboid gevonden wordt en met het naviculare articuleert. In ons geval ligt zij anders, en is zij in hare geheele breedte in verbinding met de synchondrose. In zoo verre deze echter niet te begrenzen is tegenover het naviculare, vormt de bedoelde geledingsvlakte eenen overgang tot degene, die wij in de helft der gevallen aan normale voeten waarnemen.

Omtrent de verhouding van den linker voet van het kind ben ik niets te weten gekomen.

Na beschrijving der beide door mij waargenomen gevallen moge in kort vermeld worden wat in de literatuur bekend is van eene dergelijke verbinding van calcaneus en naviculare.

W. Gruber †) vond aan beide voeten van eenen 12—13 jarigen knaap in plaats van het ligamentum calcaneonaviculare interosseum eene hyalin-kraakbeenige, gedeeltelijk reeds verbeende synchondrose, waardoor calcaneus en naviculare

*) W. Gruber, *Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg.* Serie 7. T. XVII. p. 9.

†) W. Gruber, *Beobachtungen aus d. menschl. u. vergl. Anatomie,* Heft I, Berlin 1879.

onbeweeglijk verbonden waren. Volgens de geheele beschrijving heeft zij veel overeenkomst met de door ons vermelde synchondrose van de voeten van den knaap van nagenoeg denzelfden leeftijd als in het geval van GRUBER. Zij onderscheidt er zich echter van door de aanwezigheid eener betrekkelijk diepe sleuf, waardoor zij duidelijk afgescheiden is van den processus anterior calcanei. Eene dergelijke sleuf bestond aan onzen jongensvoet niet, werd echter van den kindervoet vermeld.

Hoe zeldzaam de hier besproken verbinding is blijkt wel het duidelijkst uit de opgave van GRUBER, volgens welke hij opzettelijk niet minder dan 2500 tarsi onderzoeken moest om zijn geval aan te treffen.

Volgens GRUBER is door VERNEUIL *) aan beide voeten van een voldragen kind de gelijke verbinding gevonden geworden. Calcaneus en naviculare vormden één samenhangende massa met twee duidelijk van elkander gescheiden verbeeningspunten, één voor elk been.

Er zijn wel nog meer gevallen van aangeboren verbinding van calcaneus en naviculare beschreven, zij waren echter allen van meerdere of mindere misvorming der naburige beenderen vergezeld. Om die reden behooren zij in het gebied der pathologische anatomie, terwijl wij het hier met eene variëteit van den tarsus te doen hebben, die, zooals wij later zullen zien, zonder merkbaren invloed op de functie van den voet is — ten minste deze niet essentieel verandert.

Onder de rubriek van misvormingen moet ook het door HOLL †) beschreven geval worden gerekend, waar eene synostotische verbinding van calcaneus en naviculare in dier voege bestond, dat de superficies cuneiformis van het naviculare en de superficies cuboidea calcanei ééne groote geledingsvlakte vormden. Daar naast had echter eene liggingsverandering van talus en naviculare plaats gegrepen verbonden met consecutive verandering der geledingsvlakten der be-

---

*) Medegedeeld door A. ROBERT: Des vices congenitaux de conformation des articulations. Thèse, Paris 1851.

†) HOLL, *Arch. f. Klinische Chirurgie*, 1880.

trokken beenderen. Op de gevolgtrekkingen, die HOLL uit deze anomalie maakt, zullen wij later nog eens moeten terugkomen.

Belangrijker is eene door ZUCKERKANDL *) waargenomen verbinding van calcaneus en naviculare door strak aangehaald fibreus weefsel, waarbij het gewrichtskraakbeen der distale vlakte van het naviculare zonder verschil van niveau geleidelijk overging in het kraakbeen der superficies cuboidea van den processus anterior. Zoodoende vormden naviculare en calcaneus samen genomen ééne vlakte voor de gewrichtsverbinding met het cuboid en de drie cuneiformia. In het strak aangehaalde coaleerende bindweefsel vond ZUCKERKANDL een klein beentje tusschengevoegd.

Vergelijkt men de verschillende aangehaalde gevallen onderling, dan verkrijgt men, uitgaande van de normale ligamenteuse verbinding van calcaneus en naviculare, de volgende reeks van trapsgewijze verandering van die verbinding.

1. In plaats van door het ligamentum calcaneo- naviculare interosseum verbonden te zijn, zijn beide beenderen door fibreus weefsel zoo nauw aan elkander gehecht, dat hun beide distale gewrichtsvlakten zich als één vlak voordoen. Er heeft zich in dat verbindende weefsel een beentje ontwikkeld (geval van ZUCKERKANDL).

2. De verbinding tusschen de beide beenderen is geheel kraakbeenig geworden; er is echter nog eene scheiding tusschen de synchondrose en den processus anterior calcanei in den vorm van eene spleet waarneembaar (geval van GRUBER en de door ons beschreven neonatusvoet).

3. Van die scheiding is niets meer te bespeuren. De synchondrose ontwikkelt zich zonder grens uit den processus anterior calcanei en gaat gelijdelijk over in de distale en proximale gewrichtsvlakte van het naviculare (geval van VERNEUIL (?) en de beide door ons onderzochte voeten van den knaap).

Een geleidelijke overgang der vier aangehaalde gevallen

*) ZUCKERKANDL, *Wiener medicinische Jahrbücher*, 1880.

is niet te ontkennen. Houdt men nu verder in het oog dat zij alleen aan onvolwassen individuen toebehooren en dat aan de andere zijde het begin eener verbeening der synchondrose vooral door GRUBER, doch ook in ons geval, waargenomen weird, dan kan men zich gemakkelijk voorstellen dat in verband met het verbeeningsproces der voetwortelbeenderen ook de synchondrose verbeenen zal. Als vierden toestand der verbinding tusschen calcaneus en naviculare zouden wij dan in plaats eener synchondrose eene synostose aantreffen.

Alvorens de vraag te beantwoorden in hoeverre de abnorme verbinding van calcaneus en naviculare van invloed zal zijn op de functie van den voet, met name van het tweede voetgewricht, moet vooraf die functie worden vastgesteld.

Het tweede voetgewricht wordt samengesteld uit 1: de articulatio talo-calcanea posterior, 2: art. talo-calcanea anterior, 3: art. talo-navicularis.

Onder de verschillende opvattingen van de wijze van beweging in dezen complex van gewrichten heeft voorzeker die het meest voor, volgens welke het primum movens in de articulatio talo-calcanea post. gelegen is. Uit de onderzoekingen en nauwkeurige metingen van ANN CLARK *) is gebleken, dat dit gewricht een kegelgewricht is, waarin de beweging geschiedt om eene as, die van het achterste einde van het sustentaculum tali schuins naar buiten en achteren gaat. Het voorste talo-calcaneaal gewricht speelt hierbij eene meer passieve rol, terwijl in de articulatio talo-navicularis de schuinsche draaing om de schuins loopende as van de articulatio talo-calcanea posterior in eene meer overlangsche rotatie van den voet veranderd wordt.

Houdt men verder in het oog dat eene geïsoleerde beweging van het naviculare op het hoofd van den talus, zonder dat zich gelijktijdig de calcaneus mede beweegt, slechts in geringe mate bestaat, dan mogen niet alleen uit een anatomisch, doch ook uit een physiologisch oogpunt die deelen, waarmede het hoofd van den talus articuleert als eene ge-

*) ANN ELIZABETH CLARK: *The ankle joint of man.* A graduation thesis. Berne 1877.

wrichtskom vormende worden beschouwd. Het zijn het naviculare en het sustentaculum tali, die het beenige gedeelte dier kom vormen, terwijl de driehoekige spleet, die tusschen beiden aan de voetzool open blijft, door het ligamentum calcaneo-naviculare plantare gesloten wordt.

De vaste verbinding tusschen de cuneiformia en het naviculare aan de eene zijde en de cuneiformia en het cuboideum aan de andere zijde in aanmerking nemende, kan de talus tegenover den geheelen overigen voetwortel geplaatst worden. Zoodoende kan men hem in zekeren zin als een meniscus tusschen voetwortel en onderbeen beschouwen en kan men van eene articulatio talo-tarsalis spreken.

Mijns inziens krijgt deze opvatting van de gewrichtsverbinding aan den voet eenigen steun door de gevallen van coalescentia calcaneo-navicularis. Hier toch kan geen sprake meer zijn van eene afzonderlijke beweging van het naviculare op het caput tali. Dit laatste draait hier inderdaad in een samenhangenden, uit vaste deelen bestaanden ring, die door het ligamentum calcaeo-naviculare plantare tot eene gewrichtskom gesloten wordt.

Uit het feit, dat niettegenstaande de onbewegelijke verbinding van calcaneus en naviculare bij den 13jarigen knaap, aan den voet geen stoornis in de beweging op te merken was en evenmin de spieren iets afwijkends vertoonden, mag wel de conclusie worden getrokken, dat ook in het normale talo-tarsaalgewricht de beweging over het algemeen zoo geschiedt als waren calcaneus en naviculare één geheel *). Beide beenderen zijn dan ook op bijzonder stevige wijze door de bandhechting der drie ligamenta calcaneo-navicularia verbonden.

De opvatting dat slechts van eene zeer beperkte afzonderlijke beweging van het naviculare op het hoofd van den talus sprake kan zijn, verheugt zich nog niet in de algemeene toestemming. Door Hüter en Henke is zij het eerst geformuleerd tegenover de opvatting, dat de pronatorische

*) Ook W. Gruber, de nauwkeurige waarnemer, vermeldt niets waaruit eenige stoornis in de beweging van den voet zou kunnen blijken.

en supinatorische beweging in het gewricht van CHOPART geschiedde door beweging van den distalen voetwortel tegenover talus en calcaneus. Dat deze beide bewegingen nu, verbonden respectivelijk met abductie en adductie, in de articulatio talo-calcanea posterior plaats hebben, blijkt uit de volgende feiten.

De grootte der excursie om de draaiingsas van den talus in de achterste talus-geleding is — zooals bekend — bij het kind belangrijker dan bij den volwassen mensch. Uit de onderzoekingen van ANN CLARK *) is gebleken, dat deze bij het kind gemiddeld 34,3, in het volwassen gewricht slechts 13,8 graden van een boog bedraagt. Volgens dezelfde schrijfster is de geheele grootte van pro- en supinatie bij het kind gemiddeld 36°, bij den volwassen mensch 18°,9.

Eerst als de kindervoet het gewicht van het lichaam te dragen heeft, komt, juist tengevolge van deze drukking hierin eene verandering.

Anatomisch berust het verschil in bewegelijkheid in den voet van het kind, dat nog niet loopt, en van den volwassen mensch daarop, dat bij het kind de lengte-as van den talus eenen grooteren hoek vormt met de sagittale as van het lichaam. Met andere woorden: het hoofd van den talus is meer naar binnen toegekeerd. Daardoor is de hoek, die de draaiingsas van den talus met deszelfs lengte-as vormt, kleiner, de draaiing moet daarom ruimer zijn.

Uit de onderzoekingen van AEBY †) is vervolgens gebleken, dat voor den apenvoet hetzelfde geldt als voor den kindervoet. Ook bij dezen is de ligging van den talus daardoor gekenmerkt, dat zijn hoofd evenals bij het kind meer naar binnen toe ziet. Uit eene instructieve tabel, die AEBY over de verschillende hierbij van belang zijnde assen van den voet van den volwassene, van het kind en van verschillende apen geeft, volgt de groote overeenkomst der beide laatsten

---

*) ANN E. CLARK, *The ankle joint of man.* A graduation thesis. Berne 1877.

†) AEBY, Beiträge z. Osteologie des Gorilla. *Morpholog Jahrbuch.* Bd. 4.

naviculare was naar voren afgeweken, de diep uitgeholde sinus tarsi was door kraakbeen bekleed en in eene gledingsvlakte voor den processus lateralis tali veranderd. De talus eindelijk was naar voren, binnen en onderen geluxeerd. Volgens HOLL heeft eene dergelijke vergroeiing van calcaneus en naviculare de ontwikkeling van een sterken platvoet ten gevolge, wat hem aanleiding geeft de aetiologie van den aangeboren platvoet met den nieuwen pes valgus e coalitione te verrijken.

Dat in een bijzonder geval, zooals in dat van HOLL, de coalitie bijgedragen heeft tot de vorming van den platvoet, is mogelijk; zeker echter is het dat de eigentlijke oorzaak der misvorming dieper moet gelegen zijn, aangezien de coalitie de liggingsverandering van talus en naviculare niet verklaren kan. Er werd dan ook in de boven vermelde vier gevallen, van VERNEUIL, GRUBER en mij, niets van eene dergelijke liggingsverandering waargenomen. Evenmin was in die gevallen sprake van den platvoet, noch van pes valgus congenitus (bij de kindervoeten), noch van pes valgus acquisitus (bij de voeten der beide 13—15 jarige knapen).

Als HOLL daarom beweert, dat de onderlinge vergroeing van talus en calcaneus door een geringen, die van calcaneus en naviculare door een sterken platvoet gevolgd zijn, zoo steunt deze beweering op één geheel ziekelijk geval, waar tegenover vier andere gevallen van zuivere coalitie staan, waar niets van die veronderstelde consecutieve vormveranderingen te bespeuren was. Er bestaat derhalve geen aanleiding om de coalitio calcaneo-navicularis onder de aetiologische momenten van pes valgus op te nemen. Des te minder, daar er ook aprioristisch geen reden is, waarom die coalitie den platvoet zou doen ontstaan.

Utrecht, 20 Maart 1882.

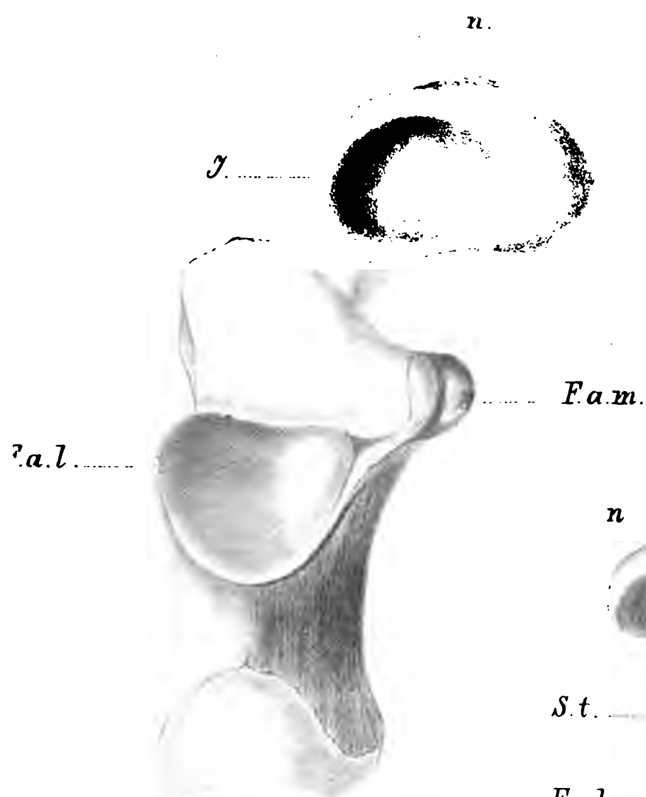


Fig. 1.

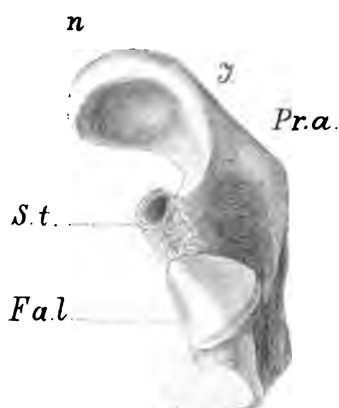


Fig. 2.

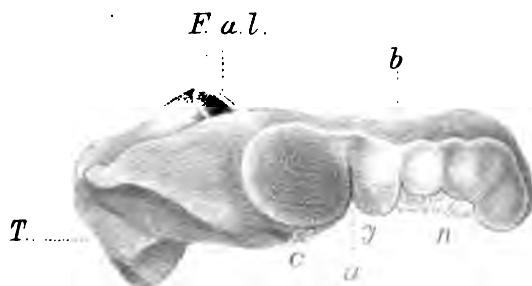


Fig. 3.

MAX WEBER ad nat del.

VERKLARING DER AFBEELDINGEN.

Fig. 1. Linker calcaneus en naviculare n. van den 13jarigen knaap van boven gezien. Beide zijn onderling verbonden door de synchondrose I.

F. a. l. facies articularis lateralis calcanei.

F. a. m. facies articularis medialis calcanei.

Fig. 2. Rechter calcaneus en naviculare *n* van het pasgeboren kind, van boven gezien.

I. synchondrose, waardoor beide beenderen verbonden zijn.

Pr. a. processus anterior calcanei.

St. sustentaculum tali.

F. a. *l.* facies articularis lateralis calcanei.

Fig. 3. Hetzelfde voorwerp van voren; het is gelijktijdig zoo gedraaid dat men, een derde en profil, de laterale en plantare vlakte van den calcaneus ziet.

T. tuber calcanei.

F. a. l. facies articularis lateralis calcanei.

C. processus anterior calcanei met de superficies cuboidea, die door de sleuf „a" benedenwaarts begrensd is tegenover de geledingsvlakte op de synchondrose I.

b. lijst, waardoor de buitenste facette der distale geledingsvlakte van het naviculare afgescheiden is van de geledingsvlakte der synchondrose.

n. naviculare met zijne in drie facetten verdeelde distale geledingsvlakte.

ERRATA.

Blz.	3	regel	8	v. o.	*staat:*	α	*lees:*	$\frac{1}{2}\alpha$
»	9	»	4	v. b.	»	voor	»	aan
»	11	»	1	v. b.	»	(28)	»	(27)
»	11	»	20	v. b.	»	(7)	»	(1)
»	16	»	15	v. o.	»	$''$,25650	»	$''$,25653
»	25	»	2	v. o.	»	α	»	$\frac{1}{2}\alpha$
»	30	»	2	v. b.	»	$\sin\lambda$	»	$\cos\lambda$
»	32	form.	(18)		»	$\sin^2\alpha'$	»	$\sin^2\frac{1}{2}\alpha'$
»	32	»	(20)		»	$\sin\alpha'\cos\alpha'$	»	$\sin\frac{1}{2}\alpha'\cos\frac{1}{2}\alpha'$

BIJDRAGE

TOT DE

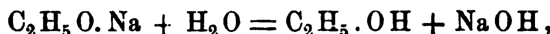
KENNIS VAN NORMAAL CYAANZUUR,

DOOR

E. MULDER.

DERDE GEDEELTE *).

In het Tweede Gedeelte †) dezer Bijdrage werden proeven medegedeeld, waarbij aanwezigheid van water zooveel mogelijk was tegengegaan in de reactie van broomcyaan en natrium-aethylaat; het eerstvolgende strekt, den invloed van water op deze reactie eenigermate te leeren kennen. Reeds vroeger werd gezegd dat het ruwe product, gemaakt met alkohol A, geen waarneembaar verschil opleverde met dat van alkohol B. Bij de volgende bereidingen werd uitgegaan van alkohol A, en achtereenvolgens een andere hoeveelheid water toegevoegd. Aangenomen, dat natrium-aethylaat door water aldus wordt ontleed:



$$C_2H_5O.Na + H_2O = C_2H_5.OH + NaOH,$$

zouden 23 gew.-d. natrium eischen 18 gew.-d. water ter ontleding van $C_2H_5O.Na$ in $C_2H_5.OH$ en $NaOH$, en der-

*) Bijdrage Eerste Gedeelte (verkort: B. I), zie Verslagen en Mededeelingen, 2de Reeks, Deel XVI, p. 286 (1880); Tweede Gedeelte (verkort: B. II), l. c., Deel XVII, p. 162 (1881); zie verder: *Berichte der Deutschen Chem. Gesellsch.*, Jahr. XV, S. 69 (1882).

†) B. II, p. 165.

halve 3,8 gr. natrium (veelal bij iedere proef genomen) aan water 2,9 gr. behoeven. Men is hierbij uitgegaan van de veronderstelling, dat alkohol A absoluut is, maar de sterkte komt nagenoeg overeen met 99,5 p.c., en 58 gr. alkohol A (genomen op 3,8 gr. natrium) houden dus ongeveer 0,29 gr. water in, in staat $\frac{1}{10}$ gedeelte te ontleden van het natrium-aethylaat.

Als eerste proef werd 1,4 gr. water gedaan bij de oplossing van 3,8 gr. natrium in het mengsel van 58 gr. alkohol en 116 gr. aether, vervolgens broomcyaan (in aetherische oplossing) bijgevoegd, en overigens te werk gegaan als bij een gewone bereiding *). Na filtreeren en overhalen van aether en alkohol op een waterbad, bleef een vloeibaar product terug, dat zich niet merkbaar onderscheidde van dat op gewone wijze verkregen. We moeten hier evenwel vermelden, dat het water, gevoegd bij de oplossing van het natrium (in het mengsel van alkohol en aether) een vloeibaar lichaam deed afzetten, zonder twijfel natrium-aethylaat of natrium-hydroxyde verbonden met water. Om die reden werd een kleine wijziging aangebracht en bij een volgende proef eerst het water gedaan bij den alkohol, daarna vermengd met den aether en vervolgens het natrium toegevoegd; de uitkomst scheen dezelfde te zijn. De laatste proef werd herhaald met $2 \times 1,45 = 2,9$ gr. water (op 3,8 gr. natrium), en derhalve zou al het natrium-aethylaat kunnen ontleed worden. Wederom werd als eindproduct een vloeistof erlangd, die er uitzag als naar gewoonte. In het voorbijgaan mogen we mededeelen, dat dit laatste ruwe product in een gesloten buisje (onder een exsiccator) werd bewaard gedurende een half jaar; na praecipitatie met water, zette zich betrekkelijk zeer spoedig een krystallijne massa af. Het vloeibare (water en wat daarin was opgelost) werd afgeschonken; men liet de vaste massa nog eenigen tijd staan met een nieuwe hoeveelheid water, vervolgens werden de krystallen gedaan tusschen filtreerpapier; daarna opgelost in alkohol, water bijgedaan, en aldus

*) B. II, p. 163, 165.

na staan onder een exsiccator schoone krystallen verkregen van normaal cyanuurzuur aethyl. Het voorgaande werd medegedeeld, daar men hier een afwijking schijnt te hebben van den regel, in zooverre als het ruwe product op gemelde wijze, alsmede den gewonen weg volgende, erlangd, na toevoeging van water een vloeibaar lichaam geeft, dat vele weken vereischt, alvorens het genoegzaam vast is geworden; bij staan met water is ongeveer dezelfde tijd noodig om vast te worden, terwijl een lage temperatuur tot het afzetten van normaal cyanuurzuur aethyl zeer geschikt is. Maar keeren we terug tot de hoofdzaak. Niettegenstaande de aanwezigheid eener hoeveelheid water voldoende ter ontleding *van al het natriumaethylaat:* $C_2H_5.ONa$ in $C_2H_5.OH$ en $NaOH$, schijnt de reactie toch nagenoeg zoo te verloopen, als ware er geen water voorhanden. Het was reeds bekend, zooals men zich zal herinneren, dat $NaOH$ (of KOH) in alkoholische oplossing soms overeenkomstige reacties doet ontstaan als $C_2H_5O.Na$ (of $C_2H_5.OK$) zou doen. Daar de vorming van $NC.OC_2H_5$ en het daarvan afgeleide: $3(NC.OC_2H_5)$ niet wel anders kan geschieden dan met $C_2H_5.ONa$, moet worden aangekomen, dat de volgende ontleding onder gemelde omstandigheden waarschijnlijk niet plaats heeft:



$$C_2H_5.ONa + H_2O = C_2H_5.OH + NaOH,$$

of anders gezegd, dat $C_2H_5.ONa$ bij aanwezigheid van betrekkelijk veel water zeer wel kan blijven bestaan.

Opmerkingswaardig is, dat bij een gewone bereiding en toevoeging van eenig water, betrekkelijk weinig urethaan schijnt te ontstaan, en de omstandigheden toch tot de vorming daarvan gunstig zijn:

1. $C_2H_5.ONa + H_2O = C_2H_5.OH + NaOH$
2. $NaOH + BrCN = NC.OH + BrNa$
3. $NC.OH = OC.NH$
4. $OC.NH + C_2H_5.OH = NH_2.CO.OC_2H_5.$

Tot nog toe werd niet nagegaan, of $NaOH$ tot een over-

eenkomstig resultaat leidt *), wel werd uitbreiding gegeven van het vroegere en hoeveelheden water toegevoegd van $2{,}9 \times 2 = 5{,}8$ gr, $2{,}9 \times 3 = 8{,}7$ en zelfs van $2{,}9 \times 4 = 11{,}6$ gr., als altijd op 3,8 gr. natrium. Aangezien evenwel door den aether (ook der oplossing van broomcyaan) wat aan een vloeibare natriumverbinding zou kunnen uitgescheiden worden en dit inderdaad het geval was bij toevoeging van de gewone hoeveelheid aether aan de oplossing van natrium in den alkohol na bijvoeging van het water, zoo werd de volgende afdoende proef genomen. Bij 116 gr. alkohol A werden gedaan 30 gr water, van dit mengsel genomen 40 gr. en daarin opgelost 3,8 gr. natrium. Hierbij nu liet men uit een burette langzaam vloeien (onder afkoeling) 19 gr. broomcyaan in 30 gr. alkohol, en eerst daarna werden 18,6 gr. aether toegevoegd, gefiltreerd en het filtraat als altijd op een waterbad zooveel mogelijk bevrijd van alkohol en aether. Het verkregen product was weder vloeibaar, evenwel gekleurd; na zuivering met water werd een vloeibaar lichaam afgezonderd, dat bij staan afzette *normaal cyanuurzuur aethyl.* In deze proef bedroeg de hoeveelheid water op $C_2H_5.ONa$ niet minder dan $5H_2O$. Wijst het optreden van gekleurde stoffen op nevenreacties van een anderen aard als plaats hebben bij afwezigheid van water, de vorming van n. cyanuurzuur aethyl in dit geval is niet van belang ontbloot. Neemt men in aanmerking, dat $C_2H_5.ONa$ een stevige verbinding aangaat met xC_2H_6O, dan zou het niet zoo vreemd zijn, wanneer $C_2H_5.ONa$ tegelijk met een zekere hoeveelheid water in alkohol kan blijven bestaan.

Het is mijn voornemen niet om dit onderwerp nog nader te vervolgen, en het medegedeelde is dan ook voldoende om te doen zien, dat de aanwezigheid van eenig water geen noemenswaardigen invloed schijnt uit te oefenen op de reactie van broomcyaan en natriumaethylaat, en het zal wel genoegzaam onverschillig zijn, of men alkohol neemt van 99,5 p.c. of werkelijk absoluten alkohol;

*) Vroeger (zie Eerste Gedeelte p. 5) werd een proef gedaan met KOH, maar onder andere omstandigheden.

toch werd deze laatste genomen ook bij de later volgende proeven.

Alvorens terug te keeren tot het hoofddoel van ons onderzoek, namelijk de al of niet vorming van $NC.OC_2H_5$ bij inwerking van broomcyaan en natriumaethylaat na te gaan, zullen eenige eigenschappen van *normaal cyanuurzuur aethyl* moeten behandeld worden. De vorming toch van dit lichaam staat in innig verband met het hoofdvraagstuk, en geschikte reacties op het polymerisatie-product zouden niet weinig kunnen bijdragen, ten einde de oplossing mogelijk te maken. Men was zoo gelukkig eenige kenmerkende eigenschappen op te sporen. De volgende is al dadelijk zeer geschikt, om een betrekkelijk kleine hoeveelheid n. cyanuurzuur aethyl aan te toonen. Laat men krystallen van n. cyanuurzuur aethyl met water geruimen tijd staan bij gewone temperatuur, dan ontstaat er oplossing; ongeveer 0,7 gr. van dit lichaam lost op in 100 C.C. water bij gewone temperatuur na vele dagen bij herhaald schudden. Deze oplossing nu bezit de opmerkenswaardige eigenschap, dat zij verhit tot nabij het smeltpunt (ongeveer 29°) van n. cyanuurzuur aethyl, een sterke *troebeling* vertoont *). Dit is in mindere mate of *niet het geval* met een *niet* verzadigde oplossing. Bij bekoeling verdwijnt de troebeling, en treedt bij verwarming weder te voorschijn; en dit kan tot in 't oneindige, om zoo te zeggen, worden herhaald. Of men bij dit verschijnsel te doen heeft met een *smelten in oplossing*, laat ik voorloopig daar.

Wordt n. cyanuurzuur aethyl met water in een buis boven de vlam verhit, dan wordt de oplossing bij bekoeling eerst troebel en daarna helder. De oplossing vertoont dan dezelfde eigenschap als die gemaakt bij gewone temperatuur, noodwendig verondersteld, dat n. cyanuurzuur aethyl in genoegzame hoeveelheid aanwezig is; in een reageerbuisje gedaan geeft zij door de warmte der hand tevens een troebeling. Het is duidelijk, dat van deze eigenschap van n. cyanuurzuur aethyl partij kan worden getrokken bij het opsporen van dit lichaam. En wil men weten, of in eenig product der berei-

*) Zie B. II, 167.

ding zeer waarschijnlijk aanwezig is n. cyanuurzuur aeh yl, dan kan men dit, na wasschen met eenig water, laten staan met water, nog beter het daarmede schudden (sneller gaat men te werk door het eerst te verwarmen tot het is gesmolten, in geval het product namelijk vast is) en te filtreeren. We zullen later gelegenheid hebben op de toepassing terug te komen, maar wenschen eerst nog een belangrijke eigenschap mede te deelen van n. cyanuurzuur aethyl, van namelijk *broom* te kunnen addeeren.

Een genoegzaam verzadigde oplossing van n. cyanuurzuur aethyl geeft met *broomwater* een gele krystallijne verbinding, die zich veelal als kleine naalden dadelijk afzet; soms evenwel is het neêrslag aanvankelijk schijnbaar amorph, om daarna waarneembaar krystallijn te zijn. De betrekkelijk geringe oplosbaarheid van n. cyanuurzuur aethyl in aanmerking genomen, mag dit een gevoelige reactie heeten. Na filtratie en brengen der krystallijne massa tusschen filtreerpapier onder een glazen klok, bleek weldra in merkbare mate broom vrij te komen, terwijl na staan onder een exsiccator met kalk, een stof terugblijft, die (als n. cyanuurzuur aethyl) gemakkelijk smelt op de hand, en na staan met water en filtratie een oplossing geeft, die zoowel bij verwarming als tegenover broomwater zich verhoudt als n. cyanuurzuur aethyl. Somwijlen behoudt de stof evenwel geruimen tijd een gele tint, maar deze eindigt met te verdwijnen. Bij verhitten in droogen staat (tevens in oplossing) van gemeld broomproduct, komt rijkelijk broom vrij; reeds, als gezegd, het geval bij gewone temperatuur, zoodat aan een bepaling der samenstelling door analyse bezwaarlijk gedacht kan worden. Men mag dus wel aannemen, dat men te maken heeft met een additieproduct, dat zeer labiel is opgebouwd. Van broomwaterstofvorming werd niets waargenomen. In water verdeeld met eenig zilvernitraat, wordt de verbinding ontleed en broomzilver afgescheiden.

Een additieproduct schijnt tevens te ontstaan bij behandeling van n. cyanuurzuur aethyl met broom in overmaat. Wordt in een buis wat gedaan van het cyanuraat en daarna broom, na een weinig schudden gefiltreerd door glaswol en

het filtraat geplaatst onder een glazen exsiccator met zwavelzuur (waarbij eenig broom), dan blijft na eenigen tijd een oranje-roode verbinding terug, die bij staan onder een exsiccator met kalk broom verliest.

Proef I. Een hoeveelheid van 0,5825 gr. n. cyanuurzuur aethyl werd in een soort glazen bakje gedaan met ongeveer 12 gr. broom, en bedekt met een glazen plaatje, onder een glazen exsiccator een dag gelaten, daarna in den exsiccator *zwavelzuur met broom* gevoegd, en het plaatje afgenomen. Zoodra de massa schijnbaar vast was, ging men over tot het wegen. Na een vermeerdering in gewicht tot minder dan 69 p.c. der verbinding, van n. cyanuurzuur aethyl en broom, werd in den exsiccator *kalk* geplaatst.

Proef II. Werd verricht met 0,343 gr. stof en overigens als vroeger te werk gegaan; alleen was de stof gedaan in een glazen *buisje*, bij weging te sluiten met glazen stop.

Proef III. Werd uitgevoerd als de vorige; alleen was de temperatuur der omgeving *hooger* en wel ongeveer die van 14°, terwijl bij de andere proeven de temp. aanvankelijk was 8°. Bij de eerste weging was de massa *niet geheel* vast.

A geeft aan de *vermeerdering* in gewicht; B geeft aan het gehalte der *verbinding* aan broom op 100 gew.-d.; C leert kennen de verschillen in het proc. gehalte:

PROEF I.

	A.		B.	C.
	1,5275	gr.	72,4	
Na een dag.	1,4235	»	70,9	1,5
» » »	1,3915	»	70,4	0,5
» » »	1,3595	»	70,0	0,4
» » »	1,3375	»	69,6	0,4
» » »	1,3225	»	69,4	0,2
» » »	1,3075	»	69,2	0,2
» » »	1,295	»	68,9	0,3
» zes dagen	1,0425	»	64,1	
» zestien dagen . .	0.7925	»	57,6	
» » » . .	0,6885	»	54,1	
» veertien » . .	0,6265	»	51,8	
» » » . .	0,5325	»	47,7	

Proef II.

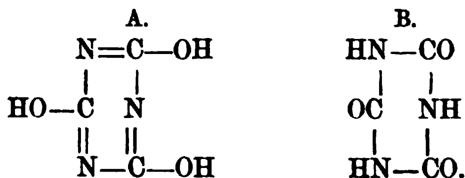
	A.		B.	C.
	0,85	gr.	71,2	
Na een dag.	0,8245	»	70,6	0,6
» » »	0,815	»	70,3	0,3
» » »	0,806	»	70,1	0,2
» » »	0,7995	»	69,9	0,2
» » »	0,792	»	69,7	0,2
» » »	0,788	»	69,6	0,1
» » » . . .	0,783	»	69,5	0,1
» » »	0,778	»	69,4	0,1
» » »	0,771	»	69,2	0,2
» » »	0,765	»	69,0	0,2
» achttien dagen .	0,475	»	58,0	
» veertien » . .	0,3735	»	52,1	
» » » . .	0,305	»	47,0	

Proef III.

	A.		B.	C.
	1,4239	gr.	74,7	
Na een dag.	0,9714	»	66,9	7,8
» veertien dagen.	0,5514	»	53,4	
» » » .	0,4724	»	49,5	

De groote overmaat broom verdampte in deze drie proeven in ongeveer vier dagen. De invloed der temperatuur op de snelheid van dissociatie is zeer duidelijk *).

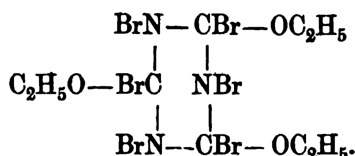
Zooals bekend is tot nog toe niet genoegzaam uitgemaakt, welke der twee volgende formules (A en B) toekomt aan *normaal* cyanuurzuur en welke aan *iso*cyanuurzuur, waarop nog onlangs, onder anderen door Beilstein †) werd gewezen:



*) Zie hierover later B. IV.

†) *Handb. der org. Chem.* v. Beilstein. S. 693.

Hetzelfde geldt noodwendig tevens van tal van verbindingen hiertoe direct terug te brengen, als melamine *), ammeline †) enz,, alsmede van vele substituten (trimethylamine enz,). Gemelde eigenschap van n. cyanuurzuur aethyl maakt het, in verband vooral met hetgeen later volgt, zeer waarschijnlijk, dat aan *normaal* cyanuurzuur is toe te kennen formule A, en dus formule B aan *iso*cyanuurzuur. Beschouwt men de verbinding van n. cyanuurzuur aethyl met broom niet als een moleculaire, dat zij toch ook zoo goed als zeker niet is, maar als een additie-product en wel met 6 Br (overeenkomende met 69,2 p.c. broom), dan is de daar aan te geven vorm:



Het zou wel overbodig wezen te wijzen op de groote overeenkomst in dat geval met benzol, dat eveneens 6 Br zou kunnen addeeren, echter niet zonder aanvoer van wat energy (in den vorm van licht of warmte).

Bij onderzoek bleek, dat *iso*cyanuurzuur aethyl (gemaakt door omzetting van *normaal* cyanuurzuur aethyl) de eigenschap *niet* bezit broom te addeeren, en *evenmin* het polymerisatieproduct gevormd bij staan van methyl *iso*cyanaat ($OC.NCH_3$), welk lichaam niet is te verwarren met *iso*cyanuurzuur methyl. Het *iso*cyanuurzuur (zoogenaamd: *gewoon* cyanuurzuur) addeert *evenmin* broom. Een en ander is genoegzaam in overeenstemming met de verhouding van normaal cyanuurzuur (aethyl) en broom, en deze met de structuurformule hieraan toe te kennen naar de synthese, die leidt tot de formule $N \equiv C - OC_2H_5$ voor aethyl-normaalcyanaat, waarvan normaal cyanuurzuur aethyl wordt afgeleid. Hierbij is duidelijk het streven naar een meer eenvou-

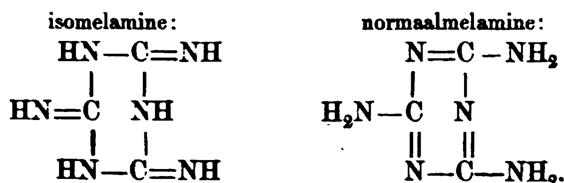
---

*) Beilstein, l. c. S. 714.

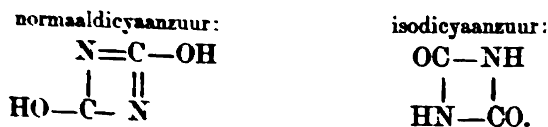
†) Beilstein, l. c. S. 716.

dige binding, zooals de dubbel-binding veelal neiging bezit over te gaan in een enkelbinding. Zoo gaat b. v. methylisocyanaat: $OC = NC_2H_5$ gemakkelijk over in *iso*cyanuurzuur methyl (zie vroeger isocyanuurzuur) en *normaal*-cyanuurzuur aethyl kan worden omgezet in *iso*cyanuurzuur aethyl.

In broom schijnt men een zeer geschikt reagens te hebben ter onderscheiding van gemelde cyanuurzuren, namelijk iso- en normaalcyanuurzuur en directe afgeleiden. Van eenig nevenproduct in kleine hoeveelheid erlangd, wenschte ik te weten, of het een afgeleide was van normaalcyanuurzuur, en reageerde op de waterige oplossing met broomwater; er ontstond een neêrslag en reeds daardoor werd waarschijnlijk, dat het inderdaad een zoodanig afgeleide zou wezen, dat dan ook in overeenstemming bleek te zijn met andere feiten (zie later). Wil men weten, of gewoon melamine is *iso*melamine (tricarbodiimid) of *normaal* melamine (triamidocyanuur, beter genoemd: normaalcyanuurzuurtriamid), dan heeft men slechts te reageeren met broom. Er is wel niet aan te twijfelen of het zal zijn *iso*melamine. Tot mijn leedwezen bezat ik geen melamine meer (gemaakt door melam), en kan dus slechts wijzen op het verschil in structuur:



Al mag men niet besluiten van cyanuurzuren tot *di*cyaanzuren, wagen we het toch als waarschijnlijk uit te spreken, dat normaaldicyaanzuur (onbekend) broom zal kunnen addeeren, en dit *niet* het geval zal zijn met *iso*dicyaanzuur (onbekend):



Ten einde te weten, of zoogenaamd *dicyaandiamid* is *nor-*

*maal*dicyaandiamid (beter normaaldicyaanzuurdiamid) of *iso*-dicyaandiamid (deze benaming is niet gelukkig; beter is die van dicarbodiimid), werd gereageerd op de waterige oplossing met broomwater. Geen additie trad in, en dit pleit dus voor de formule te geven aan *iso*dicyaandiamid (dicarbodiimid), welke ik reeds voor vele jaren aan het lichaam gaf*):



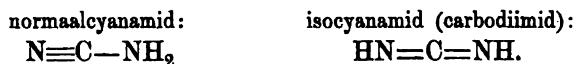
Van *iso*dicyaanzuur zouden wellicht tevens bekend zijn: †)



Mag men van cyanuurzuur evenmin besluiten tot cyaanzuur, zoo is toch al zeer waarschijnlijk, dat *normaal*cyaanzuur broom zal kunnen addeeren, niet aldus: *iso*cyaanzuur:



En hetzelfde zal gelden van de esters en andere afgeleiden, zoo van dusgenaamd cyanamid, dat de eigenschap *niet* bezit broom te addeeren, en ook daardoor is te beschouwen als te zijn een afgeleide van *iso*cyaanzuur:



Een eenvoudige reactie in een reageerbuisje te volbrengen, kan aldus beslissen met meer of minder waarschijnlijkheid over de structuur van zeer vele verbindingen.

Voegt men bij een waterige oplossing van *normaal*cyanuurzuur aethyl een waterige oplossing van *iodium*, dan schijnt

*) *Ber. d. Deutsch. Chem. Gesellsch.*, 6, 657; zie NENCKI, *Ber.* 9, 248, 2064.

†) Zie BEILSTEIN l. c. 714, 910.

geen additie-product te ontstaan; evenmin bij doorvoeren van *cyaan*. Wordt in het laatste geval broomwater bijgedaan, dan ontstaat broomcyaan, maar er wordt niets afgezet; ook broomcyaan in waterige oplossing gaf met die van n. cyanuurzuur aethyl naar 't scheen geen additie-product. Chloor geleid door een waterige oplossing van n. cyanuurzuur aethyl wordt schijnbaar niet opgenomen, en zoodra is broomwater bijgedaan, of er vertoonen zich naaldjes. Wordt de oplossing na doorvoeren van chloor geplaatst onder een exsiccator, dan zetten zich krystallen af, die zich wat anders schijnen te verhouden als die van n. cyanuurzuur aethyl, dat later nader zal worden nagegaan. Vooralsnog was slechts het doel, geschikte reactiën te vinden op n. cyanuurzuur aethyl, die zouden kunnen gebruikt worden ter quantitatieve bepaling dezer verbinding in het dusgenoemde lichaam van CLOËZ.

Tot nog toe was niet bekend of normaal cyanuurzure esters in gasvorm kunnen optreden. De onderzoekingen van HOFMANN maakten het alleen zeer waarschijnlijk, dat dit bij gewonen luchtdruk het geval niet is, maar daarbij een overgang plaats heeft in *iso*cyanuurzure esters. Als eerste proef werd n. cyanuurzuur aethyl verhit in een zandbad bij langzaam stijgende temperatuur tot nabij 250°, bij welke temperatuur het betrekkelijk langen tijd werd gehouden. Hierbij ging niets over, slechts was in het bovenste gedeelte van het kolfje, waarin de stof werd verhit, wat van een vloeibaar lichaam afgezet. Bij bekoeling werd de hoofdinhoud, aanvankelijk vloeibaar, vast, terwijl de massa een weinig gekleurd was; het vastworden geschiedde bij een temperatuur verre boven 29°. Bij uitkoken met water, werden dan ook na filtratie prismatische krystallen afgezet met een smeltpunt nabij 95°, dus had er zonder twijfel een omzetting plaats gehad in *iso*cyanuurzuur aethyl.

Bij een tweede proef werd n. cyanuurzuur aethyl verhit in een oliebad bij verschillende temperaturen, en hierbij eenigen tijd gehouden, zoo bij 150°, 200°, 210°—220° en ten slotte tot 255° (maar bij deze laatste temperatuur niet gehouden). Het n. cyanuurzuur aethyl was hierbij bevat in een glazen buisje, zooals dit voor een smeltpuntbepaling wordt

gebruikt. Alleen bij verhitting tot 255° was de stof een weinig veranderd, dat daaruit bleek, wijl de inhoud niet vast werd zelfs na dagen, terwijl dit bij de andere temperaturen, na een dag te hebben gestaan, wel het geval was; hierbij moet worden gevoegd, dat n. cyanuurzuur aethyl verhit tot het is gesmolten in den regel ongeveer een halven dag behoeft om over te gaan in den vasten staat. Uit een en ander volgt als waarschijnlijk, dat de omzetting in *iso*cyanuurzuur aethyl schijnt gepaard te gaan met de vorming van nevenproducten.

Verhit in een luchtverdunde ruimte onder een druk van 40—50^{mm}. ging n. cyanuurzuur aethyl goed over bij ongeveer 235°. Hieruit volgt derhalve, dat dit lichaam bij een betrekkelijk hooge temperatuur als gas kan bestaan. Later zal men trachten het s.g. in gasvorm te bepalen, dat overeen moet stemmen met dat van *iso*cyanuurzuur aethyl.

In 't voorbijgaan mogen we met een enkel woord wijzen op nog onbekende soorten van isomeren, die wellicht kunnen bestaan. Het laat zich denken, dat onder sommige omstandigheden ketens in elkander zijn gewerkt. De cellulose-wand der cel is wellicht opgebouwd uit open ketens van cellulose, die door elkander zijn geslingerd. De eiwitstoffen bestaan niet onwaarschijnlijk uit ketens (meerendeels open, ten deele ook gesloten, waartoe meer bepaald een of meer aromatische ketens), (als altijd naar bepaalde wetten) in elkander gewerkt; maar zou de band hier een meer chemische kunnen wezen. Bij polymeriseeren nu b. v. van $N{\equiv}C{-}OC_2H_5$ tot een keten met zes schakels, zou het mogelijk zijn, dat b. v. twee dergelijke ketens in elkander grepen bij de vorming; een soort isomerie, waaraan de naam van *cycle-isomerie* zou kunnen gegeven worden. Neemt men aan, dat de atomen, welke de schakels vormen der keten, zoo goed als in een cirkel aaneengesloten zijn, dan is echter de kans tot een bestaan van dusdanige isomerie met ketens van niet meer dan *zes* schakels (benzol, cyanuurzuur enz.) hoogst *onwaarschijnlijk* door gebrek aan de noodige ruimte in den ring. Samenstelling en s.g. in gasvorm zijn, onder anderen, middelen, ten einde dezen toestand te leeren kennen, waarop we slechts

even de aandacht wenschten te vestigen. Keeren we andermaal terug tot n. cyanuurzuur aethyl.

In verband met het vroeger medegedeelde aangaande de wijze van krystalliseeren van n. cyanuurzuur aethyl uit een alkoholisch waterige oplossing, diene, dat het onder gunstige omstandigheden (de temperatuur moet noch te hoog noch te laag zijn en wel zoo ongeveer 10°) kan optreden in goed gevormde prisma's, die *den glans behouden* bij krystallisatie uit de oplossing in alkohol met water. Laat men een verzadigde oplossing in water van n. cyanuurzuur aethyl staan bij lagere temperatuur, dan zetten zich eveneens goed gevormde krystallen af, die echter verweêren *) en dan ook bij nader onderzoek bleken krystalwater te bevatten. Deze krystallisatie geschiedt het best nabij 0° bij rustig staan, in welk geval ontstaan lange fijne naalden. Van deze werd, in een niet verwarmd vertrek, gebracht op filtreerpapier, nu en dan ververscht, tot geen vocht meer schijnbaar werd afgegeven. Een hoeveelheid van 1,1613 gr. stof verloor na staan onder een exsiccator aan gewicht: 0,571 gr., dat op 100 gew.-d. der verbinding overeenkomt met een gehalte aan water van:

gevonden:	$3(NC.OC_2H_5)+12H_2O$ eischt:
49,1	50,3.

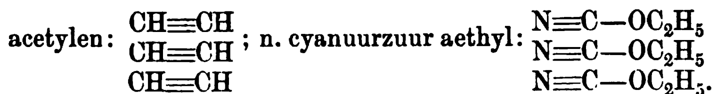
Bij deze bepaling moet evenwel worden vermeld, dat, niettegenstaande de temp. van het vertrek ongeveer 6° bedroeg, op kleine schaal verweêring intrad, en men zich dus een weinig moest haasten, de krystallen te bevrijden van aanhangend water (zie later). Deze proef moet in een strengen winter herhaald worden In 't voorbijgaan zij opgemerkt, dat, ingeval in de formule van n. cyanuurzuur (aethyl) dubbel-binding dusgenaamd wordt genomen als enkelbinding en N beschouwd als $\overset{v}{N}$, het mol. niet minder dan 12 vrije affiniteiten zou bezitten.

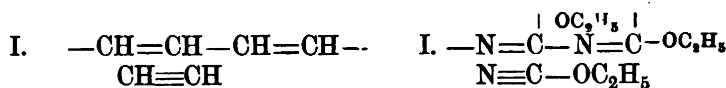
Opmerkingswaardig is, dat 50 gr. eener verzadigde oplos-

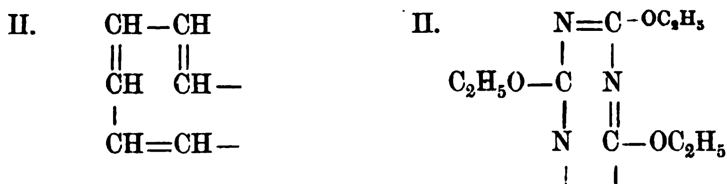
*) B. II, 167.

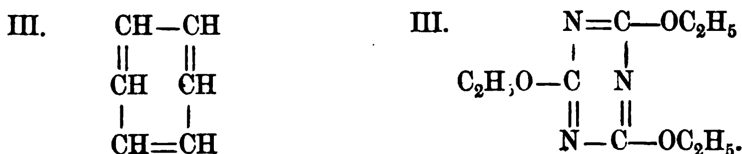
sing van n cyanuurzuur aethyl, die ongeveer bevatte 0,35—0,4 gr. dezer stof, bij lage temperatuur verreweg de grootste hoeveelheid deed uitkrystalliseeren, zoodat slechts in oplossing ongeveer 0,08 gr. overbleef (bepaald door verdampen der oplossing, onder een exsiccator, op een schaaltje).

Reeds vroeger *) werd gewezen op het verband tusschen n. cyanuurzuur, b. v. als aethylester, met benzol, pyridine, barbituurzuur enz.. Belangrijk is het verband tusschen de vorming van benzol door acetylen en n. cyanuurzuur uit n. cyaanzuur, waarvan de aethylester zal worden genomen. Gaan we daarvan uit, dat benzol en n. cyanuurzuur terug te brengen zijn tot gesloten ketens met 6 schakelen met opeenvolgende enkel- en dubbelbinding, dan ontstaan gemelde synthesen, zoo kan men het zich voorstellen, in drie achtereenvolgende phasen:



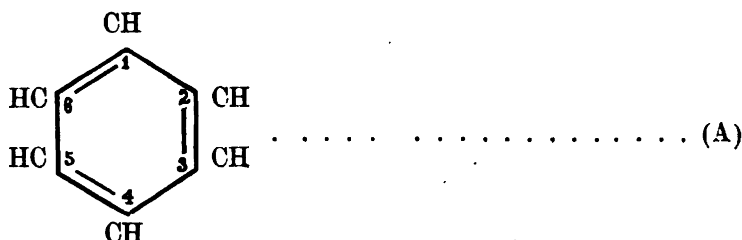






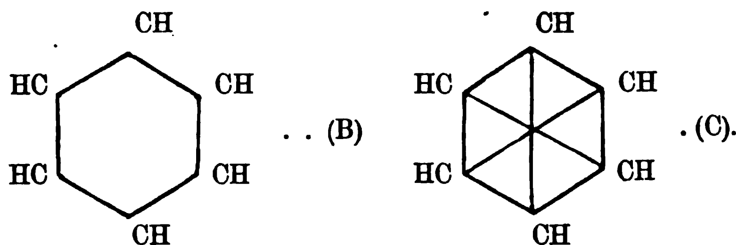
*) B. II, 170.

Zooals bekend vinden sommige scheikundigen gemelde benzolformule, veelal teruggegeven in een zeshoek:

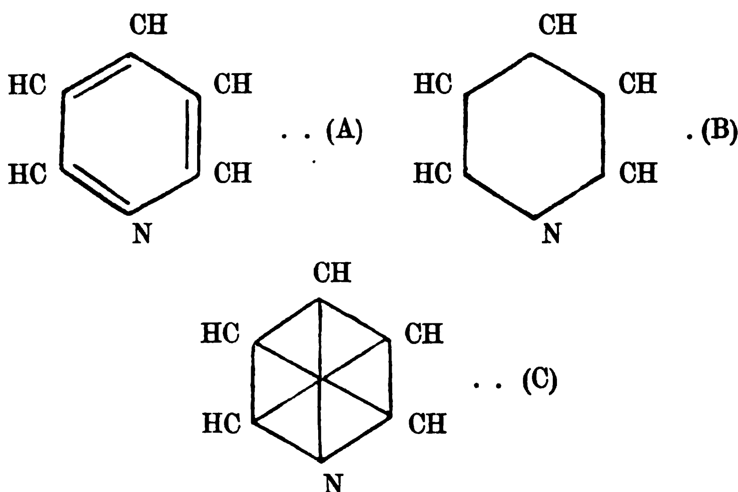


niet vrij van bedenking, en wel vooral, omdat tengevolge van enkel- en dubbelbinding, bij verplaatsing der atomen waterstof van 1,2 een lichaam zou moeten ontstaan, isomeer met dat gemaakt door verplaatsing der atomen waterstof van 1,6. Daarbij komt, dat benzol niet gemakkelijk chloor en broom addeert, en wat erger is, chloorwaterstof en analogen niet addeert, noch naar 't schijnt waterstof. In de eerste plaats mag niet worden voorbijgezien, dat een zeshoek willekeurig is gekozen, tenzij men zich voorstelt, dat de zwaartepunten der koolstofatomen zijn vereenigd door lijnen, en de atomen in een ring genoegzaam aaneengesloten. Wat aangaat het aannemen van een al of niet bestaan van dubbelbinding, zoo wordt wellicht te veel over 't hoofd gezien, dat van binding in 't algemeen door de zoogenaamde affiniteiten al betrekkelijk zeer weinig bekend is. Maar van meer belang is het er op te letten, dat in deze benzolformule alle atomen koolstof op *overeenkomstige* wijze zijn verzadigd, en wel ieder dezer door twee affiniteiten van een naastliggend atoom en een affiniteit van een ander atoom koolstof, daarenboven door een atoom waterstof. De ring verkeert dus in een toestand van stabiel evenwicht; maar de hoofdzaak is, dat ieder atoom koolstof kan geacht worden zich te bevinden in *eenzelfden toestand*, en om dezen *toestand* schijnt het te doen te wezen. Naar deze opvatting is 1,2 = 1,6.

Er is voorgesteld, vrije affiniteiten aan te nemen, alsmede verzadiging door enkel-binding:



We laten in 't midden, in hoeverre deze of gene physische of physisch-chemische eigenschap aanleiding zou kunnen geven tot formule A, B of C. De eigenschap van benzol, chloor en broom te addeeren, wijst op A of B; dat hiertoe eenige energy wordt vereischt, kan vooralsnog geen aanleiding wezen, om over te gaan tot formule C. Dit laatste blijkt vooral niet onduidelijk, in geval men benzol beschouwt als slechts een schakel uit te maken van een groote keten, waartoe pyridine, cyanuurzuur, barbituurzuur enz. behooren, ketens met zes schakels, bestaande uit koolstof of koolstof en stikstof. Nemen we eens pyridine, dan heeft men in bovengemelde formules slechts een CH te verplaatsen door N:



en blijkt, dat N in formule A nog 2 vrije affiniteiten zou hebben en dit heeft, als bekend, geen bezwaar; tevens zou

dit het geval wezen in C, maar in B zou N hebben 3 vrije affiniteiten, en het is zeer de vraag, of N daarmede genoegen zou nemen. Wel kan men beweren, dat N niet hetzelfde is als C, maar, zooals vroeger werd medegedeeld *), N moet geacht worden de plaats te kunnen innemen van CH (vergelijk tevens: naphtaline en chinoline).

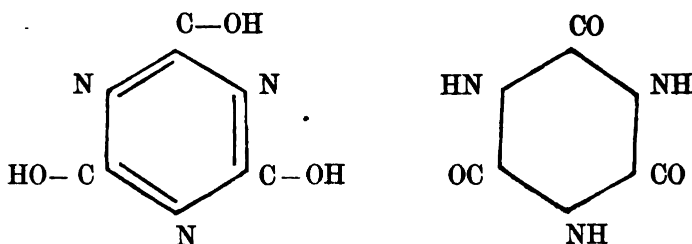
Het aannemen van vrije affiniteiten, waar dit *niet* noodzakelijk is (dit is b. v. *wel* het geval met N in formule A), komt bedenkelijk voor. Reeds willen eenige vrijdenkers vrije affiniteiten aannemen b. v. in acetylen, en toch polymeriseert acetylen zich eerst bij verhoogde temperatuur, en moet blijkbaar zekere weêrstand worden overwonnen. Het is zoo, voor het oogenblik doet het er weinig toe, of men vrije affiniteiten aanneemt of dubbel-binding, zoo in benzol, of alleen enkelbinding daarin doet plaats hebben, omdat onze kennis op dit gedeelte der theoretische scheikunde nog zeer onvolledig is; toch is het wenschelijk, telkens deze zaak ter sprake te brengen en te toetsen aan de bekende feiten. Door de aromatische stoffen *niet* te beschouwen als een afgezonderd geheel, zal men zeker meer kans hebben, wat dieper door te dringen.

Na het medegedeelde behoeft wel niet gezegd, dat de dusgenaamde prismaformule, voor benzol gegeven, tevens zou moeten worden toegepast op pyridine, cyanuurzuren, barbituurzuur enz. en dit schijnt niet aanbevelenswaardig. De bezwaren ook daargelaten, die deze oplevert voor naphtaline (de vorming van phtalzuur hieruit enz.), is het beter in 't algemeen zich te houden aan een meer eenvoudigen vorm, wanneer de feiten dit genoegzaam toelaten, zooals het geval is met formule A. Ten slotte mogen we herinneren aan een middel, voor vele jaren gegeven †), dat niet onwaarschijnlijk, als gevoelig reagens ter plaatsbepaling in analoge verbindingen, uitnemende diensten zal kunnen doen, namelijk bestaande in het substitueeren van waterstof door *optisch werkzame* resten. Wil men b. v. weten, of 1,2 = 1,6 is in

*) B. 11, 171.

†) *Berl. Ber.*, 7. 1331.

benzolformule A, dan vergelijke men de substituten 1,2 en 1,6, daarbij gebruik makende van een geschikt optisch werkzaam lichaam. We twijfelen er wel niet aan, of de substituten zullen identisch wezen. In hoeverre dubbel-binding kan worden verplaatst, zou ons te veel doen afwijken van het onderwerp, wilden we deze zaak hier behandelen. Het medegedeelde kan voldoende zijn, ten einde eenigermate te doen uitkomen, dat gesloten ketens met zes schakels, bestaande uit koolstof en stikstof, tot eenzelfde type moeten worden teruggebracht, en men vooralsnog wel doet, b. v. dezelfde type-formule te geven aan benzol (zie formule A) als aan normaal- en iso-cyanuurzuur:



Denkt men zich in iso-cyanuurzuur een NH verplaatst door CO, dan wordt het alloxan, gemakkelijk af te leiden van *barbituurzuur*.

Zal men een scheikundig proces naar behooren kunnen volgen, dan is het, zooals bekend, niet genoeg, uit te gaan van zoo mogelijk zuivere stoffen en deze in een bekende verhouding onder bekende omstandigheden op elkander te laten inwerken, maar moet ieder product genoegzaam worden onderzocht, en de hoeveelheid bepaald, waarin het ontstaat. Kennis betreffende de samenstelling van ruwe producten kunnen tevens goede diensten doen in verband met het andere. En zoo kwam het ons wenschelijk voor, analysen te doen van het ruwe product (A), verkregen na verwijdering zooveel mogelijk van alkohol en aether van het filtraat (bekomen door filtratie na inwerking van broomcyaan op natriumaethylaat); tevens werden analysen verricht van het ruwe product na staan onder een exsiccator met zwavelzuur gedurende nagenoeg een week (B) en een maand (C). De ana-

lysen hebben betrekking op drie bereidingen (I, II en III) met alkohol B.

I. Een hoeveelheid van 0,3359 gr. stof gaf 0,6083 gr. kooldioxyde en 0,2906 gr. water (A).

II. Na ongeveer een week te hebben gestaan, gaf van een tweede bereiding 0,4274 gr. stof aan kooldioxyde 0,7569 gr. en 0,3075 gr. water (B); en na een maand gaf 0,3885 gr. stof 0,6547 gr. kooldioxyde en 0,2507 gr. water (C).

III. Van een derde bereiding gaf, uitgaande van een versch ruw product 0,4462 gr. stof bij 3° en 785,2^{mm} aan stikstof 49 C.C. (A); na een week gaf 0,4108 gr. bij 3° en 777,1^{mm} aan stikstof 68 C.C. (B); na een maand gaf 0,4598 gr. stof bij 8° en 764,2^{mm} aan stikstof 85 C.C. (C).

IV. Van een vierde bereiding gaf van een versch product 0,3526 gr. stof aan kooldioxyde 0,619 gr. en water 0,2819 gr. (A).

Op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

	A.			B.		C.	
koolstof. .	49,3	—	47,8	48,2	—	46,6	—
waterstof .	9,6	—	8,8	7,9	—	7,1	—
stikstof. .	—	13,9	—	—	20,8	—	22,8.

Na ongeveer twee maanden en in 't geheel drie maanden te hebben gestaan, werd III andermaal geanalyseerd en wel koolstof en waterstof bepaald, en na veertien dagen tevens stikstof (D).

0,4996 gr. stof gaf 0,8728 gr. kooldioxyde en 0,3246 gr. water;

0,3861 gr. stof gaf 72,5 C.C. stikstof bij 13° en 750,1^{mm} (gecorr.).

Op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

	D III	
	a.	*b.*
koolstof.	47,6	—
waterstof	7,2	—
stikstof	—	21,8.

Bij staan was een kleine hoeveelheid afgezet van een

krystallijne stof en wel 0,25 gr. ongeveer van 12 gr. oorspronkelijk ruw product, na staan herleid tot zoo wat 8 gr. Deze stof bevatte 35,9 p.c. stikstof en had een veel hooger smeltpunt dan n. cyanuurzuur aethyl; het bestond waarschijnlijk uit een mengsel van monamido- en diamido-cyanuurzuur aethyl.

Uit het voorgaande volgt tevens als waarschijnlijk, dat het ruwe product weinig of geen urethaan bezat.

Het ruwe product *) van bereiding II woog ongeveer 38 gr. (dat van I nagenoeg 39 gr.) en was verkregen met $3,8 \times 3 = 11,4$ gr. natrium. Na een week te hebben gestaan, verminderde het tot ongeveer 23 gr., *dus waren niet minder dan 13 gr. vervluchtigd.* Bij de bereiding van het ruwe product was, als vroeger, ter verwijdering zooveel mogelijk van aether en alkohol, het filtraat in een kolfje op een waterbad verhit, en daarna het terugblijvende gedaan in een reageerbuis, die zoo goed als geheel, voor zooverre deze met vloeistof was gevuld, geplaatst was onder het water (van het bad), dat zoolang bij de kooktemperatuur werd gehouden, tot nagenoeg niets meer overging; bij deze laatste bewerking was dit zeer weinig. Hier moet, naar 't schijnt, gedacht worden aan een verbinding van $x(NC.OC_2H_5)$ en C_2H_6O, en wel waarschijnlijk van normaal aethyl*cyanaat* met alkohol, met 't oog op de samenstelling, ook wijl het product zeer dun vloeibaar is:

	$x[NC.OC_2H_5, C_2H_6O]$ eischt:
koolstof	51,2
waterstof	9,4
stikstof	11,9.

Een hoeveelheid van 38 gr. dezer verbinding zou ongeveer 14 gr. alkohol bevatten, terwijl, als zooeven medegedeeld, een verlies werd gevonden van 13 gr.. Het ruwe product kan in vacuo niet worden overgehaald zonder ontleding. Uit het vroeger gemelde volgt, dat daarin waarschijnlijk in kleine hoeveelheid eenig monamido- en diamido-cyanuurzuur aethyl †)

*) B. I, 31.

†) B. I, 228; B. II, 169.

is; dit bevat *minder* koolstof en waterstof en *meer* stikstof dan $x(NC.OC_2H_5)$. Het koolstof- en waterstofgehalte van alkohol maakt duidelijk, hoe aanvankelijk (zie B en C) koolstof- en vooral waterstofgehalte moeten dalen, terwijl, om gezegde reden, daarna het koolstofgehalte wat moet rijzen (D).

Vroeger *) was ons onbekend, dat bij de bereiding zeer duidelijk verlies plaats heeft; bij nader onderzoek is daarenboven gebleken, dat de aether en alkohol door overhaling van het filtraat erlangd, bij staan eerst aan de lucht, daarna onder een exsiccator, een vloeibaar product geeft, dat gedeeltelijk krystalliseert (*urethaan*); ook de kleine hoeveelheid, bij verhitten in de reageerbuis overgegaan, geeft een krystallijn product.

Het vloeibare gedeelte geeft met broomwater een neêrslag, en bevat dus zoo goed als zeker tevens een eenvoudig afgeleide van n. cyanuurzuur.

Keeren we wederom terug tot het lichaam van CLOËZ. Er werd uitgegaan van een product, dat vele dagen had gestaan onder een exsiccator met zwavelzuur. Voor het s.g. werd bij 15^0 gevonden 1,0668 (CLOËZ geeft voor zijn lichaam 1,1271); bij analyse bleek het evenwel niet genoegzaam zuiver te zijn, in zooverre als 0,4391 gr. stof gaf aan kooldioxyde 0,8123 gr. en 0,3132 gr. water, op 100 gew.-d. overeenstemmende met:

		$x(NC.OC_2H_5)$ eischt:
koolstof	50,4	50,7
waterstof	7,9	7,0
stikstof	—	19,7.

Deze uitkomst stemt in hoofdzaak overeen met een analyse, vroeger †) medegedeeld van het lichaam van CLOËZ, toen het niet lang had gestaan onder een exsiccator. We gaven evenwel tevens een analyse §) van een product, dat vele weken had gestaan, en waarvan de samenstelling naderde tot die

*) B. I, 231.
†) B. I, 233.
§) B. II, 170.

gevorderd door de formule: $x(NC.OC_2H_5)$. De vraag nu rees, of zulk een lang staan een vereischte is. CLOËE plaatste zijn lichaam in een luchtverdunde ruimte en na 24 uur werd het geanalyseerd *). Tot nog toe had ik, door gebrek aan een goede luchtpomp en plateau, deze wijze van behandeling moeten ontgaan. Thans in het bezit van beiden, ben ik in staat, om te doen uitkomen, dat een gebruik eener luchtverdunde ruimte van uitnemenden dienst is. Een versch product (gemaakt met alkohol B) werd geanalyseerd, na ongeveer 24 uren te hebben gestaan in een luchtverdunde ruimte met zwavelzuur. Een hoeveelheid van 0,4515 gr. stof gaf aan kooldioxyde 0,8138 gr. en 0,2908 gr. water; na eenige dagen leverde 0,3942 gr. van hetzelfde product, bij 0^0 en $760{,}4^{mm}$ bar. aan stikstof 67 C.C. Op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

	a.	*b.*
koolstof.	49,1	—
waterstof	7,1	—
stikstof.	—	20,5.

Later zal blijken, dat het lichaam van CLOËZ wel nimmer een zuivere verbinding is, maar, onder anderen, waarschijnlijk een weinig mono- en diamido-cyanuurzuur aethyl bevat.

In het volgende zal een poging worden gewaagd het lichaam van CLOËZ nader te leeren kennen. De eigenschap van normaal cyanuurzuur aethyl, in waterige oplossing bij verhitten nabij het smeltpunt aanleiding te geven tot een sterke *troebeling*, die bij bekoeling verdwijnt, om bij verwarming andermaal te voorschijn te treden, kwam uitermate te stade als een betrekkelijk gevoelige reactie op dit lichaam. En nu bleek, dat een versch product (gemaakt met alkohol B; na verwijdering als altijd van aether en alkohol op een waterbad, praecipiteeren en wasschen met water) ter hoeveelheid van ongeveer 0,06 gr. geschud met nagenoeg 5 gr. water, na filtratie, gemelde reactie *zeer duidelijk* gaf. Men

*) B. I, 233 (noot).

had slechts een reageerbuisje, waarin een weinig van dit filtraat, in de hand te houden, en weldra vertoonde zich een *sterke troebeling*, die bij bekoeling verdween, terwijl de reactie genoegzaam overeenstemde met een oplossing van normaalcyanuurzuur aethyl. In het voorbijgaan deelen we mede, dat het praecipiteer- en waschwater, waaruit zich bij staan onder een exsiccator langzamerhand krystallen afzetten van n. cyanuurzuur aethyl, bij verwarming hetzelfde verschijnsel opleverde.

In gemelde proef werd 0.06 gr. genomen op 5 gr. water, dus 1,2 gr. op 100 gr. water, maar een deel bleef onopgelost, zoodat de oplosbaarheid van het lichaam van Cloëz tamelijk schijnt te naderen tot die van het normaal cyanuurzuur aethyl.

Bij een tweede proef werd van een andere bereiding 0,504 gr. van het lichaam van Cloëz (het gew. van een bepaald aantal druppels uit een burette was vooraf bepaald) gedaan in een flesch, en hierbij voorzichtig gedaan 50 gr. water, en thans niet sterk geschud (als in de vorige proef, waarbij de oplossing een weinig troebel was door kleine druppels in suspensie), maar met eenige zorg bewogen, in welk geval de oplossing helder is (een gedeelte bleef onopgelost). Ook deze oplossing vertoonde de reactie op duidelijke wijze. Hierbij moet in herinnering worden gebracht, dat alleen een nagenoeg of geheel verzadigde oplossing van n. cyanuurzuur aethyl de reactie geeft. Niet onwaarschijnlijk bevat dus het lichaam van Cloëz, zelfs versch, een betrekkelijk groote hoeveelheid n. cyanuurzuur aethyl.

De volgende proef toont evenwel genoegzaam aan, dat het lichaam van Cloëz merkbaar afwijkt van n. cyanuurzuur aethyl. Er werd 0,5984 gr. Cloëz gedaan bij 100 C.C. water, en 0,5405 gr. n. cyanuurzuur aethyl bij een overeenkomstige hoeveelheid water. De laatste oplossing nu werd sterk troebel bij verhitten, *niet* zoo de oplossing van Cloëz.

De verhouding van het lichaam van Cloëz en van normaalcyanuurzuur aethyl tegenover broom kan wellicht meer licht brengen in de zaak. Maakt men een verzadigde oplossing van n. cyanuurzuur aethyl (0,7—0,8 gr. op 100 gr.

water), en tevens een oplossing van het lichaam van Cloëz van ongeveer eenzelfde sterkte, dan verhouden deze oplossingen zich zoo ongeveer op gelijke wijze tegenover broomwater. Het neêrslag aanvankelijk schijnbaar amorph, wordt, vooral bij schudden, weldra zichtbaar krystallijn. De krystalletjes bezitten een lichtgele kleur en zijn een weinig oplosbaar in water; op een filtrum onder een exsiccator geplaatst, kwam broom vrij, en bleef een stof terug, die na staan met water een oplossing gaf, welke tegenover warmte en broomwater de eigenschappen vertoonde van n. cyanuurzuur aethyl, terwijl de stof op de hand smolt. Er werd veel tijd toe vereischt, alvorens de gele tint geheel was verdwenen.

Bij een andere proef scheen te blijken, dat de hoeveelheid van eenzelfde broomwater niet eenzelfde is voor gemelde oplossingen. Er werden namelijk twee oplossingen gemaakt en wel van 0,5984 gr. Cloëz opgelost in 100 C.C. water, en 0,5405 gr. normaalcyanuurzuur aethyl in 90,3 C.C. water, dus eenzelfde betrekkelijke hoeveelheid. Het gehalte komt dus nagenoeg overeen met 0,6 gr. stof op 100 C.C. water. Het lichaam van Cloëz werd ter oplossing in het water, daarmede zachtkens bewogen; de oplossing is dan zoo goed als helder. Van ieder der oplossingen werden genomen 25 C.C., en deze gedaan in lange breede buizen (te sluiten met kleine uitgetrokken trechters) en er bijgevoegd 10,5 C.C. broomwater, waarbij dan een overmaat aan broom voorhanden is. Na een dag staan, werd de moederloog meerendeels afgegoten, het afzetsel met wat moederloog gebracht op gewogen schaaltjes, na bezinken de moederloog afgeschonken, en na staan onder een exsiccator met zwavelzuur gewogen. Het gewicht der stoffen bedroeg:

	Cloëz.	n. cyanuurzuur aethyl.
na een dag. . .	0,0873 gr.	0,279 gr. (op 't oog droog)
» twee dagen.	0,0873 »	0,1307 »
» » » .	0,0868 »	0,128 »
» een dag . .	0,0865 »	0,128 »

Uit de moederloog van beiden zetten zich van ieder nog ongeveer 0,004 gr. af.

De krystallen van beiden, aanvankelijk geel, worden later kleurloos en vertoonen dan de hoofdeigenschappen van n. cyanuurzuur aethyl. In aanmerking genomen, dat een vierde gedeelte van 0,5984 gr. is 0,1496 gr., ligt het besluit voor de hand, dat het lichaam van CLOËZ zich blijkbaar anders verhoudt; en in verband met het voorgaande (het was hetzelfde als waarvan vroeger een analyse was gedaan na staan in vacuo) volgt er uit, dat het lichaam van CLOËZ nog een ander isomeer kan bevatten, dan n. cyanuurzuur aethyl, en men hier wellicht in hoofdzaak heeft te doen met de verbinding: $N_3 C_3 O_3 (C_2 H_5)_3$, $x N C O C_2 H_5$. Met een overmaat van broom kan het lichaam van CLOËZ, als n. cyanuurzuur aethyl, een steenrood product vormen; beiden zijn in broom oplosbaar; broomwaterstof komt hierbij niet vrij.

Bij een bereiding werd bij n. cyanuurzuur aethyl eenig *water* gedaan, en zoo ook op het lichaam van CLOËZ, en deze geplaatst onder een glazen klok met een kroesje waarin broom; de vorming van het additie-product werd door het water wel bevorderd bij het lichaam van CLOËZ, maar niet bij n. cyanuurzuur aethyl.

Van meer belang is wellicht de volgende proef. Van het lichaam van CLOËZ werd 0,526 gr. afgewogen in een glazen buisje (met een glazen stop te sluiten) en daarbij gedaan een hoeveelheid broom overeenstemmende met die bij proeven met n. cyanuurzuur aethyl vroeger aangewend (in ons geval: 10,795 gr. broom). De temperatuur was ongeveer 10°—12°. Nadat de grootste hoeveelheid broom was verdampt, werd overgegaan tot wegen. A geeft aan *vermeerdering* in gewicht, en B gehalte aan broom op 100 gew.-d.:

	A.	B.
	1,561 gr.	74,8 p.c.
na een dag.	1,111 »	67,8 »
» » »	0,927 »	63,7 »
» twee dagen. . .	0,78 »	59,7 »
» drie » . . .	0,661 »	55,6 »
» een dag.	0,636 »	54,7 »
» » »	0,612 »	53,7 ».

Het verschil met n. cyanuurzuur aethyl (zie vroeger) bestaat vooral hierin, dat het zelfs met 54,7 p.c. broom nog *dik vloeibaar* was, terwijl met 53,7 een zeer klein gedeelte in vasten staat was overgegaan. Na 53,7 p.c. werd het buisje geplaatst onder een exsiccator met kalk *) (aanvankelijk was, als bij de proeven met n. cyanuurzuur aethyl, zwavelzuur met eenig broom genomen).

Het was van eenig belang tevens na te gaan, of het lichaam van CLOËZ opgelost in water, ook krystallen afzette van het hydraat van n. cyanuurzuur aethyl; inderdaad is dit het geval bij plaatsen in een koudmakend mengsel, en de oplossing scheen zich zoo ongeveer te verhouden als die van n. cyanuurzuur aethyl, maar er schijnt veel minder te worden afgezet. Deze proef werd, alhoewel wat gewijzigd, in 't groot gedaan. Een ruw product, dat ongeveer twee maanden had gestaan, werd op de gewone manier neêrgeslagen en gewasschen. Het lichaam van CLOËZ aldus erlangd, had men geruimen tijd laten staan met betrekkelijk veel water, en wel met het doel na te gaan, of het onder die omstandigheden ook zou omgezet worden in vasten staat (onafhankelijk van een opnemen van krystalwater). De proef werd gedaan, gedurende het koude jaargetijde, in een locaal, dat op den dag werd verwarmd. Bij herhaling nu werd de inhoud 's morgens gevuld bevonden met een krystallijne massa, die verder op den dag geheel of gedeeltelijk in den vloeibaren staat overging, en dan zag men, ten minste schijnbaar, weder het lichaam van CLOËZ op den bodem der flesch. Door toevoegen van water, gezamentlijk ongeveer 1800 gr. werd alles (het lichaam van CLOËZ bedroeg na wasschen ongeveer 13 gr., waarbij evenwel nog een weinig water was) genoegzaam opgelost, en, na filtratie, geplaatst in de open lucht, bij vriesweder. Ongeveer 8,13 gr. van met krystalwater gekrystalliseerd n. cyanuurzuur aethyl (reeds gedeeltelijk verweerd) werden afgezet; na staan onder een exsiccator herleid tot ongeveer 4,31 gr.. Alhoewel de hoeveelheid water toevallig wat te groot was, en de 13 gr. kunnen worden

*) Zie later: B. IV.

teruggebracht tot ongeveer 12 gr., pleit toch deze proef, in verband met zaken, vroeger medegedeeld, voor de aanname, dat het lichaam van Cloëz (bijmengselen in kleine hoeveelheid niet medegerekend) behalve n. cyanuurzuur aethyl, een andere verbinding bevat der formule $x(NC.OC_2H_5)$, hetzij $NC.OC_2H_5$, of een ander. Daarbij komt, dat het lichaam van Cloëz na weken staan en genoegzaam in vasten staat te zijn overgegaan, tusschen filtreerpapier ontdaan van vloeibare deelen, zoo ongeveer $^1/_3$ in gewicht gaf aan *ruw* n. cyanuurzuur aethyl. Over het vloeibare, dat in het papier is overgegaan, later.

Praecipiteer- en waschwater van het ruwe product. Bij staan wordt langzamerhand normaal cyanuurzuur afgezet. Op een koele plaats gezet krystalliseerde dit lichaam met krystalwater verder uit, terwijl de oplossing bij verhitten niet meer troebel werd als aanvankelijk het geval was; daarentegen ontstond een praecipitaat met broomwater (dit was echter niet krystallijn, maar bleef vloeibaar). Reeds vroeger *) werd medegedeeld, dat praecipiteer- en waschwater uitgeschud met aether, na verdampen van den aether een vloeistof terugliet, die onder een exsiccator geplaatst, behalve eenig *urethaan*, en zooals later bleek tevens n. cyanuurzuur aethyl, een andere krystallijne stof afzette (ter zuivering liet men het eenige dagen staan met water, waarna men het plaatste tusschen filtreerpapier), waarvan het smeltpunt zeer veranderde na weken te zijn bewaard geworden tusschen filtreerpapier. Op 100 gew.-d. bevatte het:

koolstof.	44,1
waterstof.	6,8.

Na omkrystallisatie werd een stikstof-bepaling gedaan, overeenkomende met 32,3 p.c..

Monamido-cyanuurzuur aethyl vordert:

koolstof.	45,6
waterstof	6.5
stikstof	30,4.

*) B. I, 232, 233.

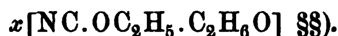
Ik vermoed, dat er een weinig *di*amido-cyanuurzuur aethyl bij was, ook met 't oog op het smeltpunt, bedragende ongeveer 125° (naar Hofmann *) is dat van monamido-cyanuurzuur aethyl 97°). Het product gaf van de meergemelde twee reacties van n. cyanuurzuur aethyl slechts die *met broomwater*, zoo kenmerkend naar 't schijnt voor lichamen opgebouwd naar de type van normaal cyanuurzuur. Bij omkrystallisatie †) der ruwe krystallijne massa uit water en alkohol, schijnen latere afzetsels van gemelde verbindingen wat te bevatten, die eveneens in zeer kleine hoeveelheid schijnen afgezet te worden uit het lichaam van Cloëz §) bij staan bij een betrekkelijk hooge temperatuur (in den zomer).

De uitkomsten, waartoe mijn onderzoek met betrekking tot normaal cyaanzuur en daarvan afgeleiden, alsmede van verbindingen daarmede in betrekking staande, vooralsnog heeft geleid, laten zich aldus teruggeven:

1. Normaal cyaanzuur schijnt als kaliumzout, onder gewone omstandigheden, niet te kunnen bestaan **).

2. Ter bereiding van het dusgenaamde lichaam van Cloëz, is broomcyaan zeer geschikt. De absolute alkohol ††) hierbij noodig, laat zich gemakkelijk maken door ontleding van $C_2H_5.ONa.x(C_2H_5.OH)$.

3. Uitgaande van materialen, met groote zorg gezuiverd, verkrijgt men een ruw product — bij inwerking van broomcyaan (in aetherische oplossing) op natriumaethylaat (bij aanwezigheid van alkohol en aether), na filtratie en verwijdering uit het filtraat van vluchtige bestanddeelen —, dat grootendeels oplosbaar is in water, terwijl bij neêrslaan en wasschen met water, het lichaam van Cloëz terugblijft. Het ruwe product schijnt in hoofdzaak te zijn:



$$x[NC.OC_2H_5.C_2H_6O]$$ §§).

*) B. II, 168.
†) B. II, 167.
§) Zie de analysen: B. II, 170; B. III, .
**) B. I, 224.
††) B. II, 163, 165.
§§) B. II, 169; B. III, 157 (zie ook later in B. IV).

Het water, na neêrslaan en wasschen, geeft, uitgeschud met aether, *urethaan* *), na mij tevens aangetoond door PONOMAREFF †), en als door mij teruggebracht tot de reactie: $NC.OC_2H_5 + H_2O = NH_2.CO.OC_2H_5$. Tevens bevat dit water n. cyanuurzuur aethyl en nagenoeg zeker eenig monamido- (en wellicht ook wat diamido-) cyanuurzuur aethyl.

Opmerkingswaardig is, dat bij inwerking van broomcyaan op natriumaethylaat bij aanwezigheid van alkohol en aether, nog normaal cyanuurzuur aethyl ontstaat bij aanwezigheid van water, stijgende tot $5\,H_2O$ op $C_2H_5.ONa$. Daardoor wordt tevens niet onwaarschijnlijk, dat $C_2H_5.ONa, xC_2H_6O$ in alkoholische oplossing kan bestaan, bij aanwezigheid van een betrekkelijk groote hoeveelheid water en veel meer dan vereischt zou worden ter ontleding van $C_2H_5.ONa$ in $C_2H_5.OH$ en $NaOH$.

4. Het lichaam van CLOËZ geeft, na plaatsing in vacuo, met zwavelzuur, analytische uitkomsten §), die vrij goed stemmen met de formule: $x(NC.OC_2H_5)$. Niet onwaarschijnlijk bevat het steeds een kleine hoeveelheid monamido- (en diamido) cyanuurzuur aethyl **).

5. Bij staan zet het lichaam van CLOËZ langzamerhand krystallen af, in hoofdzaak bestaande uit *normaal cyanuurzuur aethyl.* Dit lichaam kan optreden in goed gevormde prisma's. Bij lagere temperatuur gekrystalliseerd uit waterige oplossing, bevatten deze een groote hoeveelheid krystalwater, dat reeds bij $+ 6^0$ vrij komt, waarbij de krystallen verweeren. Het smeltpunt bedraagt ongeveer 29^0. Gesmolten blijft het veelal uren vloeibaar, om dan weder vast te worden. *In een luchtverdunde ruimte kan n. cyanuurzuur aethyl worden overgehaald,* zonder over te gaan in *iso*cyanuurzuur aethyl. N. cyanuurzuur aethyl is eenigermate oplosbaar in water; een verzadigde of nagenoeg verzadigde oplossing geeft bij verwarming nabij het smeltpunt een *sterke troebeling* ††).

---

*) B. I, 232, 233 (1880).

†) *Berl. Ber.*, 15, 513 (1882).

§) B. III, 165.

**) B. III, 159.

††) B. III, 141.

6. Normaal cyanuurzuur aethyl is oplosbaar in broom, terwijl na verdampen der overmaat van broom, bij genoegzaam lage temperatuur, een oranje-roode verbinding terugblijft, naar 't schijnt $3(NC.OC_2H_5)$, 6 Br, die wordt gedissocieërd. Dit laatste is tevens het geval met een additieproduct, dat broomwater geeft met een waterige oplossing van het cyanuraat, optredende in *gele* naalden *). *Iso* (gewoon)-cyanuurzuur, noch isocyanuurzuur aethyl, noch het cyanuurzuur methyl, ontstaan bij gewone temperatuur uit methylisocyanaat, vormt met broom *een additieproduct*, *het ontstaan waarvan als een reactie is te beschouwen op normaal cyanuurzure verbindingen* †).

7. Het lichaam van Cloëz is eenigermate oplosbaar in water, geeft een sterke troebeling bij verwarming, en verhoudt zich ook tegenover broom en broomwater in 't algemeen als n. cyanuurzuur aethyl. Van een ontstaan van een eigenaardig broomadditie-verbinding, gelijk men wellicht zou mogen verwachten bij aanwezigheid van aethylnormaalcyanaat: $N \equiv OC_2H_5$, werd niets waargenomen. Daarentegen bestaat er tusschen het lichaam van Cloëz en n. cyanuurzuur aethyl tegenover broomwater en broom een bepaald verschil; zoo ook in waterige oplossing bij verlaagde temperatuur §).

8. Ammoniakgas **) geleid door het versch alkoholisch-aetherisch filtraat der bereiding, geeft geen cyanamid, noch dicyaandiamid naar 't schijnt, dat het geval zou kunnen wezen bij aanwezigheid van $N \equiv C-OC_2H_5$, cyanamid beschouwd als $N \equiv C-NH_2$ (of normaal cyanuurzuuramid). Cyanamid addeert evenwel geen broom (noch cyaan) ††), en ook dit pleit er voor, om het te beschouwen als een afgeleide van *iso*cyaanzuur: OC.NH. en derhalve als: $HN=C=NH$ (carbodiimid) §§).

---

*) B. III, 142.
†) B. III, 145.
§) B. III, 159.
**) B. I, 239.
††) B. I, 227.
§§) B. I, 226.

9. Lettende op de bekende feiten, mag nog wel niet worden besloten, dat *normaal* cyaanzuur als ester kan bestaan, maar wordt dit vrij waarschijnlijk. Evenwel moet daarbij nog iets in 't oog worden gehouden, zooals weldra zal blijken.

Het ruwe product (na verdampen van aether en alkohol terugblijvende) is wellicht in hoofdzaak: $NC.OC_2H_5, C_2H_6O$. Gaat men na, dat bij oplossen van het natrium ontstaat: $C_2H_5.ONa$, xC_2H_6O, dan zou de vorming eener verbinding: $NC.OC_2H_5, C_2H_6O$ niet zoo bevreemdend zijn. Deze laatste is evenwel weinig standvastig, en wordt reeds bij gewone temperatuur ontleed; het $NC.OC_2H_5$ daarbij vrij komende wordt, zoo kan men *aannemen*, langzamerhand *gepolymeriseerd* tot *n. cyanuurzuur aethyl*, dat op zijne beurt *de eigenschap bezit* $NC.OC_2H_5$ *te binden* tot: $N_3C_3O_3(C_2H_5)_3$, $xNCOC_2H_5$. Ook deze laatste zal zwak zijn (als die van $NC.OC_2H_5$ en C_2H_6O) en langzamerhand ontleed worden, waarbij het vrij gekomen $NC.OC_2H_5$ zich eveneens zal polymeriseeren tot n. cyanuurzuur aethyl, zoodat ten slotte genoegzaam alles overgaat in $N_3C_3O_3(C_2H_5)_3$. Dat de aether en alkohol, bij de bereiding van het ruwe product overgaande, behalve urethaan, een lichaam bevat *), hetwelk met broom een additieproduct vormt, schijnt aan te toonen, dat het $NC.OC_2H_5$ gedeeltelijk vervluchtigt.

Wat het lichaam aangaat van Cloëz, dit *ontstaat dan door ontleding van* $NC.OC_2H_5, C_2H_6O$ *met water*. Het vrij gekomen $NC.OC_2H_5$ polymeriseert zich voor een deel, terwijl zich het gevormde $N_3O_3O_3(C_2H_5)_3$ verbindt met $xNCOC_2H_5$ tot een zwakke verbinding, die langzamerhand wordt ontleed (zie boven). Inderdaad blijft het lichaam van Cloëz, zelfs vele weken na de bereiding, een weinig afnemen in gewicht, terwijl het den aangenamen reuk behoudt. Het lichaam van Cloëz bestaat dan in hoofdzaak uit: $N_3C_3O_3(C_2H_5)_3$, $xNCOC_2H_5$. Het vele duistere, dat het lichaam van Cloëz van af zijne geboorte tot nog toe opleverde, zou dan genoegzaam opgehelderd wezen.

---

*) B. III, 158.

In een volgende verhandeling zullen de uitkomsten van nieuwe onderzoekingen worden medegedeeld, terwijl ik mij vooreerst het recht voorbehoud, een nadere studie te blijven maken der esternormaalcyanaten, en wel te meer, daar na Cloëz, dat wil zeggen in meer dan vijf en twintig jaren, geen scheikundige zich het lot dezer belangrijke verbindingen heeft aangetrokken.

Utrecht, 28 April 1882.

OZON TEGENOVER PLATINAZWART *).

DOOR

E. MULDER en H. G. L. VAN DER MEULEN.

Er werden twee proeven gedaan, ten einde de verhouding te leeren kennen van ozon tegenover platinazwart. De eerste proef bestond daarin, dat een *v*-vormig buisje, bevattende ongeveer 8,5 gr. platinazwart, werd bevestigd aan een effluvetoestel; deze vereeniging kon niet geschieden met zegellak naar de methode van BERTHELOT †), omdat het *v*-vormig buisje moest gewogen worden ook na de proef, en in de plaats van zegellak werden daarom twee kleine kurken genomen. Vooraf was ongeveer bepaald de gew.-hoev. ozon (op één liter van 0° en 760^{mm}), die ontstond met een inductie-vonk van bekende lengte en een zuurstofstroom van een zekere snelheid; deze gew.-hoev. bedroeg ongeveer 60 milligr. ozon op één liter zuurstof (droog). Het buisje met platinazwart woog aanvankelijk 25,5094 gr., en na doorleiden telkens van een liter zuurstof door den effluve-toestel en daarna door dit buisje:

25,5130 gr.
25,5135 »
25,5155 »

*) Bijdrage tot de Thermo-chemische kennis van ozon Eerste en Tweede gedeelte (zie *Verslagen en Mededeelingen*, 2de Reeks, Deel XVI en Deel XVIII).

†) *Essai de Mécanique Chimique*, par BERTHELOT. T. I, 231; T. II, 366

De kleine vermeerdering in gewicht is blijkbaar toe te schrijven aan eenig water, afkomstig onder anderen van een geoxydeerd worden der kurkjes door een weinig ozon; de kurkjes werden dan ook wat bleeker van kleur. Na staan onder een exsiccator nam het buisje af tot 25,508 gr., waaruit tevens volgt, dat het platinazwart (bij het vullen) eenig water uit de lucht zal hebben opgenomen. Neemt men in aanmerking, dat bij gemelde proef ongeveer $60 \times 3 = 180$ milligr. ozon werden doorgevoerd, terwijl al het ozon werd ontleed — zooals daaruit bleek dat de ozonreuk hoegenaamd niet was waar te nemen van het uittredende gas, noch de reactie met ioodkaliumpapier — en hiervan door platinazwart (als door arsenigzuur in waterige oplossing en kwik) geacht mag worden een derde te kunnen worden vastgelegd, dan zou in dit geval het buisje niet minder dan 60 milligr. in gewicht zijn toegenomen.

De tweede proef was netter ingericht en het *v*-vormig buisje met platinazwart verbonden met den effluve-toestel door middel van in elkander geslepen uiteinden, zoodat het ozon slechts in aanraking kwam met glas en platinazwart. Aanvankelijk werd het platinazwart in het *v*-vormig buisje verhit bij 100°—110° in een stroom van drooge zuurstof, om het goed te droogen. Evenwel is platinazwart zeer hygroscopisch, en was het niet wel mogelijk, een genoegzaam onveranderd gewicht te bekomen. Er werd daarom besloten door het *v*-vormig buisje, waarin zich ongeveer 4 gr. platinazwart bevond, afwisselend een liter zuurstof en ozonhoudende zuurstof te laten doorgaan. Het *v*-vormig buisje woog 31,833 gr., na doorvoeren van:

ozon	31,834	gr.
zuurstof	31,834	»
ozon	31,8355	»
zuurstof	31,8365	»
ozon	31,837	» .

Bij deze proef was gebruik gemaakt van een anderen effluve-toestel, die onder de omstandigheden, waaronder werd gewerkt op één liter, ongeveer 35 milligr. ozon gaf. In 't

geheel voerde men dus door het *v*-vormig buisje met platinazwart: $35 \times 3 = 105$ milligr. ozon, waarvan dus een derde gedeelte bedraagt 35 milligr..

Als bij de eerste proef werd na ozon te hebben doorgevoerd, alvorens te wegen, wat zuurstof doorgejaagd, terwijl onder het wegen werd voortgegaan met (drooge) zuurstof te laten gaan door den effluve-toestel. om dezen droog te houden voor zooverre mogelijk. De zuurstof werd gezuiverd door een buis met zwavelzuur en een apparaat met potassa-loog. De uitkomst der tweede proef schijnt evenmin twijfelachtig als die der eerste, en men mag dus wel als hoogstwaarschijnlijk aannemen, dat platinazwart de eigenschap bezit ozon te ontleden. Werd ozonhoudende zuurstof uit den effluvetoestel aanvankelijk geleid door een buisje met water (ozon is in water uiterst weinig oplosbaar) en vervolgens in het buisje met platinazwart, ook dan geschiedde de ontleding van het ozon volkomen.

Dat bij gemelde proeven geen H_2O_2, indien ontstaan, kan blijven bestaan, wordt reeds daardoor waarschijnlijk, daar H_2O_2 ontleed wordt door platina (zie hierover later).

Het medegedeelde maakt het zoo goed als zeker, dat ozon bij aanwezigheid van platinazwart (hetzij de ozonhoudende zuurstof droog is of waterhoudend) wordt omgezet in gewone zuurstof. Dit is, voor zooverre ons bekend, *het eerste voorbeeld der omzetting eener grondstof in een allotropie onder den invloed van een andere grondstof, zonder dat deze grondstoffen in scheikundigen zin op elkander inwerken.* De verklaring van de eigenschap meer genoemd, is evenwel nog niet zoo eenvoudig, als men wellicht zou verwachten. De volgende gevallen toch zijn mogelijk:

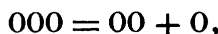
1. Platinazwart verdigt ozon en dit laatste wordt aldus omgezet in gewone zuurstof:



Het is evenwel duidelijk, dat alsdan ligt een noemenswaardige vermeerdering in gewicht van het platinazwart zou plaats hebben, of anders gezegd, een deel van het ozon zou

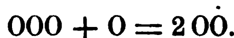
worden onttrokken aan de ontleding. In ieder geval is dan niet klaar, dat ozon door platinazwart zoo uiterst gemakkelijk wordt ontleed, de kans toch van een treffen der moleculen kan wel niet zeer groot wezen.

2. Ozon wordt ontleed door platinazwart, namelijk aldus:



$$OOO = OO + O,$$

welk atoom vrije zuurstof physisch-chemisch wordt gebonden door het platina, totdat een ander mol. ozon het komt verlossen:



$$OOO + O = 2\,O\dot{O}.$$

De kans tot dit laatste treffen schijnt evenwel ook niet groot te kunnen zijn, terwijl de snelheid, waarmede tot de laatste sporen ozon van ozonhoudende zuurstof worden ontleed, wijst op zeer gunstige omstandigheden.

3. Deze laatste schijnen inderdaad aanwezig te zijn, indien *gewone zuurstof verdigt door platinazwart* de eigenschap bezit, ozon te ontleden. De gewone zuurstof moet dan evenwel door het platinazwart ten minste eenigermate zijn *ontleed*, daar toch gewone zuurstof met ozon moeielijk gewone zuurstof kan geven; ter ontleding van OOO in OO en O is in ieder geval energy noodig. Het aannemen van genoemde *gedeeltelijke ontleding*, kan wel theoretisch niet onderhevig zijn aan eenig bezwaar, daar gewone zuurstof, physisch-chemisch gebonden door platina, onmogelijk in den oorspronkelijken moleculairen toestand kan verblijven, en het waarschijnlijk is, dat de band der zuurstofatomen geringer wordt tengevolge der aantrekking van het platina.

Zooals bekend, worden *die* verschijnselen dikwerf teruggebracht tot den naam van *dissociatie*, welke betrekking hebben op een quantitatief bepalen van den evenwichtstoestand van een gegeven stelsel gelijksoortige of ongelijksoortige moleculen, bij zekere temperatuur, zekeren druk en soms zekeren elektrischen toestand. Verschijnselen, die daartoe *naderen*, wenschen we te bestempelen met de benaming: *dislocatie*. Zoo wordt onder

den invloed van platina, gewone zuurstof *gedisloqueerd*, aldus mag men aannemen, namelijk de atomen der mol. verdigte zuurstof eenigzins van elkander gerukt. Deze atomen kunnen dus eenigermate beschouwd worden op te treden in een losse verbinding met platina en met elkander los te zijn vereenigd, en de reactie alzoo voorstellen:

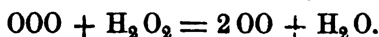


$$OOO + O = 2\,OO.$$

Terecht zal men vragen, wat er wordt van het andere atoom zuurstof, beiden afkomstig van een mol. oorspronkelijk gewone zuurstof verdigt door het platina. Dit atoom kan betrekkelijk gemakkelijk ozon vinden, maar vooral door uitwisseling het evenwicht genoegzaam hersteld worden (zie later).

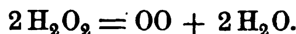
We weten niet, of deze proef bekend was, *dat* namelijk *platinazwart*, *gedaan op vochtig ioodkaliumstijfselpapier*, *dit laatste doet blauw worden*, gelijk OOO en H_2O_2 dit vermogen te doen, en noodwendig tevens vrije atomen zuurstof. Deze proef schijnt wel te pleiten voor de gegeven theoretische verklaring der verhouding van ozonhoudende zuurstof tegenover platinazwart (zie 4).

4. Bij aanwezigheid van water zou platinazwart met gewone zuurstof kunnen geven H_2O_2, welk laatste ozon aldus ontleedt:



$$OOO + H_2O_2 = 2\,OO + H_2O.$$

Platinazwart ontleedt echter tevens H_2O_2:



$$2\,H_2O_2 = OO + 2\,H_2O.$$

De verbinding H_2O_2 zou dan slechts bij wijze van overgang dienst doen, namelijk op het oogenblik van geboren te zijn. Aanwezigheid van water schijnt evenwel geen vereischte te wezen voor de ontleding van ozon door platinazwart.

Met 't oog op thermo-chemische bepalingen, doet het er

niet toe, op welke wijze ozon wordt ontleed, wanneer de eindtoestand van het platinazwart maar gelijk is aan den aanvangtoestand.

Noemen we:

$$OO, O = a \quad \text{en} \quad O, O = b,$$

dan is (moleculaire verdigtingswarmte niet medegerekend):

$$OOO, OOO = -2a + b.$$

Stellen we de physisch-chemische verbindingswarmte van platina en een atoom zuurstof voor door:

$$Pt_x, O = \alpha,$$

dan is:

$$OOO, Pt_x O = -a - \alpha + b.$$

Zoodra evenwel $Pt_x O$ wordt ontleed, ontstaat het weder door aanwezige gewone zuurstof. In werkelijkheid is dus de thermo-chemische reactie:

$$\begin{aligned} 2\,OOO, 2\,Pt_x O = {} & OOO, OOO - 2\,(Pt_x, O) \\ & + O, O + 2\,(Pt_x, O) - O, O = OOO, OOO = -2a \\ & - 2\alpha + 2\alpha + b - b + b = -2a + b. \end{aligned}$$

De reactie zou dus inderdaad dezelfde wezen bij afwezigheid van platina, indien de ozonmoleculen als zoodanig op elkander inwerken, naar de bekende vergelijking:

$$2\,OOO = 3\,OO.$$

Utrecht, 28 April 1882.

BIJDRAGE

TOT DE

THERMO-CHEMISCHE KENNIS VAN OZON,

DOOR

E. MULDER en H. G. L. VAN DER MEULEN.

AANHANGSEL TOT HET TWEEDE GEDEELTE.

In een der vergelijkingen vroeger gegeven, heeft men een term vergeten op te nemen, en wel dien van: 3 (I, I) in vergelijking 3, zoodat deze moet zijn:

$$5\,IHAq, IO_3HAq = 3(2H,O) - 5(I,H,Aq) - I,3O,H,Aq + 3(I,I).$$

Hieruit volgt, dat As_2O_3Aq, OO wordt:

$$As_2O_3Aq, OO = \left\{ \begin{array}{l} -4(ClH, Aq) + 2(2IKAq, ClCl) \\ 2\,HH, OO - 2(HH, ClCl) \\ +4(KOHAq, HIAq) \\ -4(KOHAq, HClAq) \\ +{}^1/_3(2IO_3HAq, 2As_2O_3Aq) \\ -{}^2/_3(5IHAq, IO_3HAq) \\ +2(I,I). \end{array} \right.$$

Nemen we voor:

$$\begin{array}{rcl} 2\,HH, OO & = & 136870^c \\ HH, ClCl & = & 44002 \\ KOHAq, HIAq & = & 13675 \\ KOHAq, HClAq & = & 13744 \\ 2IO_3HAq, 3As_2O_3Aq & = & 149975 \\ ClH, Aq & = & 17314 \\ 2IKAq, ClCl & = & 52418 \\ 5IHAq, IO_3HAq & = & 83332. \end{array}$$

De waarde van $As_2 O_3 Aq, OO$ wordt alsdan:

$$As_2 O_3 Aq, OO = 78607^c + 2(I, I).$$

Vroeger was aangenomen voor $As_2 O_3 Aq, OO = 78283^c$, dat niet noemenswaardig verschilt van 78607^c (de waarde van $2 \overline{HH}, OO$ moet ook nog gecorrigeerd worden). Aangezien:

$$As_2 O_3 Aq, OO - 2(I, I) = 78607^c,$$

volgt er uit, dat in:

$$As_2 O_3 Aq, OO - As_2 O_3 Aq, 2\,OOO = OO,OO,OO$$

de waarde van OO,OO,OO een wijziging moet ondergaan, en thans wordt (voor $As_2 O_3 Aq, 2\,OOO = 145000^c$):

$$78607 + 2(I, I) - 145000^c = OO,OO,OO$$

of

$$-\{66393 - 2(I, I)\} = OO,OO,OO.$$

Nu is: I, I onbekend. Door directe bepaling van OO,OO,OO met platinazwart, zal I,I kunnen worden gevonden. En dit zou dan het eerste voorbeeld kunnen wezen eener bepaling der verb. warmte van *vrije* atomen.

Utrecht, 28 April 1882.

OVER HET SOORTELIJK DRAAIINGSVERMOGEN

VAN

APOCINCHONINE EN HYDROCHLOORAPOCINCHONINE ONDER DEN INVLOED VAN ZUREN.

DOOR

A. C. OUDEMANS Jr.

De aanleiding tot het hier te vermelden onderzoek werd gegeven door eene zinsnede, voorkomende in de *Annalen der Chemie und Pharmacie*, Bd. 209. S. 68, waarin door O. HESSE beweerd wordt, dat de vroeger door mij opgemerkte wet ten aanzien van het S. D. V. der alkaloïden in den vorm van basische en neutrale zouten niet algemeen is, en dat mijne daaromtrent gemaakte hypothese op eenen valschen grondslag berust.

Ter aangehaalder plaatse zegt HESSE, naar aanleiding van een door hem verricht onderzoek over konkinamine, letterlijk het volgende:

»Das Conchinamin zeigt also in saurer Lösung fast ge»nau dasselbe Drehungsvermögen wie in neutraler Lösung. »OUDEMANS, welcher die gleiche Erscheinung beobachtet hat, »glaubt dieselbe in Beziehung der Basicität unseres Alkaloïds »bringen zu können. — *Diese Annahme ist jedoch eine irrige;* »*denn es giebt Basen, die in saurer und (stöchiometrisch) neu*»*traler Lösung keine nennenswerthen Differenzen im Drehungs*»*vermögen erkennen lassen, dabei aber zweisäurig sind. Als* »*Beispiel dieser Art mag das Hydrochlorapocinchonin ge*»*nannt werden.*"

Het zal niemand verwonderen, dat ik na eene dergelijke

ondubbelzinnige uitspraak, gezocht heb naar de bewijzen, die door den bekenden scheikundige uit Feuerbach ter staving van zijne meening in vroegere geschriften konden zijn bijgebracht. Intusschen werd ik in mijne verwachting daaromtrent bitter teleurgesteld, want het eenige wat ik omtrent het boven aangeduide onderwerp kon vinden, was eene verhandeling in de *Ann. der Chem. u. Pharm.* Bd. 205, waarin op bl. 348—350 eene korte en oppervlakkige mededeeling omtrent de als voorbeeld tegen mijne stelling aangehaalde basis hydrochloorapocinchonine voorkomt. Omtrent het S. D. V. van dit alkaloïde vond ik geene opgaven, dan die welke betrekking hebben op eene oplossing van de basis in alcohol van 97 vol. proc. (+ 205°.4) en op eene waterige oplossing, waarin 1 molecule van het alkaloïde aan 3 moleculen zoutzuur was gebonden (+ 208°.0).

Het zonderlingste is, dat de schrijver (t. a. p. bl. 349) als eene eigenschap van hydrochloorapocinchonine en van andere analoge additieproducten in deze reeks opgeeft, dat zij, zoo het schijnt (*anscheinend*) geene neutrale (naar mijne opvatting basische) zouten vormen. Bewijzen daaromtrent ontbreken geheel, en nergens blijkt, dat de schrijver inderdaad getracht heeft, dergelijke neutrale (m. i. basische) zouten te bereiden.

De tegenspraak, die in de geschriften van Hesse omtrent dit punt onmiddellijk in het oog valt, en de losse wijze, waarop hij gewoon is kritiek uit te oefenen, noopten mij de beide bases apocinchonine en hydrochloorapocinchonine vooral ten aanzien van het soortelijk draaiingsvermogen aan een nader onderzoek te onderwerpen, en mij op die wijze te overtuigen of de stoute, maar *niet* door bewijzen gestaafde beweringen van den verdienstelijken ontdekker van zoovele opium- en kina-alkaloïden al of niet op een valschen grondslag steunen,

---

APOCINCHONINE.

Deze basis werd door mij bereid naar het voorschrift, dat

daaromtrent door HESSE is gegeven. Aan de door hem daaromtrent gemaakte opmerkingen heb ik niets toe te voegen.

Het onderzoek omtrent het S. D. V. van de basis zelve in eene oplossing in absoluten alcohol leverde de volgende uitkomsten op.

Apocinchonine in absoluten alcohol *).

$p = 0.3139$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.3^{mm}$; $f = 16^0$ C.

Waargenomene waarden van α.

$7^0\,38'$; $7^0\,36'$; $7^0\,37'^5$; $7^0\,37'$.

$$(\alpha)_D = +\,159^0.7.$$

HESSE vond voor $p = 1$ in eene opl. in alcohol van 97 vol. proc. $(\alpha)_D = +\,160^0.0$.

ZOUTEN VAN APOCINCHONINE.

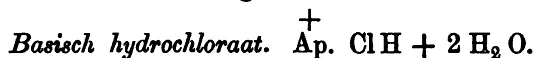
Van de zouten van apocinchonine heb ik er eenige, inzonderheid basische †) onderzocht, omdat het mij in verband met mijne denkbeelden omtrent de wetten betreffende het S. D. V. der alkaloïden belangrijk toescheen, dit te bepalen zooals het zich in den vorm van basische zouten voordoet en de verkregene waarden te vergelijken met die, welke uit

*) Omtrent de wijze van waarnemen, bij het onderzoek van deze basis gevolgd, verwijs ik naar vroegere mededeelingen op dit punt over andere kinabases. Ter bekorting zal ik voortaan slechts de waarden aangeven, die als midden uit de vier onderscheidene aan den cirkelrand van den polaristrobometer verkregene aflezingen zijn opgemaakt.

†) *Basische* zouten noem ik de verbindingen van 1 mol. van eene tweezurige basis met 1 mol. van een éénbasisch of $^1/_2$ mol. van een tweebasisch zuur, *neutrale* die waarin 1 mol. van een tweezurige basis aan 2 mol. van een eenbasisch zuur of 1 mol. van een tweebasisch zuur is gebonden.

het onderzoek van de neutrale zouten worden afgeleid of bij voortdurend toevoegen van zuur aan 1 mol. der basis als maximum worden verkregen.

In het algemeen moet worden opgemerkt, dat de basische zouten van apocinchonine meestal in water slecht oplosbaar zijn, zoodat ik dikwijls genoodzaakt was, met vrij verdunde oplossingen te werken. Eene uitzondering hierop maakt het *nitraat*, dat als strooperige vloeistof uit eene oplossing geconcentreerd, weigert te kristalliseeren, en tot eene amorphe gomachtige massa opdroogt. Het *acetaat* bij overmaat van zuur bestaanbaar, kon evenmin in vasten kristallijnen toestand worden verkregen. Het formiaat vormde wel neiging tot kristallisatie maar kon, bij overmaat van zuur in oplossing gebracht en verder aan vrijwillige verdamping blootgesteld, niet genoegzaam van de strooperige dikke oplossing van neutraal zout worden gescheiden.



Basisch hydrochloraat. $\overset{+}{\mathrm{Ap}}.\ ClH + 2\,H_2O$.

(Kristalwater: gevonden 9.1 proc., berekend 9.8 proc.)

1) $p = 0.1244$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen $2^0 38'$; $2^0 36'$; $2^0 37'$

$(\alpha)_D = + 139^0.0$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 171^0.9$.

2) $p = 0.2004$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen $4^0 12'^5$; $4^0 12'$

$(\alpha)_D = + 138^0.5$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 171^0.3$.

3) $p = 0.3053$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen $6^0 24'$; $6^0 25'$; $6^0 24'$

$(\alpha)_D = + 138^0.5$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 171^0.3$.

Basisch hydrobromaat. $\overset{+}{Ap}$. Br H + H_2O.

(Kristalwater: gevonden 4.5 proc.; berekend 4.5 proc.)

$p = 0.1474$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen: $2^0 50'$; $2^0 47'$; $2^0 50'$; $2^0 48'$

$(\alpha)_D = + 126^0.2$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 168^0.7$.

Basisch hydroiodaat. $\overset{+}{Ap}$. J H + H_2O.

(Kristalwater: gevonden 4.3 proc., berekend 4.1 proc.)

$p = 0.1183$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen: $2^0 6'$; $2^0 5'^5$; $2^0 6'$

$(\alpha)_D = + 117^0.2$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 175^0.5$.

Basisch sulfaat. 2 ($\overset{+}{Ap}$). $SO_4H_2 + 3\,H_2O$.

(Kristalwater: gevonden 8.0—8.3 proc.; berekend 8.0 proc.)

$p = 0.0954$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen: $1^0 42'^5$; $1^0 43'$

$(\alpha)_D = + 130^0.0$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 164^0.0$.

Basisch chloraat. $\overset{+}{Ap}$. Cl O_3 H.

(Op 130^0 C. verhit, verloor het zout niets aan gewicht).

1) $p = 0.1377$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16^0$C.

α_D waargenomen: $2^0 40'$; $2^0 42'$; $2^0 42'$.

$(\alpha)_D = + 129^0.0$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 166^0.2$.

2) $p = 0.3096$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16^0$C.

α_D waargenomen: $6^0 1'$; $5^0 57'$; $5^0 59'$; $5^0 59'$

$(\alpha)_D = + 127^0.7$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 164^0.4$.

Basisch perchloraat. $\overset{+}{Ap}$. $ClO_4H + H_2O$.

(Kristalwater: gevonden 4.2 proc.; berekend 4.4 proc.)

$p = 0.1042$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen: $1^0 58'$; $1^0 59'$; $1^0 58'$

$(\alpha)_D = + 124^0.9$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 175^0.3$.

Basisch oxalaat. $2(\overset{+}{Ap})$. $C_2H_2O_4 + 2H_2O$.

(Kristalwater: gevonden 8.7 proc.; berekend 8.6 proc.)

Dit zout was zoo weinig in water oplosbaar, dat ik er van moest afzien, het S. D. V. daarvan in eene waterige oplossing te bepalen.

Apocinchonine onder den invloed van eene overmaat van zuur.

Chloorwaterstofzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2940 gr.	2	302.8 m.M.	9°23'5	
» »	»	» »	9°22'	+ 211°.4
» »	»	» »	9°26'	
» »	»	» »	9°26'5	
0.2964 »	2 1/2	» »	9°29'	
» »	»	» »	9°30'	+ 211°.5
» »	»	» »	9°29'	
0.2938 »	3	» »	9°22'	+ 211°.0
» »	»	» »	9°24'	
0.2964 »	4	» »	9°24'	+ 209°.6
» »	»	» »	9°25'	
0.2954 »	8	» »	9°12'	+ 205°.5
» »	»	» »	9°11'	
0.2932 »	14	» »	8°56'	+ 201°.3
» »	»	» »	8°57'	
0.2950 »	20	» »	8°55'	+ 199°.7
» »	»	» »	8°55'	

Broomwaterstofzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2949 gr.	2	302.8 m.M.	9°30'	
» »	»	» »	9°31'5	+ 213°.0
» »	»	» »	9°30'5	
0.2934 »	2 1/2	» »	9°27'	
» »	»	» »	9°29'	+ 213°.1
» »	»	» »	9°28'	
0.2952 »	3	» »	9°27'	+ 211°.5
» »	»	» »	9°27'	
0.2782 »	4 1/2	» »	9°15'	+ 208°.7
» »	»	» »	9°15'5	

Broomwaterstofzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2941 gr.	7	302.8 m.M.	9°8'5	+ 204°.6
» »	»	» »	9°9'	
0.2798 »	10	» »	8°59'	
» »	»	» »	9°1'	+ 202°.0
» »	»	» »	9°1'5	

Salpeterzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2937 gr.	2	302.8 m.M.	9°22'	+ 210°.7
» »	»	» »	9°22'5	
0.2959 »	2½	» »	9°35'	+ 212°.7
» »	»	» »	9°35'	
0.2917 »	3	» »	9°22'5	
» »	»	» »	9°24'	+ 212°.1
» »	»	» »	9°21'	
» »	»	» »	9°21'	
0.2954 »	4	» »	9°29'5	+ 212°.1
» »	»	» »	9°28'5	
0.2946 »	7	» »	9°17'5	
» »	»	» »	9°18'	+ 208°.7
» »	»	» »	9°20'	
» »	»	» »	9°18'	
0.2959 »	10	» »	9°16'	+ 206°.6
» »	»	» »	9°15'	

Chloorzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2945 gr.	2	302.8 m.M.	9°36′	+ 215°.4
» »	»	» »	9°38′	
» »	»	» »	9°35′	
» »	»	» »	9°35′	
0.2936 »	3	» »	9°35′	+ 215°.7
» »	»	» »	9°35′	
0.2942 »	4	» »	9°34′	+ 214°.8
» »	»	» »	9°35′	
» »	»	» »	9°35′	
9.2940 »	7	» »	9°29′5	+ 213°.6
» »	»	» »	9°31′5	
» »	»	» »	9°30′5	
0.2959 »	10	» »	9°27′5	+ 211°.3
» »	»	» »	9°28′	

Overchloorzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2950 gr.	2	302.8 m.M.	9°29′	+213°.0
» »	»	» »	9°31′	
» »	»	» »	9°32′	
0.2938 »	2 1/2	» »	9°43′	+218°.0
» »	»	» »	9°41′	
» »	»	» »	9°41′	
0.2935 »	3	» »	9°40′	+217°.5
» »	»	» »	9°40′	
0.2933 »	4	» »	9°40′	+217°.1
» »	»	» »	9°39′5	
0.2929 »	7	» »	9°36′	+216°.1
» »	»	» »	9°34′5	
» »	»	» »	9°34′	
0.2932 »	. 10	» »	9°33′	+215°.2
» »	»	» »	9°33′	

Mierenzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l*.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2942 gr.	2.16	302.8 m.M.	8°53 5	+ 199°.9
» »	»	» »	8°54'5	
0.2932 »	2.70	» »	9°13'5	+ 207°.6
» »	»	» »	9°13'	
0.2932 »	3.24	» »	9°19'	+ 209°.9
» »	»	» »	9°19'	
0.2928 »	4.32	» »	9°22'	+ 211°.3
» »	»	» »	9°22'	
0.2929 »	7.56	» »	9°32'5	+ 215°.0
» »	»	» »	9°32'	
0.2936 »	10.80	» »	9°38'	+ 216°.3
» »	»	» »	9°37'5	
» »	»	» »	9°36'5	
» »	»	» »	9°37'	
0.2942 »	25.92	» »	9°37'	+ 216°.2
» »	»	» »	9°38'	
0.2936 »	45.00	» »	9°33'	+ 214°.8
» »	»	» »	9°33'	

Azijnzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l*.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2938 gr.	3 *	302.8 m.M.	7°58'5	+ 180°.3
» »	»	» »	8°1'	
» »	»	» »	8°3'	
» »	»	» »	8°1'	
0.2937 »	4	» »	8°11'5	+ 182°.4
» »	»	» »	8°12'	
0.2928 »	7	» »	$8^5$27'	+ 192°.9
» »	»	» »	8°27'	
0.2961 »	12	» »	8°50'	+ 197°.1
» »	»	» »	8°50'	
0.2946 »	20	» »	8°59'	+ 201°.8
» »	»	» »	9°0'	
» »	»	» »	9°1'	

* Apocinchonine kon niet in minder dan 2,8 moleculen azijnzuur worden opgelost.

Azijnzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2932 gr.	30	302.8 m.M.	$9^\circ 4'$	
» »	»	» »	$9^\circ 3'$	+ 204°.0
» »	»	» »	$9^\circ 3'$	
0.2948 »	40	» »	$9^\circ 8'$	+ 204°.7
» »	»	» »	$9^\circ 8'5$	
0.2950 »	50	» »	$9^\circ 10'5$	+ 205°.7
» »	»	» »	$9^\circ 11'$	
0 2949 »	60	» »	$9^\circ 4'$	
» »	»	» »	$9^\circ 5'5$	+ 203°.0
» »	»	» »	$9^\circ 4'$	
0.2958 »	160	» »	$8^\circ 56'5$	+ 199°.6
» »	»	» »	$8^\circ 57'$	

Zwavelzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2958 gr.	1	302.8 m M.	$9^\circ 25'5$	+ 210°.7
» »	»	» »	$9^\circ 26'$	
0.2795 »	$1/^1_2$	» »	$9^\circ 24'5$	+ 211°.6
» »	»	» »	$9^\circ 24'5$	
0.2942 »	2	» »	$9^\circ 29'$	+ 212°.9
» »	»	» »	$9^\circ 29'$	
0.2942 »	3	» »	$9^\circ 22'$	+ 210°.6
» »	»	» »	$9^\circ 22'5$	
» »	8	» »	$9^\circ 23'$	
0.2919 »	4	» »	$9^\circ 19'$	+ 210°.6
» »	»	» »	$9^\circ 18'$	
0.2928 »	6	» »	$9^\circ 14'5$	+ 208°.7
» »	»	» »	$9^\circ 15'5$	

Zuringzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l*.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2056 gr.	1	302.8 m.M.	8°34′	
» »	»	» »	8°36′	+ 192°.4
» »	»	» »	8°36′	
0.2944 »	$1\frac{1}{2}$	» »	9°9′5	
» »	»	» »	9°8′	+ 205°.5
» »	»	» »	9°10′	
» »	»	» »	9°10′	
0.2942 »	2	» »	9°14′	+ 208°.1
» »	»	» »	9°15′	
0.2958 »	$2\frac{1}{2}$	» »	9°16′	+ 206°.9
» »	»	» »	9°16′	
0.2034 »	3	» »	9°9′5	+ 206°.0
» »	»	» »	9°9′	
0.2930 »	4	» »	9°4′	+ 204°.5
» »	»	» »	9°5′	
0.2940 »	5	» »	9°6′	
» »	»	» »	9°7′	+ 204°.6
» »	»	» »	9°6′	
0.2964 »	8	» »	9°5′	+ 202°.5
» »	»	» »	9°5′	

Phosphorzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l*.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2948 gr.	$1\frac{3}{10}$	302.8 m.M.	8°21′	+ 187°.5
» »	»	» »	8°23′	
0.2920 »	$1\frac{1}{2}$	» »	8°57′	
» »	»	» »	9°0′	+ 202°.9
» »	»	» »	8°58′	
» »	»	» »	8°57′	
0.2930 »	$1\frac{3}{4}$	» »	9°18′	+ 211°.8
» »	»	» »	9°17′	
0.2939 »	2	» »	9°30′5	+ 213°.5
» »	»	» »	9°30′5	

Phosphorzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2952 gr.	2½	302.8 m.M.	9°31'	+ 212°.9
» »	»	» »	9°31'	
0.2942 »	3	» »	9°29'5	+ 213°.1
» »	»	» »	9°29'	
» »	»	» »	9°30'	
0.2933 »	5	» »	9°27'	+ 213°.0
» »	»	» »	9°27'	
0.2931 »	10	» »	9°19'	+ 210°.0
» »	»	» »	9°20'	

Citroenzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.2946 gr.	1	302.8 m.M.	8°9'	+ 182°.4
» »	»	» »	8°8'	
0.2937 »	1½	» »	8°29'	+ 191°.0
» »	»	» »	8°30'	
0.2793 »	2	» »	9°2'	+ 202°.7
» »	»	» »	9°0'	
0.2939 »	2½	» »	9°4'	+ 203° 8
» »	»	» »	9°5'	
» »	»	» »	9°3'	
0.2941 »	4	» »	9°10'	+ 206°.1
» »	»	» »	9°11'	
0.2952 »	8	» »	9°10'	+ 205°.0
» »	»	» »	9°9'	
0.2948 »	12	» »	9°4'5	+ 203°.0
» »	»	» »	9°3'	

Hydrochloorapocinchonine.

Ter bereiding van hydrochloorapocinchonine volgde ik het voorschrift, door Zorn en Hesse gegeven. De door mij daarbij opgedane ervaringen strooken niet geheel met die van Hesse. Wanneer cinchonine in eene overmaat van zoutzuur werd opgelost en de vloeistof nog bij — 18° C. met zoutzuurgas werd verzadigd en verder de massa in een gesloten glazen kolf 5 à 6 uur op 140°—150° C. werd verhit, was het product niet altijd van gelijken aard. Nu eens was het lichter dan eens donkerder van kleur en bij toevoeging van een gelijk volumen water scheidden zich niet altijd dadelijk kristallen van het dichloorhydraat van hydrochloorapocinchomine af. Somtijds werd eene vrij aanzienlijke hoeveelheid diapocinchonine gevormd en somtijds ook weer niet. Het komt mij voor, dat de afscheiding van het dichloorhydraat menigmaal door de aanwezigheid van andere in de vloeistof aanwezige lichamen wordt gestoord; menigmaal toch verkreeg ik uit het na eenige dagen van de kristallen afgefiltreerde vocht na lang staan nog een nieuwen voorraad van het zout. Ofschoon ik met verschillende hoeveelheden zoutzuur werkte en ook de temperatuur deed afwisselen, zoo mocht ik er niet in slagen, om ten aanzien van de opbrengst aan dichloorhydraat eene meer aanbevelenswaardige methode te vinden. Wat overigens de physische eigenschappen van het dichloorhydraat en de daaruit afgescheidene basis betreft, zoo komen mijne bevindingen daaromtrent met die van Hesse overeen; alleen ten aanzien van het S. D. V. der basis kreeg ik, zooals spoedig blijken zal, geheel verschillende uitkomsten. Hetzelfde is het geval ten aanzien van het scheikundig karakter van hydrochloorapocinchonine.

Om mij te overtuigen, dat ik inderdaad te doen had met de basis, die door Hesse hydrochloorapocinchomine is genoemd, deed ik eene bepaling van het chloorgehalte der vrije basis en van de hoeveelheid halogeen, die in het dichloorhydraat in den vorm van zoutzuur voorkomt.

De resultaten van dit onderzoek waren de volgende:

1) 0.2872 gr. van de zuivere basis, door gloeien met zuiver $Na_2 CO_3$ ontleed, leverden later 0.1244 gr. Ag Cl. Hieruit berekent men voor het Cl gehalte 10.71 proc. De formule eischt een gehalte van 10.74 proc.

2) 0.4380 gram van het dichloorhydraat in water opgelost en door zilvernitraat neergeslagen, gaven 0.3090 gr. Ag Cl. Hieruit berekent men voor het chloorgehalte 17.46 proc. De formule eischt een gehalte van 17.59 proc.

Deze uitkomsten, in verband beschouwd met de omstàndigheid, dat ik goed gezuiverde cinchonine als moederstof bij de bereiding bezigde, laten omtrent de identiteit van de door mij onderzochte stof met hydrochloorapocinchonine geen twijfel over.

Omtrent het S. D. V. van de geisoleerde basis in alcohol van 97⁰ vol. proc. verkreeg ik de volgende resultaten:

1) $p = 0.0949$ gr.; $V = 20$ C.C., $l = 302.8$ m.M; $t = 18^0$ C.

α_D waargenomen: $3^0.3'$; $3^0.1'$; $3^0.3'$.

$(\alpha)_D = + 211^0. \pm 1^0.$

2) $p = 0.0531$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8$ m.M; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen: $1^0.39$; $1^0.41'$; $1^0.43'$; $1^0.43'$.

$(\alpha)_D = + 210^0 \pm 2^0.$

De verkregene cijfers zijn hooger dan dat, hetwelk door Hesse wordt opgegeven ($+ 205^0.4$); niettemin zijn de omstandigheden, waaronder Hesse zijne bepaling deed vrij wel gelijk aan die van mijne eerste bepaling.

Zouten van hydrochloorapocinchonine.

Zooals reeds in den aanhef van deze verhandeling is opgemerkt, zegt Hesse, dat hydrochloorapocinchonine geene neutrale, maar slechts zure zouten schijnt te vormen. Deze bij eene tweezurige basis zeker zeer zonderlinge eigenschap

schrijft hij ook toe aan hydrachloorapokinidine. Of HESSE inderdaad beproefd heeft, om van de vermelde alkaloïden neutrale (naar mijne opvatting basische) zouten te bereiden, blijkt uit zijne verhandeling over dit onderwerp niet. In elk geval kan ik de verzekering geven, dat dit meestal zonder eenig bezwaar kan geschieden, wanneer men de vrije basis met de berekende hoeveelheid zuur in eene slappe alcoholische oplossing samenbrengt. Alleen in geval men zouten van zwakke zuren, als mierenzuur, azijnzuur en dergelijke zal willen bereiden, kan het mogelijk wezen, dat men ter bereiding van basisch zout, iets meer dan de berekende hoeveelheid zuur zal moeten bezigen. Ik bereidde op die wijze het basische chloorhydraat, sulfaat, nitraat, chloraat en hyperchloraat, waarvan de eerste vier in water oplosbaar genoeg zijn, om er het S. D. V. van te kunnen bepalen.

In het volgende geef ik de beschrijving van de aldus door mij verkregene en onderzochte basisehe en neutrale zouten.

Basisch hydrochloraat *) $(Cl\overset{+}{Ap}H) + ClH + H_2O$. Zeer fijne naalden, moeilijk oplosbaar in water, gemakkelijker oplosbaar in alcohol.

(kristalwater: gevonden 5.2 proc.; berekend 5.2 proc.)

(Cl (als Cl H) gevonden 9.1 proc.; berekend 9.2 proc.)

$p = 0.0900$; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8$ m.M.; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen: $2^0.16'$; $2^0.15'$; $2^0.16'^5$.

$(\alpha)_D = + 165^0.9$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = 193^0.2$.

Neutraal hydrochloraat, $(Cl\overset{+}{Ap}H)$, 2 Cl H. (Op 130° C. verhit verloor het zout niets in gewicht).

---

*) Kortheidshalve neem ik voor de basis het teeken $Cl\overset{+}{Ap}H$ aan.

$p = 0.3948$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8$ m.M.; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen: $11^0.2$; $11^0.4'$; $11^0.1'$.

$(\alpha)_D = + 185^0.0$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 226^0.0$.

Neutraal hydrobromaat. $(Cl\ \overset{+}{Ap}\ H) + 2\ Br\ H$ Dit zout gelijkt volkomen op het neutrale hydrochloraat, en vormt eveneens prachtige kristallen. Het is in water moeilijker oplosbaar dan het voorgaande zout en waarschijnlijk watervrij.

Basisch sulfaat. $2\ (Cl\ \overset{+}{Ap}\ H),\ SO_4 H_2 + 3\ H_2O$. Uiterst fijne, in water moeilijk, in alcohol eenigzins meer oplosbare naalden.

(kristalwater: gevonden 6.8 proc.; berekend 6.6 proc.)

1) $p = 0.1013$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8$ m.M,; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen: $2^0.25'^5$; $2^0.24'$.

$(\alpha)_D = + 156^0.6$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 192^0.5$.

Basisch nitraat. $(Cl\ \overset{+}{Ap}\ H),\ NO_3 H$. Fraaie dunne naalden, in water moeilijk, in alcohol tamelijk goed oplosbaar, Het zout, op 130° C. gedroogd, verliest niets aan gewicht en bevat geen kristalwater.

$p = 0.0985$ gr.; $V = 20.02$ C.C.; $l = 302.8$ m.M.; $t = 16^0$ C.

$(\alpha)_D$ waargenomen: $2^0.26'^5$; $20^0.26'$.

$(\alpha)_D = + 173^0.5$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 194^0.8$.

Basisch chloraat. $(Cl\ \overset{+}{Ap}\ H),\ Cl\ O_3 H$. Dit zout gelijkt in uiterlijk zeer op het basische nitraat, maar is in water iets beter oplosbaar; het bevat geen kristalwater en verliest althans op 130° C. niets aan gewicht.

$p = 0.1000$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8$ m.M.; $t = 16^0$ C.

α_D waargenomen: $2^0.23'$; $2^0.20'^5$; $2^0.21'^5$; $2^0.20'$,

$$(\alpha)_D = + 155^0.3$$

berekend op het alkaloïde $(\alpha)_D = + 194^0.9$.

Basisch perchloraat. $(Cl \overset{+}{Ap} H) . Cl O_4 H + x H_2 O$. Dit zout kristalliseert zeer fraai bij bekoeling van eene in de warmte verzadigde zwak alcoholische oplossing. Het zout is in water te weinig oplosbaar, om het S. D. V. daarvan met eenige juistheid te kunnen bepalen.

Neutraal oxalaat. $(Cl \overset{+}{Ap} H) . C_2 H_2 O_4 + x H_2 O$. Witte vezelachtige naalden, in water moeilijk, in alcohol vrij gemakkelijk oplosbaar.

HYDROCHLOORAPOCINCHONINE ONDER DEN INVLOED VAN OVERMAAT VAN ZUUR.

Chloorwaterstofzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3948 * gr. neutraal	2	302 8 m.M.	11°2'	
zout	"	" "	11°4'	+ 226°.8
" "	"	" "	11°1'	
0.4017 gr. neutraal	3	" "	11°8'	+ 223°.8
zout + 1 mol. Cl H	"	" "	11°9'	
0.4039 gr. neutraal	4	" "	11°9'5	+ 223°.0
zout + 2 mol. Cl H	"	" "	11°11'	
0.4034 gr. neutraal	6	" "	11°5'	+ 221°.6
zout + 4 mol. Cl H	"	" "	11°5'	
0.4063 gr. neutraal	8	" "	11°1'	+ 219°.9
zout + 6 mol. Cl H	"	" "	11°0'	

Broomwaterstofzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3294 gr.	2	302.8 m.M.	11°14'	+ 225°.2
" "	"	" "	11°13'5	
0.3321 "	3	" "	11°11'	
" "	"	" "	11°13'	+ 223°.0
" "	"	" "	11°14'	
0.3310 "	6	" "	11°3'	+ 220°.6
" "	"	" "	11°3'	
0.3317 "	10	" "	10°53' †	+ 217°.7

* De hier vermelde waarden zijn afgeleid uit de waarneming omtrent het S. D. V. van eene oplossing van het neutrale hydrochloraat in water (zie blz. 194). Eveneens werd bij de volgende proeven hetzelfde zout onder toevoeging van zoutzuur gebezigd.

† Nadat de eerste reeks van bepalingen met deze vloeistof was verricht, begon zich het neutrale zout in de buis af te scheiden.

Salpeterzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3296 gr.	2	302.8 m.M.	11°15'5	+ 225°.3
〃 〃	〃	〃 〃	11°14'	
0.3300 〃	3	〃 〃	11°18'	+ 226°.2
〃 〃	〃	〃 〃	11°18'5	
0.3288 〃	4	〃 〃	11°11'5	+ 225°.2
〃 〃	〃	〃 〃	11°13'5	
0.3297 〃	10	〃 〃	10°59'	+ 220°.3
〃 〃	〃	〃 〃	10°59'	

Chloorzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3289 gr.	2	302.8 m.M.	11°22'	+ 228°.5
〃 〃	〃	〃 〃	11°23'	
0.3295 〃	3	〃 〃	11°26'	+ 229°.3
〃 〃	〃	〃 〃	11°27'	
0.3290 〃	4	〃 〃	11°29'	+ 230°.7
〃 〃	〃	〃 〃	11°30'	
0.3302 〃	5	〃 〃	11°17'5	
〃 〃	〃	〃 〃	11°19'5	+ 226°.3
〃 〃	〃	〃 〃	11°19'5	
0.3242 〃	8	〃 〃	10°59'5	+ 223°.9

Overchloorzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l*.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3280 gr.	3 *	302.8 m.M.	11°20′	+ 228°.1
〃 〃	〃	〃 〃	11°19′	
0.3301 〃	4	〃 〃	11°24′5	+ 228°.5
〃 〃	〃	〃 〃	11°25′5	
0.3290 〃	5	〃 〃	11°19′	+ 227°.1
〃 〃	〃	〃 〃	11°18′	
0.3292 〃	6	〃 〃	11°15′	+ 225°.9
〃 〃	〃	〃 〃	11°16′	

Mierenzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l*.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3290 gr.	2	302.8 m.M.	10°44′	+ 215°.4
〃 〃	〃	〃 〃	10°43′	
0.3295 〃	3	〃 〃	11°3′	+ 222°.0
〃 〃	〃	〃 〃	11°5′	
〃 〃	〃	〃 〃	11°5′	
0.3282 〃	4	〃 〃	11°13′	+ 225°.8
〃 〃	〃	〃 〃	11°13′6	
0.3306 〃	6	〃 〃	11°26′	+ 228°.5
〃 〃	〃	〃 〃	11°26′	
0.3290 〃	8	〃 〃	11°25′	+ 228°.7
〃 〃	〃	〃 〃	11°23′	
〃 〃	〃	〃 〃	11°22′5	
0.3291 〃	20	〃 〃	11°25′	+ 229°.2
〃 〃	〃	〃 〃	11°25′	
0.3318 〃	30	〃 〃	11°25′	+ 228°.2
〃 〃	〃	〃 〃	11°27′	
0.3282 〃	40	〃 〃	11°20′	+ 227°.9
〃 〃	〃	〃 〃	11°19′	

* Bij toevoeging van 2 moleculen ClO_4H aan 1 mol. van het alkaloïde werd wel een perchloraat gevormd, maar dit kon bij 16° C. niet in de gebruikte hoeveelheid vloeistof opgelost gehouden worden.

Azijnzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l*.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3298 gr.	8 *	302.8 m.M.	10°55'	+ 218°.7
〃 〃	〃	〃 〃	10°55'	
0.3300 〃	12	〃 〃	11°0'	
〃 〃	〃	〃 〃	10°58'	+ 219°.9
〃 〃	〃	〃 〃	10°58'5	
0.3296 〃	20	〃 〃	11°8'5	+ 223°.3
〃 〃	〃	〃 〃	11°8'5	
0.3317 〃	30	〃 〃	11°21'5	
〃 〃	〃	〃 〃	11°23'	+ 226°.4
〃 〃	〃	〃 〃	11°22'	
0.3310 〃	40	〃 〃	11°22'	+ 226°.9
〃 〃	〃	〃 〃	11°22'	
0.3330 〃	48	〃 〃	11°18'5	+ 226°.4
〃 〃	〃	〃 〃	11°18'5	
0.3288 〃	64	〃 〃	11°16'	+ 225°.9
〃 〃	〃	〃 〃	11°16'	

Zwavelzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l*.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3298 gr.	1	302.8 m.M.	11°18'	+ 226°.3
〃 〃	〃	〃 〃	11°18'	
0.3302 〃	1½	〃 〃	11°23'	+ 227°.4
〃 〃	〃	〃 〃	11°22'	
0.3325 〃	2	〃 〃	11°24'5	+ 227°.2
〃 〃	〃	〃 〃	11°25'	
0.3314 〃	3	〃 〃	11°21'5	+ 226°.3
〃 〃	〃	〃 〃	11°21'	
0.3297 〃	8	〃 〃	11°13'	+ 224°.8
〃 〃	〃	〃 〃	11°13'	

* Het was niet goed mogelijk, het alkaloïde in minder dan 8 mol. azijnzuur opgelost te krijgen.

Zuringzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3298 gr.	1½ *	302.8 m.M.	10°57′	+ 219°.4
〃 〃	〃	〃 〃	10°57′	
0.3295 〃	2	〃 〃	11°12′	+ 224°.5
〃 〃	〃	〃 〃	11°11′5	
0.3294 〃	3	〃 〃	11°12′	+ 224°.4
〃 〃	〃	〃 〃	11°11′	
〃 〃	〃	〃 〃	11°11′	
0.3271 〃	4	〃 〃	11°3′5	+ 223°.5
〃 〃	〃	〃 〃	11°4′	
0.3314 〃	5	〃 〃	11°8′	+ 222°.6
〃 〃	〃	〃 〃	11°8′	

Phosphorzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3268 gr.	1⅔ **	302.8 m.M.	11°21′5	+ 229°.0
〃 〃	〃	〃 〃	11°20′	
〃 〃	〃	〃 〃	11°18	
0.3294 〃	2	〃 〃	11°33′	+ 231°.7
〃 〃	〃	〃 〃	11°33′	
0.3296 〃	3	〃 〃	11°40′	+ 233°.9
〃 〃	〃	〃 〃	11°40′	
0.3300 〃	4	〃 〃	11°43′	+ 234°.5
〃 〃	〃	〃 〃	11°43′	
0.3307 〃	5	〃 〃	11°41′	+ 234°.0
〃 〃	〃	〃 〃	11°43′5	
〃 〃	〃	〃 〃	11°44′	
0.3308 〃	7	〃 〃	11°25′	+ 227°.7
〃 〃	〃	〃 〃	11°25′	

Met 1 mol. zuringzuur kon het alkaloïde niet in oplossing gebracht worden.

** Met minder dan 1⅔ mol. phosphorzuur kon het alkaloïde niet in oplossing gebracht worden.

Citroenzuur.

Gewicht aan alkaloïde op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen zuur op 1 molecule van het alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3300 gr.	2 *	302.8 m.M.	10°55'	+ 218°.5
〃 〃	〃	〃 〃	10°55'	
0.3295 〃	3	〃 〃	11°5'	+ 222°.3
〃 〃	〃	〃 〃	11°6'	
〃 〃	〃	〃 〃	11°5'	
0.3297 〃	4	〃 〃	11°6'5	+ 222°.9
〃 〃	〃	〃 〃	11°8'5	
〃 〃	〃	〃 〃	11°7'	
0.3285 〃	5	〃 〃	11°6'5	+ 223°.4
〃 〃	〃	〃 〃	11°7'	
〃 〃				
0.3303 〃	6	〃 〃	11°7'	+ 222°.2
〃 〃	〃	〃 〃	11°6'5	
〃 〃				

* Het was ondoenlijk, met minder dan 2 mol. citroenzuur het alkaloïde in oplossing te brengen.

Uit de verkregen uitkomsten blijkt ten duidelijkste, dat de beide door mij onderzochte bases ten aanzien van de wijzigingen van het S. D. V. onder den invloed van zuren, dezelfde wetten volgen als de vier kina-alkaloïden, welke ik vroeger heb nagegaan *). Met een oogopslag zal dit uit de volgende tabellen kunnen worden opgemaakt, waarin ik het S. D. V. van de alkaloïden, zooals het zich in de oplossingen van basische en neutrale zouten voordoet, nevens het maximum van het S. D. V. heb gesteld.

*) Zie vooral *Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas.* T. I. p. 18—40.

Apocinchonine.

Namen der zuren.	S. D. V. van de basis in de oplossingen van basische zouten.	S. D. V. van de basis in de oplossingen van neutrale zouten.	Maximum van S. D. V.
Chloorwaterstofzuur	+ 171°.3	+ 211°.4	+ 211°.5
Broomwaterstofzuur	+ 168°.7	+ 213°.0	+ 213°.1
Ioodwaterstofzuur .	+ 175°.5	—	—
Salpeterzuur.	—	+ 210°.7	+ 212°.7
Chloorzuur.	+ 166°.2	+ 215°.4	+ 215°.7
Overchloorzuur. . .	+ 175°.3	+ 213°.0	+ 218°.0
Mierenzuur.	—	+ 199°.9	+ 216°.3
Azijnzuur.	—	(3 mol.) + 180°.3	+ 205°.7
Zwavelzuur.	+ 164°.0	+ 210°.7	+ 212°.9
Zuringzuur.	—	+ 192°.4	+ 208°.1
Phosphorzuur. . . .	—	—	+ 213°.5
Citroenzuur.	—	—	+ 206°.1

Hydrochloorapocinchonine.

Namen der zuren.	S. D. V. van de basis in de oplossingen van basische zouten.	S. D. V. van de basis in de oplossingen van neutrale zouten.	Maximum van S. D. V.
Chloorwaterstofzuur	+ 193°.2	+ 226°.8	+ 226°.8
Broomwaterstofzuur	—	+ 225°.2	+ 225°.2
Salpeterzuur	+ 194°.8	+ 225°.3	+ 226°.2
Chloorzuur.	+ 194°.9	+ 228°.5	+ 230°.7
Overchloorzuur. . .	—	(3 mol.) + 228°.1	+ 228°.5
Mierenzuur	—	+ 215°.4	+ 229°.2
Azijnzuur.	—	—	+ 226°.9
Zwavelzuur.	+ 192°.5	+ 226°.3	+ 227°.4
Zuringzuur	—	($1^1/_2$ mol.) + 219°.4	+ 224°.5
Phosphorzuur. . . .	—	—	+ 234°.5
Citroenzuur	—	—	+ 223°.4

Wij zien, dat de maxima van S. D. V. binnen zekere grenzen zeer na met elkaar overeenstemmen, dat ook het S. D. V. van de alkaloïden, zooals het zich in de oplossingen der basische zouten voordoet, geen groote afwijkingen vertoont; hierbij heeft men wel in aanmerking te nemen, dat deze basische zouten wegens hunne geringe oplosbaarheid niet onder dezelfde omstandigheden van concentratie konden worden onderzocht.

Eindelijk komen wij tot het besluit, dat de bewering van Hesse ten aanzien van de gelijkheid van het S D. V. van hydrochloorapocinchonine in basische en neutrale zouten, allen grond mist.

Delft, 3 Juni 1882.

MISSIVE van Zijne Excellentie den Minister van Binnenlandsche Zaken aan de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

'*s Gravenhage*, 28 December 1881.

Bij het hiernevens gevoegd adres vraagt het hoofdbestuur der Vereeniging voor lijkverbranding wettelijke toelating der facultatieve lijkverbranding. Gaarne zal ik omtrent dit verzoek, voor zoover de wetenschappelijke zijde van het daarin behandeld onderwerp betreft, het gevoelen der Akademie vernemen. Ik vestig daarbij meer bepaaldelijk de aandacht op het volgende.

Er bestaan, naar ik meen, vergiften, die bij opgraving wel, doch na verbranding niet zijn terug te vinden. De vraag rijst, of het verplichtend stellen eener nauwkeurige lijkschouwing vóór de verbranding voldoenden waarborg kan leveren voor de ontdekking van deze kategorie van vergiften. Hierbij moet in aanmerking genomen worden, dat thans na opgraving de lijkschouwing dikwijls geschiedt ten einde het al dan niet aanwezig zijn van een bepaald vergif te constateeren, waarop door eenige omstandigheid de aandacht gevestigd is. Bij lijkschouwing, die spoedig na het overlijden geschiedt en aan de verbranding voorafgaat, bestaat zoodanige aanwijzing — in den regel het vinden van eenig vergif in de woning of onder het bereik van den verdachte — gewoonlijk niet en zal het onderzoek veel moeijelijker worden, wanneer elke aanwijzing ontbreekt.

Wordt deze vraag — waartoe ik intusschen uw onderzoek allerminst wensch te beperken — door uwe vergadering in toestemmenden zin beantwoord, dan verneem ik tevens gaarne, welke voorschriften zij noodig acht om hierin te voorzien.

De berichten en mededeelingen der vereeniging voor lijkverbranding, jaargangen 1876—1881, worden hierbij overgelegd. In den jaargang 1877, blz. 70 v. en den jaargang 1880, blz. 38 v. zijn de verordeningen betreffende de crematie te Gotha, Zürich en Milaan afgedrukt.

Het adres en bijlagen hoop ik met Uw antwoord terug te ontvangen.

De Minister van
Binnenlandsche Zaken.

SIX.

ADRES van het Hoofdbestuur der Vereeniging voor Lijkverbranding.

Aan Z. M. den Koning.

Geven met verschuldigden eerbied te kennen de ondergeteekenden, uitmakende het hoofdbestuur der Vereeniging voor Lijkverbranding, aan welke Vereeniging regtspersoonlijkheid is toegekend bij U. M. Besluit van 1 September 1875, N°. 39:

dat zij tot dusverre, op hunne jaarlijks tot Uwe Majesteit gerigte verzoekschriften, strekkend tot toelating der lijkverbranding door wijziging der wet van 10 April 1869 (Staatsblad N°. 75), hetzij van Uwer Majesteits Hooge Regering geene beschikking mogten ontvangen, hetzij hun verzoek voor inwilliging onvatbaar zagen verklaren op grond, dat de lijkverbranding het constateren van sommige misdrijven onmogelijk zou maken;

dat dit bezwaar, nog ten vorigen jare door Z. Excellentie den Minister van Binnenlandsche Zaken in de Tweede Kamer der Staten-Generaal aangevoerd, dus het éénige schijnt te zijn, dat de inwilliging van hun verzoek nog tegenhoudt;

dat echter het gevoelen van beroemde scheikundigen zoowel als de elders verkregen ervaring hun aanleiding geeft om dit bezwaar gering te achten;

dat immers de sporen van verwondingen ook na de begrafenis in zeer korten tijd verdwijnen; dat de meeste organische vergiften na de begrafenis evenmin in het lijk zijn aan te wijzen als na de verbranding in de asch, terwijl de aanwezigheid der anorganische, als antimonium, zink, lood, koper enz. evenzeer kan worden aangetoond in de asch van een verbrand, als in de overblijfselen van een begraven lijk; dat met name wat arsenicum betreft, door het aanbrengen van een reageermiddel in den schoorsteen van den lijkoven de aanwezigheid van dit zeer gebruikelijke vergif tijdens het verbrandingsproces zelf onfeilbaar en op eenvoudige wijze zou zijn aan het licht te brengen;

dat derhalve, in nagenoeg alle denkbare gevallen, het belang der justitie bij verbranding evengoed als bij begraving zou gewaarborgd zijn, indien de asch der lijken afzonderlijk werd bewaard en niet aan particulieren afgegeven, terwijl hare identiteit behoorlijk werd geconstateerd; welk een en ander in alle steden, waar de lijkverbranding

geoorloofd is en plaats vindt (Gotha, Milaan, Lodi, Zürich), is voorgeschreven en zonder eenige moeijelijkheid geschiedt;

dat overigens, voor zoover uit dezen hoofde nog eenig bezwaar mogt overblijven, dit op afdoende wijze te voorkomen is door het voorschrift eener voorafgaande lijkschouwing;

dat dit alles elders op zeer doeltreffende wijze is geregeld, zóózeer zelfs dat in één geval, waar reeds vergunning tot begraving van een lijk was verleend en later vergunning tot verbranding werd gevraagd, het voor deze laatste vergunning vereischte, strengere onderzoek de bewijzen heeft opgeleverd van eene door niemand vermoede vergiftiging, die bij begraving ongetwijfeld niet ontdekt zou zijn, (zie „Revue d'Hygiène" van 18 October 1880);

dat derhalve, bij eene doelmatige regeling, het belang der justitie de toelating der facultative lijkverbranding niet verhindert; en dat de leden der door adressanten vertegenwoordigde Vereeniging (ca. 800 in aantal) zich dus met reden bezwaard achten door het wettelijk voorschrift, dat hen zonder voldoenden grond verpligt tot eene wijze van lijkbehandeling, die stuitend is voor hun gevoel, en strijdig met hunne begrippen van welvoegelijkheid en eerbied voor de afgestorvenen.

Redenen, waarom adressanten, met verschuldigden eerbied en bescheiden aandrang, hun reeds meermalen gedaan verzoek om wettelijke toelating der facultative lijkverbranding herhalen.

't Welk doende (enz).

Het Hoofdbestuur der Vereeniging voor Lijkverbranding:

's Gravenhage,
October 1881.

RUTGERS, *Voorzitter.*
A. BEAUJON, *Secretaris.*
CORNS. DE GROOT, *Penningmeester.*
J. E. DE VRIJ.
A. L. H. ISING.
JOH. J. PERK.
DR. F. J. DUPONT.
J. B. KAN.
S. HOOGEWERFF.
BERGSMA.
P. H. HUGENHOLTZ JR.
J. VOûTE CZN.
B. H. PEKELHARING.
H. B. VAN TETS.
J. A. KOOPMANS.
C. J. VAILLANT.
W. A. BERGSMA.

RAPPORT VAN DE MEERDERHEID DER COMMISSIE

BENOEMD IN DE VERGADERING VAN 28 JANUARI 1882.

(Gelezen in de Vergadering van 27 Mei 1882).



Naar aanleiding van een adres, in October 1881 aan Z. M. den Koning gericht door het hoofdbestuur der Vereeniging voor lijkverbranding, welk adres het verzoek inhoudt om wettelijke toelating der facultatieve lijkverbranding, heeft Z. E. de Minister van Binnenlandsche Zaken zich bij missive van 28 December 1881, N°. 5012, Afdeeling B. B., tot de Akademie gewend, om over dit verzoek haar gevoelen te vernemen, voor zoover de wetenschappelijke zijde der vraag betreft.

De Minister gaat uit van de onderstelling, die wij al dadelijk als juist erkennen, dat er vergiften zijn, die bij opgraving wel, doch na verbranding van het lijk niet terug te vinden zijn. Levert nu, zoo wordt op dien grond door Zijne Excellentie gevraagd, het verplichtend stellen eener nauwkeurige lijkschouwing vóór de verbranding voldoenden waarborg op voor de ontdekking dezer kategorie van vergiften?

Alvorens tot de beantwoording dier vraag zelve over te gaan, meenen wij op den voorgrond te moeten stellen, dat de volledige verbranding de volkomen vernietiging in zich sluit van alle, zoowel physische als chemische kenteekenen, waaruit aan het lijk de oorzaak van den dood had kunnen worden erkend. Wij schromen niet de beweringen te dezen aanzien in het adres der Vereeniging voor lijkverbranding voorkomende lichtvaardig te noemen en wij komen met den meesten ernst op, zoowel tegen de stelling, dat de meeste

organische vergiften na de begraving niet meer zouden zijn aan te wijzen, als tegen die, waarin de zekerheid uitgesproken wordt, dat anorganische vergiften evenzeer in de asch — of zelfs in den rook — zouden kunnen aangetoond worden, als in het lijk zelf. Wat de eerste betreft, behoeven wij slechts te herinneren aan de veelvuldige gevallen, waarin juist de meest gebruikelijke organische vergiften, alcaloïden en alcaloïd-houdende plantenstoffen, ja zelfs blauwzuur, dagen en weken, sommigen zelfs maanden, na de begraving zijn aangetoond. Ten aanzien der anorganische vergiften kunnen wij volstaan met de opmerking, dat vele daarvan bij de verbranding overgaan in verbindingen, die van de aschbestanddeelen niet te onderscheiden zijn en dat, indien het chemisch onderzoek in de asch, of — wat wij practisch voor onuitvoerbaar houden — in den rook, bestanddeelen mocht aantoonen, die van vergiften afkomstig kunnen zijn, daaruit bijna nooit het besluit zou kunnen worden afgeleid, dat die stoffen in den vorm van vergif in het lijk aanwezig zijn geweest.

Naar ons gevoelen vervalt dus met de verbranding de mogelijkheid van elk vruchtbaar gerechtelijk scheikundig onderzoek en wij zien in het wegnemen der heilzame vrees voor latere ontdekking van het misdrijf een groot gevaar voor de individueele veiligheid, vooral met het oog op den moord door vergiftiging, die, wegens de niet moeilijke uitvoering, meer voorkomt dan men oppervlakkig zou meenen. Wij nemen de vrijheid hierbij de aandacht te vestigen op een reeds in 1848 te Utrecht verschenen geschrift van ons medelid Dr. A. W. M. van Hasselt, waarvan de titel luidt: *De noodzakelijkheid van algemeen toezicht op het gebruik van vergiften, betoogd uit de menigvuldigheid der oorzaken van vergiftiging.*

Wij ontkennen volstrekt niet, dat eene verplichte lijkschouwing vóór de verbranding aan dit bezwaar grootendeels te gemoet komt. Grootendeels, doch niet geheel, want het is volkomen juist, wat ook reeds in den brief van den Minister wordt opgemerkt, dat in sommige gevallen de erkenning eener vergiftiging afhankelijk is van aanwijzingen, ge-

put uit de omstandigheden, die den dood vorafgingen of vergezelden. Zoodanige aanwijzingen nu ontstaan dikwijls eerst korteren of langeren tijd na den dood. De ervaring heeft geleerd, dat de uit- en inwendige lijkschouwing, hoe volledig ook, op de algemeen in de praktijk gebruikelijke wijze verricht, in meerdere gevallen van vergiftiging zelfs het vermoeden daarvan niet heeft doen ontstaan en daarom ook geene aanleiding heeft gegeven tot een scheikundig onderzoek, dat trouwens op een tijdstip, waarop nog alle nadere aanwijzingen ontbraken, groote bezwaren in de uitvoering opgeleverd hebben zou.

Daarom meenen wij de vraag des Ministers, of het verplichtend stellen eener nauwkeurige lijkschouwing vóór de verbranding voldoenden waarborg kan leveren voor de ontdekking dier vergiften, die bij opgraving wel, doch na verbranding niet zijn terug te vinden, in ontkennenden zin te moeten beantwoorden.

Welke voorschriften er nu, met het oog op dit ontkennend antwoord, bij eene eventueele toelating van lijkverbranding zouden noodig zijn, moet onzes inziens worden bepaald in overleg met de rechterlijke macht. Aan haar toch moet de beslissing worden overgelaten òf, en zoo ja onder welke voorwaarden, de mogelijkheid van een later wellicht gewenscht scheikundig onderzoek van het lijk mag worden prijs gegeven en daarom zou naar onze meening de verbranding van een lijk nooit mogen plaats hebben, voordat de rechterlijke macht daartoe verlof gegeven heeft.

Op één punt evenwel gelooven wij met nadruk de aandacht te moeten vestigen. Het aantal der door studie en oefening volkomen bevoegde, gerechtelijke genees- en scheikundigen is niet groot en voldoet reeds thans niet altijd aan de behoefte. Bij toelating van lijkverbranding zou de Regeering dus maatregelen moeten nemen om een genoegzaam aantal bevoegde deskundigen ter beschikking der justitie te kunnen stellen. Door ons medelid Dr. A. W. M. van Hasselt is de wenschelijkheid dier maatregelen breeder ontwikkeld in zijne verhandeling: »*De gerechtelijke geneeskunde en de lijkverbranding*", welke verhandeling in het jaar 1875

opgenomen is in de Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen (Afdeeling Natuurkunde 2de reeks, 9de deel, 3de stuk, blz. 113).

Aan het gezegde wenschen wij niets meer toe te voegen. Wij achten het onnoodig en ongepast, de Natuurkundige Afdeeling door het uitlokken eener discussie te nopen zich met meerderheid van stemmen voor of tegen de lijkverbranding te verklaren. De hygiënische gronden, ten gunste der lijkverbranding aangevoerd, zijn tot nog toe gebleken niet afdoende te zijn, wat door de vereeniging voor lijkverbranding schijnt te worden toegegeven. Immers in het adres van het hoofdbestuur, wordt omtrent het vroeger aangenomen hygiënische voordeel thans het stilzwijgen bewaard. Bij de voorstanders der lijkverbranding geven dus andere motieven den doorslag, maar die motieven liggen buiten het gebied van natuurkundig onderzoek en behooren dus niet tot het terrein dezer afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

T. PLACE.
A. W. M. VAN HASSELT.
J. ZEEMAN.
J. W. GUNNING.

De Heer VAN BEMMELEN kon zich met dit rapport niet vereenigen en heeft zijne handteekening daaraan onthouden. Hij heeft gemeend een afzonderlijk rapport te moeten indienen, dat wij hieronder laten volgen.

Namens de Commissie
T. PLACE.

RAPPORT VAN DE MINDERHEID DER COMMISSIE

BENOEMD IN DE VERGADERING VAN 28 JANUARI 1882.

(Gelezen in de Vergadering van 27 Mei 1882, aangenomen in de Vergadering van 24 Juni 1882).



Naar aanleiding van een adres, in October 1881 door het Hoofdbestuur der Vereeniging voor lijkverbranding gericht aan Z. M. den Koning, en inhoudende het verzoek om wettelijke toelating der lijkverbranding, heeft Uwer Excellentie's voorganger, bij missive van 28 December 1881, N^{0}. 5012, Afd. B.B., zich tot de Koninklijke Akademie van Wetenschappen gewend om over dit verzoek haar gevoelen te vernemen, voor zoover de wetenschappelijke zijde der vraag betreft.

Zijne Excellentie ging uit van de veronderstelling, dat er vergiften zijn, die bij opgraving wél, doch na verbranding van het lijk niet terug te vinden zijn. Op dien grond werd gevraagd, of het verplichtend stellen eener nauwkeurige lijkschouwing vóór de verbranding voldoenden waarborg oplevert voor de ontdekking dier kategorie van vergiften?

Ten opzichte der genoemde veronderstelling, en in verband met het verzoekschrift van de Vereeniging voor lijkverbranding, merkt de Afdeeling op, dat de meeste vergiften, zooals blauwzuur, phosphorus, sublimaat, organische vergiften, en voor een groot deel ook het arsenicum, evenals de sporen van gewelddadige handelingen, met de verbranding van het lijk verloren gaan. Bij de tegenwoordige inrichting der lijkovens kunnen vluchtige minerale vergiften, die in een lijk mochten aanwezig zijn, in de producten der verbranding *niet* herkend worden; doch al ware zulks, b.v. door het aanbrengen van zeer samengestelde en kostbare inrichtingen, het

geval, dan toch zou het niet mogelijk zijn aan te wijzen, in welke deelen van het lijk, en in welke verbinding, het vergif is aanwezig geweest. Ditzelfde geldt voor de vergiftige bestanddeelen (zink-, koper-, lood- antimonium-verbindingen), die in de asch teruggevonden kunnen worden. De waarde van het scheikundig onderzoek zou daarmede grootendeels, zoo niet geheel, verloren gaan.

Ook de bewering der Vereeniging, dat de meeste organische vergiften in een lijk niet meer zijn aan te wijzen, gaat te ver. Immers zijn gevallen bekend, waarin, na korter of langer tijd, in opgegraven lijken, sommige plantaardige vergiften, ja zelfs blauwzuur, herkend zijn.

Bovendien kan de wetenschap belangrijke vorderingen maken, waardoor de opsporing van thans niet herkenbare vergiften in opgegraven lijken mogelijk wordt.

Uit dit alles blijkt genoegzaam, dat de waarborgen voor de ontdekking van vergiftiging of van een gewelddadigen dood van personen, wier lijk verbrand wordt, in de wettelijke voorschriften te zoeken zijn, aan welke vóór de verbranding moet voldaan worden. In de hierbij gevoegde Bijlage geeft de Afdeeling aan, wat deze voorschriften naar hare meening zouden moeten behelzen, wanneer lijkverbranding door de wet veroorloofd werd.

Door die voorschriften kan verkregen worden dat, onmiddellijk na den dood, de aandacht gevestigd worde op alle omstandigheden en gebeurtenissen, die, in geval van een gewelddadigen dood, juist van het grootste belang zijn. Men mag dan ook vragen, of een misdadiger van alle pogingen om de verbranding van het lijk zijns slachtoffers te bevorderen, zich niet onthouden zal, als hij weet, dat dat lijk door deskundigen uit- en inwendig geschouwd zal worden, nadat kennis zal zijn genomen van de inlichtingen des geneesheers omtrent de laatste ziekte en ziekteverschijnselen des lijders, en zijne behandeling; en dat, in geval van den minsten twijfel, tot een toxicologisch onderzoek zal worden overgegaan. Bij de lijkschouwing zullen sporen van in- en uitwendige verwondingen ontdekt worden. Vergiftiging met blauwzuur of phosphorus kunnen kort na den dood beter

bemerkt worden dan wanneer het lijk eenigen tijd begraven is geweest. Bij metaalvergiftigingen kunnen zeer dikwijls veranderingen of afzettingen in het spijsverteringskanaal of in andere organen waargenomen worden, die de deskundigen tot een nader toxicologisch onderzoek verplichten. Is omtrent de wijze van overlijden en de ziekteverschijnselen niets bekend, of is de verklaring van den geneesheer onvoldoende, dan zal zeker nooit eene verbranding worden toegestaan, tenzij eerst een toxicologisch of een justitieel onderzoek hebbe plaats gehad.

De Afdeeling gaat bij die beschouwing natuurlijk van de onderstelling uit, dat de lijkschouwing geschiede: niet door gewone geneeskundigen, zooals tot nog toe in Nederland meest altijd het geval was, die de noodige kennis en ervaring, voor dat onderzoek noodig, in den regel missen, maar door werkelijk deskundigen, die van het gerechtelijk genees- en scheikundig onderzoek, in den meest uitgebreiden zin, eene bijzondere studie hebben gemaakt.

Nogtans zijn er middelen van vergiftiging mogelijk, met zoo veel fijn overleg gekozen en toegediend, dat, wanneer overigens alle aanwijzingen eener misdaad ontbreken, het opvolgen der voorschriften, in de Bijlage aangegeven, niet zal leiden tot een nader toxicologisch onderzoek.

Ook mag de Afdeeling niet ontkennen dat, voor sommige vergiften, het onderzoek eerst dan vruchtbaar zal zijn, als aanwijzingen van anderen aard dan die door de lijkschouwing verkregen worden, het vermoeden van vergiftiging doen rijzen, en dat die aanwijzingen in enkele gevallen geheel kunnen ontbreken.

Wanneer dus de lijkverbranding mocht veroorloofd worden, blijft het noodig dat de Justitie voor elk geval hare toestemming verleene. Daardoor wordt deze in de gelegenheid gesteld om, in elk twijfelachtig geval, een volledig toxicologisch onderzoek te eischen of een justitieel onderzoek in het werk te stellen, vóórdat tot de verbranding mag worden overgegaan.

Op de vraag des Ministers: »of het verplichtend stellen eener nauwkeurige lijkschouwing vóór de verbranding vol-

doende waarborgen oplevert voor de ontdekking van vergiften, die na de verbranding van het lijk niet meer als zoodanig te herkennen zijn," meent de Afdeeling dus te moeten antwoorden: dat de lijkschouwing niet *in elk denkbaar geval* de zekere middelen kan verschaffen om, zonder meer, eene vergiftiging tot ontdekking te brengen: maar dat de te geven wettelijke voorschriften zoovele waarborgen voor die ontdekking kunnen geven, dat de Justitie in een overwegend aantal gevallen hare toestemming tot de verbranding van een lijk zal kunnen verleenen.

J. M. VAN BEMMELEN.

BIJLAGE.

Wanneer, door eene wijziging in de Begrafeniswet, ook de lijkverbranding zal worden veroorloofd, zal het voorzeker noodig wezen dat, bij algemeenen maatregel van inwendig bestuur, eene verordening gemaakt worde, waaraan bij de uitvoering der verbranding moet worden voldaan.

Die verordening zou, naar de meening der Afdeeling, de volgende voorschriften kunnen inhouden, om te voorkomen dat een gerechtelijk scheikundig onderzoek door de verbranding van het lijk onmogelijk werd gemaakt.

De inrichting en de wijze van verbranding moet door de Regeering worden goedgekeurd. De aanvraag tot verbranding geschiedt aan de bevoegde autoriteit Eene verklaring van den geneesheer, die den overledene gedurende zijne laatste ziekte behandeld heeft, moet worden overgelegd en het antwoord behelzen op de vragen:

Aan welke oorzaak de dood door hem wordt toegeschreven?

Welke geneesmiddelen hij in de laatste ziekte van den overledene heeft voorgeschreven?

Of eenigerlei verschijnselen door hem werden waargenomen, die hij niet aan de ziekte kan toeschrijven, en of die verschijnselen wettigen tot het vermoeden eener vergiftiging of van eenige andere misdadige handeling?

Als het lijk, met verlof der bevoegde autoriteit, naar de sectiezaal in het gebouw der lijkverbranding is overgebracht, moet de verplichte in- en uitwendige schouwing plaats hebben door twee geneeskundigen, die daartoe van Regeeringswege bevoegd zijn verklaard. De schouwing wordt hun, voor elk geval van lijkverbranding, opgedragen door een Ambtenaar van het Geneeskundig Staatstoezicht.

Die Geneeskundigen zijn gerechtigd en, in geval van eenig vermoeden van misdaad (hoe dat vermoeden ook verkregen zij) verplicht, den inhoud der spijsverteringsorganen, en deelen van deze of van andere organen, op zulk eene wijze te verzamelen en te bewaren, als voor een gerechtelijk genees- en scheikundig onderzoek vereischt wordt. Overigens moet de schouwing geschieden met al de hulpmiddelen, die de wetenschap aan de hand geeft.

Zij moeten de uitkomsten van hunne schouwing, of van schouwing en onderzoek, aan de daartoe aangewezen Rechterlijke Overheid mededeelen, met de verklaring in hoe verre die uitkomsten, naar hunne meening, al of niet bezwaren opleveren tegen de verbranding. In geval zij organen of deelen daarvan uit het lijk genomen en bewaard hebben, moeten zij zulks, met redenen omkleed, vermelden.

In den tijd, die verloopt tusschen het overbrengen van het lijk naar het verbrandingsgebouw en de schouwing, en tusschen de schouwing en de vergunning tot verbranding, moet het lijk op zulk eene wijze bewaard worden, als in gevallen van gerechtelijk genees- en scheikundig onderzoek vereischt wordt.

Geene lijkverbranding mag plaats hebben, dan nadat de Rechterlijke Overheid, die van het verslag der deskundigen heeft kennis genomen, daartoe de vergunning heeft verleend.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.



N°. XXI. CORNELIS SASKERSZ. VAN LEEUWEN. — ABRAHAM DE GRAAF.

1. Deze Mr. CORNELIS VAN LEEUWEN, Geswooren Lantmeeter en Liefhebber in Mathematische Konsten, zoo als hij zich betitelt, heeft van zich doen spreken door de uitgave van zijn Schotschrift: »AENHANGH Genaemt den BRIL, Voor de Amsterdamsche Belachelijcke Geometristen, Bestaende in eenige Geometrische en andere Questien, die door haer openbaer, op de manier als de Quacksalvers zijn aengeslagen, en my van haer eenige voorgestelt, die ick alle klaer hebbe gedemonstreert ende bewesen. Amsterdam 6. Juny 1663" [1]).

Dit geschrift werd wederlegd door ABRAHAM DE GRAAF »ONTLEDING Van de BRIL *Voor de Amsterdamze Belachelijke Geometristen*,... In dewelke getoont wert, Dat den Autheur *Cornelis van Leeuwen*, met alle voorname beschuldingen (sic), die hy andere aantijgt, swanger gaat;... Met een BIJVOEGSEL; Zijnde een Brief aan *Dirk Rembrantsz. van Nierop*... Amsteldam. 25. November 1663" [2]); — door CLAES HENDRIKSZ. GIETERMAKER »DEN Amsterdamschen Belachelijcken Geometrischen BRIL-MAKER... Voorgestelt, In een Vertooningh der opgeraepte vuyle leugenen, ende opgeblasen Quacksalvers-redenen. Amstelredam. 7 Augustus 1663" [3]) — door CHRISTIAEN MARTINII ANHALTIN »Half slapende AENSPRAECKE

Over de BRIL voor de Amsterdamsche Brillachende Geometrist... Klaere en grondighe Antwoordt Op 't Lasterlijck en Leugenachtige Schrift tegens my (en andere) uytgegeven:... Tot WAERSCHOUWINGE. Amstelredam. 1663" [4]); en nog, naar men zegt door ADRIAEN CLAESZ. HELLINGWERF, die toen nog zeer jong moet geweest zijn: dit werk heb ik evenwel nergens kunnen vinden.

C. VAN LEEUWEN beantwoordde het boekje van Noot 3 in zijn »ANTWOORDT Tegen het LASTERBOECKJE *Van den Amsterdamschen Belachelycken Geometrist* en *BRIL-SIFTER*, Klaes Hendricksz. Gietermaker, Waer inne ick wederlegge/ Al 't gene h [sic] uyt mijn BRIL gesift heeft/ en de valsche Logens die hy my te laste leyt; en oock noch vorder bewesen wat voor een Brodbelaer hy is. Amsterdam 1664" [5]). Op de laatste bladzijde schrijft hij „Dus verre door my beantwoort het Lasterboeckjen van || Claes Hendriksz. Gietermaker, en sal in 't fort mede volgen het Antwoort tegens || Mr. Anhaltin en Abraham de Graef." Doch van dit vervolg schijnt niet meer gekomen te zijn.

Deze strijd, vooreerst van zeer eigenaardigen vorm, is voor ons belangrijk, omdat hij welbekende namen betreft, en aantoont, hoe juist zij op de hoogte waren van hetgeen er ten onzent geschreven was, en hoe zij verstonden uit het arsenaal, dat hun ten diensten stond, de wapenen te nemen, die zij in het gevecht meenden noodig te hebben. Bovendien worden nog vele andere schrijvers in den strijd gemengd, meest alle tijdgenooten. Eene nadere beschouwing van dien strijd belooft dus niet onvruchtbaar te zullen zijn, maar ons een kijkje te zullen gunnen in de meer intieme geschiedenis van de wetenschappelijke mannen ten onzent in die dagen. Getuigen de bijzonderheden wel niet altijd van beschaafdheid, en de uitdrukkingen niet van fijnere vormen; laat ons daarbij niet vergeten, dat in onze dagen van beschaafden (?) toon en gekuischte vormen, dezelfde drijfveeren dikwerf tot weinig verschillende handelingen voeren, zoodra aan de hartstochten vrij spel wordt gelaten, en deze niet door ware beschaving, en edelen, wetenschappelijken zin worden gebreideld, met terzijdestelling van al het persoonlijke, dat den strijd wel scherper, maar niet wetenschappelijker maakt.

2. De aanleiding tot den strijd toch was waarschijnlijk jaloerschheid op het gebied van het onderwijs. Zoowel van Leeuwen, als de door hem aangevallen personen hielden scholen binnen Amsterdam, die zij gaarne met leerlingen bevolkt zagen; en het scheen wel voor te komen, dat deze leerlingen van den eenen onderwijzer naar den anderen gelokt werden. Een zeer geoorloofd middel daartoe was het schrijven van handboeken over een of ander onderdeel der wetenschap. Zoo was »de Bril" een aanhangsel tot het »School-Boeck der Wijnroeijerijen: Waer inne geleert wordt ... Door Mr. Cornelis van Leeuwen, Geswooren Lantmeeter, en Liefhebber in de Mathematische Konsten, resideerende op de Zeedijck in de Stuurman" 6). In de »Toe-eygeninge || *Aen alle Liefhebberen der Konst van 't* || Wynroeyen" zegt de schrijver: »waer in ick ten eersten bewijse, || en leere vinden den inhout van twee afgekorte Piramiden ofte Conesen [Coni]: Ten tweden || bewijse ick, dat drie grootheden in geduerige voortganck [evenredigheid] het $^1/_3$ der Zom van alle drie || minder is als de helft der twee uytterste: En ten derden bewijs ick mede, wanneer van || alle soorte van ronde Vaten, de gemeedieerde [middenevenredige] diepte met de langhte gemultipliceert werdt, soo komter meerder als de ware inhout: Ten vierden ..." Op deze wijze geeft hij de inhoud van zijn boek aan; verder spreekt hij over de »wannigheydt van ale soorten van Vaten ... waer toe ick een Tafel stelle, die voor desen door *Sybrandt Jansz. Cardinael* is || bereeckent"; deze tafel vindt men op blz. 13—15. Hij schreef dit boek »om dat ick verscheyde Leerlingen heb- || be gehadt en noch hebbe, die ick na dese ordre ghewoon ben te onderwijsen, bevin- || dende dese maniere de bequaemste te zijn, om te volghen, zijnde kort, eenvoudigh || ende klaer, als ick wel wete dat noch by niemant so is gedaen ..."

Abraham de Graaf en Claes Hendriksz. Gietermaker waren toen reeds genoegzaam bekend door hunne geschriften. Maar Christiaen Martinii Anhaltin voegde het boekje van Noot 4 evenzeer achter zijn »Oprecht, Grondich en Rechtsinnigh School-Boeck Van de Wyn-royeryen" 7), dat eigenlijk een tegenschrift was tegen het voormelde Schoolboek;

op den titel noemt hij zich verder „Oprecht School-houdende in de Konst van Cijfferen/ Geometrie/ || Lantmeeten/ Fortification op Landt af te steecken/ Italiaens en || Scheeps-Boeckhouden: tot Amsterdam, op de Zeedyck || daer de Konst-School uythanght en de Stuur- || man op de Stock staet."

Wanneer men nu weet, dat ABRAHAM DE GRAAF ook eene school hield in die buurt, in de Niezel, naest de »witte Ruit" [zie noot 13]; dan verklaart dit eenigzins de jaloesy van hun buurman CORNELIS VAN LEEUWEN.

3. Laat ons nu eerst met de vier genoemde hoofdpersonen kennis maken; dan kan dit later geschieden met de overigen, met wie wij te maken zullen hebben.

CORNELIS SASKERSZ VAN LEEUWEN — want dat zoo zijn naam luidde blijkt op blz. 22 van het boekje in Noot 1, — geswooren landmeter, woonde eerst te Doesburg: want op blz. 76 van hetzelfde boekje verhaalt hij van een „Questie openbaer tot Doesburch aengeslaghen, van de Landt- || meeter die daer woont"; maar ANHALTIN deelt ons mede op blz. 33 van het boekje in Noot 4 „de Lantmeter tot Doesburg, || maer sonder naem/ daer moet van Leeuwen in plaets voorstaen." Naderhand, in 1661, woonde hij te Amsterdam „buyten de Sint Antho- || nis Poort/ op de hoeck van 't Raem en Moolen- padt", en in 1663 was hij »resideerende op de Zeedijck daer de Stuurman uythanght" [zie bladz. 20 en titel van het boekje in Noot 1] „in 't huys van zalr. Mr. Johan Olfertsz. Schoten" »zijn Mr zal[iger]" [zie blz. 3 en 5 van het boekje Noot 3]. Behalve dezen noemt hij ook SYBRANDT HANZS CARDINAEL zijn meester, en was hij bevriend met DIRK REMBRANDTSZ VAN NIEROP. Hij was dan ook, getuige zijn boek in noot 6 niet onkundig in zijn vak, maar werd hetzij dan door jaloesij, hetzij om zijns meesters S. H. CARDINAEL roem op te houden, hetzij door zucht om bekend te worden, gevoerd tot het schrijven van zijn boekjes onder Noot 1 en 5; dat hem duur te staan kwam, maar niet duurder dan hij verdiende. Later gaf hij nog uit, behalve de werken van noot 1, 5 en 6,

4. JOH. BUINGA: Fondament en principalen Inhoudt van het Italiaensch Boeckhouden. 10e Druk. Amsterdam. 1698. 8°.

Deze JOANNES BUINGA »Boechouder ende Lief-hebber der

Reecken-Const, residerende naest d'oude Zijts Capelle in 't Wyngaertstraetje t'Amstelredam" gaf dit werkje in 1636 voor het eerst uit; hij had toen reeds 24 jaren aldaar onderwezen. Hij schreef

1. Fondament en principalen inhout van het Italiaens Boeckhouden. Amst. *Willem Stam.* 1636. 8°. 102 blz.

5e Druk. ib. 1647. 8°.; 10e, 1698. 8°.

2. Corte Instructie om Boeck te houden voor Commijsen ... ib. *id.* 1636. 8°. (22) blz.

3. Diversche Formen van Wissel-brieven ... ende andere ... ib. *id.* 1636. 8°. (16) blz.

Ook gaf hij uit:

4. H. Waninghen. Tresoor van 't Italiaens Boeckhouden. Amst. *Willem Jansz. Stam.* Gedrukt bij *Theunis Jacobs.* 1629. fol. (208) blz.

Herdruk. ib. *Gerrit Willem Doornick.* Gedrukt bij *Pieter Dircksz. Boeteman.* 1657. folio.

5. Id. 't Recht Gebruyck van 't Italiaens Boeck-houden. ib. *Marcus Doornick.* Gedrukt bij *Libert van Pashuysen.* 1672. 4°. (156), 46 blz.

Hieruit blijkt, dat hij ook leefde in den tijd, die hier besproken wordt.

4. Abraham de Graaf, een doopsgezinde uit Rijnsburg, stamde waarschijnlijk uit eene weversfamilie; althans in het boekje van Noot 5 leest men blz. 12 „hy was eerst van de Spoel- || back en 't Weefgetouw afgekomen." Later woonde hij te Amsterdam; op een in 't openbaar aangeslagen placcaat [waarover straks nader] van 18 Januari 1859, noemt hij zich „Wis- en || Sterre-konstenaer tot Amstelredam/ woonende aen den Nieu- || wendijck/ in de Nieuw-straet/ in de drie Vergulde Osse- || hoofden" [zie blz. 10 van het boekje in Noot 1]. In 1663 woonde hij in de Niezel naast de Witte Ruit (zie boven]: en schijnt nog weinig fortuin te hebben gemaakt, of nog niet genoegzaam naar zijn zin bekend te zijn geweest; althans het boekje van Noot 2 werd door hem in gemeenschappelijke rekening met C. H. Gietermaker uitgegeven; deze was trouwens toen Examinateur der stuurlieden, dus een man van eenig gewicht.

Op zijn ouden dag schijnt DE GRAAF eenigen tijd weder te Rijnsburg gewoond te hebben; de werken in noot 28 en 29 zijn althans vandaar gedateerd, in 1706; maar het werk van noot 30 werd weder 1708 te Amsterdam gedateerd.

Hij gaf een tal van werken uit, later ook met het doel om een volledig zamenstel van leerboeken te leveren, zooals wij zullen zien; vele van deze werken beleefden een of meer herdrukken. Hij schreef

1. Beschrijvinge van de nieuwe Ruyt-Caert... Midtsgaders hoe men verscheyde Astronomische questien... door een nieuwe Inventie... kan solveren. Insgelijcks een klare Instructie om te vinden de Polus-hooghte, de miswijsinge van 't Compas,... regel om Oost en West te varen. 1657. 4⁰. [8]).

2. Beschryvinge van de Pleyn-Schael. Amsterdam. 1658. 4⁰.

3. Cijferboeck. ib. 1658.

4. De seven Boecken van de Groote Seevaert. 1658. folio. [9]).

5. De Starre-Kunst. 1659. 4⁰. [10]), waarachter voorkomt, doch ook dikwerf afzonderlijk,

6. Redenering wegens de vinding der Lengte van Oost en West. 1659. 4⁰. [11]).

7. Vier Boecken van de Driehoekmetinge... van de Telkunstigen [d. i. Logarithmen]. 1659. 8⁰. [12]). Dit boekje begint met een tafel der Logarithmen van $1.^{n}r$ voor $n = 0$ tot 8; verder A van $(10)^{\frac{1}{2^n}}$, met daarnaast $\frac{1}{2^n}$ voor $n = 1$ tot $n = 54$.

8. Principia Arithmeticae Theoreticae et Practicae of de Beginselen der Telkunst of Rekenkunst. 1662. 8⁰. [13]) waarvan herdrukken in 1672, 1692.

9. Ontleding van den Bril. 1663. 4⁰, het boekje van Noot 2.

10. Nieuwe, Konstige Tafelen Sinuum Tangentium et Secantium. Zie Noot 16 van Bouwstoffen N⁰. III.

11. Wiskonstige Arithmetica... is bij gevoegd een kort Excemplaar-Boekje, [dat ook soms afzonderlijk voorkomt.] 8⁰.

12. Een kort Exemplaarboekje. 8⁰.

Een 2ᵉ druk van beiden werd gegeven door A. VAN DAM. 1696. 8⁰. [14]) en nog 1702, BRUYN 1705, 1715. Van het

1. 't Vergulde Licht der Zeevaert ofte Konst der Stuurluyden. Amst. 1660. 4°. [33]) waarvan de volgende herdrukken:

2e. Door FRANS VAN DER HUIPS. ib. 1671 [34]).

3e. Door DIRCK REMBRANTSZ. VAN NIEROP. ib. 1683.

4e. Door NICOLAAS DE VRIES. ib. 1697. [Zie Noot 15 van Bouwstoffen N°. V]. In dezen druk zijn reeds de eerste en de laatste gedeelten van de Tafels op koper gesneden; in de volgende drukken is dit voor de geheele bundel Tafels geschied.

5e. Door FRANS VAN DER HUIPS en JAN SIKKEMA. ib. 1707 [35]), waarbij eene belangrijke lijst van al de wis- en zeevaartkundige werken uitgegeven door JOANNES VAN KEULEN.

6e. Ib. 1712.

8e. Door FRANS VAN DER HUIPS, JAN SIKKEMA en CORNELIS PIETERSZ. STUURMAN. 1725 [36]).

11e. Door FRANS VAN DER HUIPS. ib. 1742 [37]).

12e. Door FRANS VAN DER HUIPS. ib. 1774 [38]).

Het is niet te verwonderen, dat bij zulk een druk debiet, er ook nadrukken voor den dag kwam. Men vindt er o. a. een bij *Robijn* te Amsterdam 1694 en een bij *Aaron van Poulle* te Middelburg 1705 [39]); de laatste zelfs met de eigenaardige bijzonderheid van een Privilegie van de Staten van Zeeland. En later bij *Jacobus Boter*, *Jan la Roy* en *Zacharias van Poelie* te Middelburg.

2. Wederlegging tegen PIETER KERSSEBOOM. Amst. 1661. 4°. [40]).

3. Aritmetica ofte Rekenkonst. ib. 1661. 8°. [41]) met

4. een tweede Deel ib. 1662 met een herdruk 1663 [42]). In het eerste Deel, 14 de blz. leest men omtrent zijn »Konst-Schoole" »leerende een yegelyck || Schryven, Cyfferen, Boeckhouden, || Geometria, Landen, Bergen, Bossen || Rivieren ende Toorens meten; leeren- || de oock de ses eerste Boecken Euclides: || ende op yeder werckelycke propositie, || een questie; Mitsgaders de loffelycke || ende vermaeckelycke Konst der Stuyr- || lieden op verscheyden manieren: ten || eerste door de Logarithmus, ten twee- || den door Pleyn-schael, ten derden || door de Ruyt-Kaert, ten vierden door || Tafel-Synus,

Tangens ende Sekans || leerende oock een yegelyck het uytreec- || kenen der Klootsche ofte Spherische || Drie-hoecken: alsmede verscheyden, || Astronomise Werck-stukken: als oock || verscheyden Questien, en het gebruyck || der Hemelsche ende Aertsche Globisen: || en teyckenen der Graetbogen, en 't ma- || ken der Pleyn-schalen en Ruyt-Kaer- || ten: Ende voorts alles wat aende Groote || Zeevaert is erlangende. Dit alles door || een subtyle ende korte maniere."

5. Almanach nae den nieuwen Stijl. 1662—1700. ib. 1661. 4°. [43]).

6. 't Vermaeck der Stuurluyden met een vervolgh.

7. 't Vergulden Lichts vermeerderingh.

8. Tractaetje van het Italiaensch Boeckhouden

9. Den Amsterdamschen belachelycken Brilmaker. Amst. 1663. 4°. Het boekje van Noot 3.

10. Driehoeks-reekening. Amst. 1665. 8°.

11. De drie Boecken voor Onderwijs der Navigatie. Amst. 1666. 8°. [44]).

12. Aenhangh op het Onderwijs der Navigatie. Amst. 1666. 8°. [45]).

13. Verschillende Plakkaten; ook van deze komen er straks ter sprake.

6. Ten slotte Christiaen Martinii Anhaltin, geboren te Emden in het begin der 17e Eeuw; in 1663 [zie het boekje van Noot 4, blz. 35] zegt hij toch „Ick ben nae by de 60 jaeren oudt"; hij was toen [zie blz. 37] „ontrent 48. jaer daer van daen geweest", dus omstreeks 1615 als soldaat [zie boekje van Noot 47] hier te lande gekomen. Hij woonde 1663 [zie titel van het boekje in Noot 7] »tot Amsteldam, op de Zeedyck, daer de Konst-School uythanght, en de Stuurman op de Stock staet"; reeds in 1653 bewoonde hij dit huis, waar hij even als de overigen eene, naar het schijnt, druk bezochte school hield.

Men kent van zijne hand:

1. Gulden Schale van den grooten Zeevaert. Amst. 1653. 4°. [46]).

2. Slot en Sleutel van den grooten Zeevaert. ib. 1659. 4°. [47]).

3. Oprechte en Waerachte Ruyt-Kaert van de Groote Zeevaert. ib. 1659. 4°. [48]).

4. Schoolboeck van de Wynroeyeryen. Amst. 1663. 4°. met

5. Half Slapende Aenspraeck.

De beide werkjes van de Nooten 4) en 7). Het eerste draagt hij op »*Aen de Eer. en Achtbare seer Discrete* JAN PIETERSZ. BACKER, DIRCK van HELMONDT, BARENT WICHMANS, FRANS BEX, CORNELIS van RHIJN, FEYNTE PIETERSZ., HENDRICK BANIER, Kooplieden en Wijnhandelaers", ten deele namen van nog bestaande geslachten van goeden huize.

6. Konstryck Handboeckjen.

7. VAN LEEUWEN geeft een overzicht van zijne beschuldigingen in de VOOR-REDEN van het boekje in Noot 1), en in de dichtregelen daarachter.

Ter eeren van de

BELACHELYCKE GEOMETRISTEN.

»*ICK wensch u veel gelucks, Wiskonstige Apen,*
En ghy Boecke-makers, met plunderen en kaapen,
Met rooven en steelen, een yeder van het haer,
En al u eygen doen dat is niet waert een snaer,
Met swetsen en rasen, gelyck de Quack salvers
In Brief en in Placcaet, blaet als jonge Kalvers:
Met andere haer veeren, en andere haer werck
Bestelen vroegh en laet, meenich Meester en Klerck
Van hare naem en eer, van haer werck en kunste,
En schrijven Boecken vol om te winnen gunste;
En om een groote naem achter te laten na,
Versmyten soo de schaemt, en vragen nieuwers na;
En sy zijn soo verblint, gelijck de aertsche Mollen,
Komt'er een Liefhebber, soo gaense voort hollen,
En roepen aen de Meyt, komt voort brenght de schoenen,
'k Moet noodigh eens uyt gaen, 'k heb yets uyt te doene;
Maer komter dan een bloet die nieuwers van en weet,
Niemant is haers gelyck, laten de Meyt met vreed',
Sy hebben niet van doen, geen schoenen maar muylen,
En swetsen dan haer best, g'lijck haer Broers d'Uylen."

En hiermede was de toon van den aanval aangegeven; laat ons zien met welke wapenen hij streed.

Als aanloop tot de eerste Questie van ABRAHAM DE GRAAF op diens placcaet van 18 Januarij 1659, behandelt hij eerst een eenvoudiger vraagstuk, „de Slot-questie van Stampioens de Jonge kleene Sinus Boeckje". [Zie Noot 2 van Bouwstoffen N⁰. XIII]. [Deze JOHAN JANSZ. STAMPIOEN DE JONGHE, zoon van JOHAN JANSZ. STAMPIOEN, werd in 1610 in Rotterdam geboren, leefde er nog in 1634; maar woonde 1639 te 's Hage, waar hij leermeester werd van CHRISTIAAN HUYGENS]. Die eerste questie van DE GRAAF behelst een in een cirkel beschreven driehoek, waarbij een middellijn, naar den tophoek getrokken, dien verdeelt in reden van 2 : 3; uit het andere uiteinde van die middellijn eene transversaal door den driehoek te trekken, zoo dat de beide stukken tot elkander staan als de opstaande zijden.

VAN LEEUWEN geeft eene trigonometrische oplossing en vergelijkt DE GRAAF bij „een seec || keren Boer, die meende boter uit sijn Karren te kryghen/ en vondt daer in een nest || met jonghe Katten... en begon luyde te roepen/ Wonderlycke boter/ wonder- || lycke boter"; „want mijns oordeels/ is er niemandt uws gelijck als || de Gietermaker, om dies wille ghy met u beyden meer als ghemeen bent/ om an- || dere lieden haer werck en questien uyt te geven en aen te slaen voor u eygen werck || ... syn Mr. Sy- || brants questien [49])... En besiet u Astronomia, die || hebt ghy geplundert uyt de Astronomia van Dirck Rembrantsz. van Nierop [50]) en || meentse beter te maken, maer hebtse juyst wel tienmael slimmer gemaeckt... en noch durfje u tyteleeren Wis- en Sterre-konstenaer: maer had ghy || geschreven Mis- en Narre-konstenaer/ zoo had ghy u recht ghetyteleert... 't blyckt hier niet aen dat de Meni || sten gauwe Konstenaers zijn/ als onder andere Religien, hoewel ghij eens teghens || mij geseght hebt dat het scheen of Godt de Menisten uytsonderde; want seght ghy || daer is Geraard Kinckhuysen tot Haerlem/ en Dirk Rembrantsz. van Nierop, en || Mr Sybrand zal. die Menist syn/ en hy woude seggen ick ben mede Menist: Wel || Graefje wilje u by sulcke mannen vergelycken/

nu den Hoogh geleerden Professor || de Bye, en oock den Professor Schoten zal. tot Leyden/ zijn die oock Menist/ || en Wasenaer tot Uytrecht en Jacob Brasser tot Hoorn, zijn dat oock Menisten." [De hier vermelde SYBRANDT HANSZ. CARDINAEL, dikwerf kortweg SYBRANDT HANSZ. genoemd, was te Harlingen geboren, en werd »Rekenmeester" te Amsterdam. DIRCK REMBRANDTSZ. VAN NIEROP komt later ter sprake. GERARD KINCKHUYSEN was een wiskundige te Haarlem, die in vriendschappelijke verhouding stond tot NEWTON, die, naar men zegt, zijn Algebra in het engelsch zoude vertaald hebben; ALEXANDER DE BIE opende 1653 een kosteloozen cursus te Amsterdam over wiskunde in hollandsch en latijn, met toestemming van Burgemeesteren; hij ontving in 1654 eene voorloopige aanstelling van *f* 750, en kort daarop den titel van Professor Extraordinarius; in 1659 werd zijn tractement met *f* 250 verhoogd en werd hij gewoon Professor. In 1668 werd zijn tractement verhoogd op *f* 1200, en gaf hij toen, ook in het Nederlandsch, lessen in logica, philosophie, sterre- en zeevaartkunde; hij leefde nog in 1690. Men meende, dat hij nimmer iets had uitgegeven, maar onlangs kreeg ik toch een werk van hem in mijn bezit [51]). Met Prof. SCHOTEN wordt bedoeld een der Hoogleeraren aan de Ingenieurs-School te Leiden FRANCISCUS VAN SCHOOTEN, Vader en Zoon. De vader werd te Leiden geboren in 1581, en stierf er 12 December 1646; de zoon overleed, mede te Leiden, 30 Mei 1661; zij vervulden hunne betrekking respective 1610—1646 en 1646—1660. ABEL W. WAESENAER, landmeter te Utrecht, was geboren te Waesmunster in Vlaanderen; hij kwam 1583 in Zeeland, 1613 te Utrecht. Van JACOB R. BRASSER weet men alleen, dat hij beëedigd Landmeter te Hoorn was.]

Na deze ontboezeming gaat VAN LEEUWEN over tot eene tweede Questie van het Placcaet van 18. Januarij 1659, »Spits-vinnigh, meetkundigh voorstel. Werdt een yeder begeerigh synde met Wis-kunstigh bewys/ te || beantwoorden/ voorgestelt door Abraham de Graef Wis en || Sterre-konstenaer tot Amstelredam/ woonende aen den Nieu- || wendyck/ in de Nieuw-straet/ in de drie Vergulde Osse- || hoofden. || De beweginge, tot het

openbaer voorstel deses, neemt || sijn afkomst, om dat andere haer met mijn arbeydt soecken || groot te maecken, en niet om dat ick dit zoo ongemeen kun- || stigh achte."

Dit vraagstuk betreft een driehoek, waarvan een der hoeken „wijdt bevonden is te zijn 60 trappen", dat is 60° bevat, met ingeschreven cirkel, waarbij gegeven zijn de stukken, waarin een der stralen de zijde verdeelt. Hiervan geeft VAN LEEUWEN vier oplossingen; maar beweert dat het vraagstuk behoort tot Mr SYBRANDTS „Questien."

Vervolgens „in syn groote Placaet staet boven aen een vraagstuk over een pyramide met vierkant tot grondvlak, waarin, door een bepaald punt van de diagonaal en den top, een vlak te trekken is, die de pyramide in twee stukken verdeelt als 7 : 9."

„Dese Questie... zijn affomstigh van Mr. Sybrant || Hansz. Cardinael Zalr .. en is nae het achtiende voorstel van 't Vijfde || Boeck der Meetdaek van de Wiskunstige gedachtenisse van Symon Ste- || veyn [52]) met dese Belacchelycke Geometrische Bril/ na-geaept en gebrilt/ || en is de selfde en van een natuer."

Ten slotte twee andere vraagstukken. Het een over twee trapezia, die een hoek gemeen hebben, en door eene zelfde lijn ieder in twee gelijke stukken te verdeelen zijn. Het andere om eene lijn AB, die aan den eenen kant met AC is verlengd, ook aan den anderen kant met dezelfde lengte BD te verlengen, waarbij de passer slechts de AB tot opening mag hebben.

Beide Questiën waren voorgesteld door SR. JACOB BOS, Landmeeter, die later nog een rol in onze beschouwing zal te vervullen hebben.

8. Laat ons nu »den Bril" vooreerst ter zijde leggen, en de »Ontleding" daarvan ter hand nemen. In de Voorrede zegt DE GRAAF »*ik niet zien en kan,* || *of de Stof sal meer dienen tot vermaacks-oeffening, als tot vordering* || *van Studie: en alhoewel de verlusting en de Studie zich zeer wel te* || *zamen voegen, zo zal ik mij nochtans meer verlaten op uwe goetgun-* || *stigheit, als op deze zijne nuttigheit. UL. bekent te maken het over-* || *val het welke wij, niet lang geleden, gehadt hebben, door 't besprin-* || *gen van eenen* Leeuw, *acht ik overtollig*... *dat*

mijn oogmerk niet zo || zeer geweest is onzen Autheur ten toon te stellen, als wel de zaak de- || welke van hem uytgewrocht is: 't gewrochte is my tegen en niet de || Werker: . . . en hy is ook ongelukkig genoeg die met het verachte vereenigt is . . . dat gy gelieft te geloven, dat deze bijgevoegde Brief aan Dirk || Rembrantsz. van Nierop, *mitsgaders mijn verantwoording wegens || van* Leeuwens *beschulding, mij in 't bezonder aangaande, hier meer || bijgevoegt zijn door occasie, als uyt oordeel van nootzakelijkheit; om || dat ik oordeelde dat de beschuldingen anders geen openbare verant- || woording meriteerde: beyde verantwoordenze zich zelfs, voor een ge- || zont oordeel, genoeg.*"

De »ONTLEDING van de BRIL, || *Voor de Amsterdamsche Belachelijke Geometristen. || Werdende bij manier van een Aanspraak tot den || Autheur voorgedragen, || Monsr. van* Leeuwen", begint met eene zeer bedaarde, maar toch zeer duidelijke ontleding van den titel, en vervolgt dan: »Maar, voor en aleer wy u tot Examinateur bevestigen, zal 't voor al geoorlooft zijn, u || te examineeren, of ghy bequaam zijt om dat ampt te bedienen; want indien bevonden || wiert, dat u daar toe geen meer bequaamheyt ontbeerde, als een blinde om te zien; zo || zoude 't immers geoorlooft zyn, de meeste beschuldingen weêrkeerig op u toe te || passen, . . . en u *Bril* zou || dan nergens anders toe konnen dienen, als om, door de zelve ziende, u blintheyt te be- || schouwen; en u aan te merken, niet voor een *Belachelijke*, maar voor een *Beschrye- || lijke* Geometrist. . . . Ontschuldigt my, indien ik UL. een weynig onsmakelijks mocht || komen voor te stellen, denkt dat zodanigen ampt al vry wat waart is".

Onze DE GRAAF vervolgt daarop »Ik dan, door u Bril ziende, wert gedrongen te oordelen, *dat UL. in de Beginselen || der Wis-kunst noch onwetende zijt.* Hier toe parst my voornamelijk dese twee volgende re- || denen: ||

Ten 1. *Dat gy door valsche Regels besluyt een ware uytkomst te vinden.*

Ten 2. *Dat gy voor goede Wis-kunstige Demonstratien keurt, die in 't minste niet bewijsen.*

Zijnde die twee eygenschappen, die een scheydingh maken, tusschen een Mis- en || Wiskunstenaar, of een Brod-

delaar en zijn tegendeel. || De mindere redenen zijn voornamelijk: ||

1. *Dat gy in u Demonstratien, veeltijds nalaat die dingen te bewijzen, die de || meeste duysterheyt hebben; of die de bewijzing 't meest van nooden hadden.*

2. *Dat gy in u Ontbindingen, noch goet zijnde, meenighmaal zeer lang en ver- || wart zijt.*

Uyt welke alle, indienze waar bevonden werden, genoegzaam zal blijken, dat u || ervarentheyt u het School gaan niet verbiet, ik laat staan Examinateur der Wis-kun- || stenaars te zijn."

Ter staving van de eerste opmerking haalt DE GRAAF blz. 17, 35, 40, 53 en 71 van den Bril aan; van de tweede opmerking blz. 50, 53, 54; van de derde en vierde opmerking blz. 66, 14, 62, 70, 67; waarbij telkens de noodige verbeteringen gevoegd worden, zoowel langs stelkundigen als langs meetkundigen weg. DE GRAAF besluit dit gedeelte [blz. 12], »zo zal 't ons zo weinig ge- || oorloft zijn, u tot *Wiskunstenaars-Examinateur* te bevestigen... En oversulks zijt bedankt voor u gewillige presentaty, en u || alree begonnene Dienst... En ik heb u te danken, dat gy u onnozelheyt niet getoont hebt, in die dingen, die gy, || by my onlangs School gaande, geleert hebt, door dien ik beducht zou zijn, dat, ik u die || toonende, gy my, 't noch gansch onbetaalde School-gelt, niet zoud' willen voldoen;... Gij dan, van u Ampt ontbloot zijnde, zult geen oneer aangedaan werden, indien wy || u neffens ons stellen. En 't zal, derhalven, my geoorloft zijn, u Beschulding, die gy || op my en andere toepast, te onderzoeken... Eerst zal ik on- || derzoeken, of de Beschuldingen, niet weêrkerig op u konnen toegepast werden, en || daar na, die geene, die gy particulierlijk, my toeeygent."

Hij vervolgt dan [blz. 12] »Gy zegt, *datze andere haar Werk uytgeven in* || *BOEKEN* en *QUAESTIËN*. || Hoe ver 't eerste op u past, zal ik niet onderzoeken, dewijl dat andere alree gedaan heb- || ben," waarmede DE GRAAF doel op het Boekje van Noot 3, dat voor het zijne in 't licht verschenen was. Omtrent het tweede merkt hij op

»Pag. 11... de Demonstraty, die gy daar voorstelt, is u

geleert van *J. Christiaansz*.... De tweede en darde Demonstraty, over de || zelve Quaesty, pag. 13, van een natuer zijnde, heb ik u geleert, toen gy my de voor- || noemde Demonstraty vertoonde. || De Demonstraty van de Quaestie pag. 28. is op de zelve trant, als *C. van Nienrode* [zie diens »Vyfthien Boecken Euclides", zie Noot 2 van Bouwstoffen N°. X]... De Quaesty pag. 58,... zwiert zo wel na || de 44 Quaesty van *Ludolf van Ceulen* [in diens »Arithmetische en Geometrische Fondamenten" zie Noot 17 van Bouwstoffen, N°. VIII]... Tusschen de tweede Quaesty van de geene die gy aan de Liefhebbers schenkt [blz. 70] en het || Bijvoegsel van *van Schooten*, gedaan op de 27e. van zijn *vijftig Geometrische Quaestien*, pag. 77 || [hij bedoelt diens Mathematische Oeffeningen, zie Noot 12, 13 van Bouwstoffen N°. XIII], is geen meer verschil, als tusschen een ziek Wyf, en eene kranke Vrou... Maar de grootste verzekering van allen, doet gy door de drie Quaestien, die u, na u || zeggen, onder u Deur door gestoken zijn. [Hierop komen wij wel nader terug]. De Voorstellen, Ontbindingen, en Bewij- || zen van de tweede en darde, zijn even de zelve als het achtste en zevende Voorstel van || *Johan Stampioen de Jonge*, pag. 300 en 298, [zie het boekje in Noot 2 van Bouwstoffen N°. XIII], en het darde [lees eerste], als dat van *Marlois van de sterkte-* || *bouwing* pag. 10. [53])... Zo dat gy genoegzaam toont, dat gy hier in volleert zijt; en datmen u Qualiteit ver- || korten zou, indienmen u het plunderings ampt niet toe eygende."

Nog bespreekt DE GRAAF eene oplossing, voorkomende in de Bril op blz. 55 van de 78ste Quaestie van GIETERMAKER, toont aan, dat die uit een ander werk, diens »tweede *Arithmetischen Deel* pag. 127" [zie Noot 42] is afgeschreven; maar geeft zelf een zestal stelkundige en een drietal meetkundige oplossingen, van welke laatste er een was »*mij vereert door Joannis van Loon*, *van de welke ook afkomstig is* || *de Meetkunstige Ontleding Pag*. 5." Het vraagstuk betreft twee lappen laken van dezelfde waarde, *f* 40; de som der ellen is 20; het verschil in prijs per el *f* $7^1/_2$; VAN LOON construëert nu een rechthoek met de basis AD gelijk aan

de som der ellen, en de hoogte AG gelijk aan den hoogsten prijs. Hij neemt op AD een stuk AB gelijk aan de minste ellen, dan wordt BD gelijk aan de meeste ellen; verder neemt hij op AG een stuk AF gelijk aan den laagsten prijs. Dan moet de rechthoek tusschen AB en AG gelijk zijn aan dien tusschen BD en AF. Dit zij een staaltje van de methode om zulke vraagstukken door »Meetkunstige ontleding" op te lossen.

Vervolgens herinnert DE GRAAF [blz. 21] »Gy zegt ook, *dat zommige geen Demonstratien verstuan*"; en verwijst VAN LEEUWEN naar de plaatsen in de Bril, waar hij eenvoudige waarheden »met eene groote omstandigheyt gaat bewijzen", ja zelfs de stellingen uit Euclides zelve bewijst, »tot walgens toe."

En daarop [blz. 22] »Ook zegt gy *datze zeer slechte Quaestiën uitgeven, en achte dezelve* || *voor ongemeene kunstige.*" Ook dit verwijt brengt hij op het hoofd VAN LEEUWEN terug. Hij neemt daartoe »de [7] Quaestien van u Bijvoegsel" [Bril, blz. 66—76], en toont aan, dat ze »zeer gemeen zijn" en »men ook, met weinig moeyten, tot een vergelijking komt"; ook haalt hij daarbij VAN SCHOOTEN [Aenhangh van Simpele Meetkunstighe Werkstukken in het Eerste Boeck der Mathematische Oeffeningen] aan, en eindigt »moetende u daar toe te wijs achten, dat gy zulke Kinderachtige Quaestien || . . . zoud voorstellen."

Ten opzichte van de drie volgende Questiën toont DE GRAAF aan, dat ze onvolledig en dus onbepaald zijn, en vervolgt omtrent de derde »ik zal tot hulp roepen u eigen Ontbinding, die gy, zo || my bericht is, noch onlangs, in een Bortje geplakt, voor u Deur gestelt hebt", waaruit »twee dingen [gegevens] blijken die in u Voorstel niet uytgedrukt || werden", en die »de heele Quaestie bepalen." Maar, zegt DE GRAAF »ik vertrouw || dat gyze, konstiger te zijn, aangemerkt hebt . . . door dien gyze, zo 't gelooflyk is, genomen hebbende uit u gekochte ge- || schreven Schriften, nagelaten van *Jan Olfertsz.* en *Jan Christiaansz.* niet hebt konnen || geloven, dat u dat Trezoor (zijnde u eenigen Troost, steunzel en toeverlaat, door || 't welke gy u gemoedigt hebt bevonden,

om de Wiskunstenaars aan boort te klampen) || geen beter kost zoude opdissen."

De beide laatste Questiën in de Bril, van MARTINII ANHALTIN, waarover DE GRAAF blz. 27—45 in het breede handelt, komen later ter sprake.

Op blz. 46 wordt het volgende aangehaald. »Gy zegt ook, *dat het Kreupels werk is, Quaestien te ontbinden met behulp* || *van de Tafel Sinus, die zonder dezelve konnen opgelost werden*", en aangetoond, dat ook VAN LEEUWEN zelf dit doet, blz. 5, 7, 32, 56. »En vorder zegt gy *Wanneer ik haar een kleene en slechte Quaesty voorstelle.* || *zij en konnent niet maken.* || Dat gy u oordeel hier gevelt hebt, bewijst gy met de Quaestien pag. 16. 35. 40. 52, de || zeventighste, en pag. 71 de darde Quaesty die gy alle niet hebt konnen maken gelijk || voren bewezen is... maar wat || meer is, gy zijt zo dom geweest, dat gy dezelve noch meende ontbonden te hebben: || zijnde eene dubbelde onnozelheyt."

»*En andere willen haar Examen doen van de Landmetery, en vallen door de Mant,* || *om datze de noodzakelyke Propositien niet verstaan,* || *die daar toe nodig zijn,*" waarop DE GRAAF antwoordt, »Indien dit waar is, zo zijt gy gelukkiger geweest dan zy, dewijl gy de beginselen niet || verstaande (gelijk voren getoont is) echter niet door de Mant gevallen zijt, maar mis- || schien zijt gy 'er boven uit gekropen, daar 't gemeenlijk op 't ruymst is."

»*En om dat ik haar geleert hebbe, en zij zeggen datze my geleert hebben,*" »maar gy verhaalt niet by wien || gy onlangs noch School gegaan hebt."

DE GRAAF komt terug op de onder de deur doorgestoken Quaestiën, en bewijst, waarom VAN LEEUWEN dit zelf moest gedaan hebben; en wat diens scheldwoorden betreft, eindigt hij: »In alle geval, blijkt dan, dat gy 't zelfs gedaan of ver- || dicht hebt; en diensvolgens hout gy u zelfs voor een *Schelm, Eerdief,* voor een *Uyls-uit-* || *broedsel of zijn Broeder.*

...door dien gy, boven die misslagen, noch schuldig zijt aan dese onnozelheyt dat || gy andere hebt betijgt, met het geene gy swanger gingt... even gelijk yemant, door een groene Bril ziende, oordeelt || alles groen te zijn, om dat de

Bril groen is, zo zullen wy u voortaan achte te zijn, || niet een *Belachelijke*, maar een *Beschryelyke Geometrist*, op dat wy tegen u qualiteit niet || zouden zondigen. || Dus ver de weêrkerige toepassing op u onderzocht hebbende, zo zullen wij eens || onderzoeken hoe ver de zelve op my passen, op dat gy, die last alleen dragende, niet || mocht komen te beswijken."

Doch nu neemt de Graaf een ernstiger toon aan, waar hij de beschuldiging van plagiaat behandelt, en wijst op het onderscheid, dat er bestaat tusschen het geval »dat ye- || mant een zelfde zaak komt te beschrijven, die een ander alreê beschreven heeft" en dat »wanneermen een gemeene sin, van een || Autheur, van woort tot woort na schrijft [blz. 49]" waarbij hij wijst op het boekje van Noot 3; en in dien zin beantwoordt hij de beschuldiging omtrent zijne Astronomia en Boek der Navigaty.

Wat aangaat zijn groote Placcaat »door my openbaarlyk zijn aangeslagen, is || waar; . . . zo deed ik 't om de zelfde reden, om de welke by- || na yeder een, door biljetten zijn mening bekent maakt, en voornamelyk in Amsterdam, || wiens gelegentheyt sulx, boven alle andere plaatzen, vereyscht; de biljetten waren om || mijn dienst aant gemeen bekent te maken." Noch enkele van die plakkaaten zijn tot ons gekomen, waaronder de twee, die in den Bril voorkomen.

De Graaf eindigt als volgt, [blz. 51]. »Monsr. van Leeuwen: *Dewijl nu alle slagen, van u op my en andere toegebracht, afgekeert,* || *en alle, of de voornaamste van dien, op u haar kracht getoont hebben, zo zyt gy bedankt voor de eer van* || *u gegeselschap, en voor 't vermaak my en de Omstaanders,* (*door 't toebrengen van uwe* Miskunstige || slagen) *aagedaan* [sic]; *en belgt u niet, dat wy uwe Klauwen, die wij nu getoest hebben, voortaan niet meer* || *zullen konnen achten voor* Leeuws, *maar veel eer voor* Kats Klauwen, *als meer dienende om te* || *krabben, dan te vechten; goeden dag: vaart wel: en ik bid u versuymt u zelven niet, maar laat op het* || *spoedigst den* Chirurgijn *en* Medecijn *komen, op dat ze u gequetste lichaam verbinden, en u beswij-* || *mende geest herscheppen: anders vrees ik, dat gy ons haast tot u uytvaart zoudt nodigen.*"

Daarop volgt een begeleidend schrijven van een quasi-

anonymen. »A. de G.", geestig en vol »boerterijen", gedateerd »In Leyden, den 1. December 1663," waarin deze aan VAN LEEUWEN aanraadt, de »Ontleding" niet te ontzien, maar spoedig te beantwoorden.

Ten opzichte van de hier voorkomende personen het volgende. CORNELIS VAN NIENRODE was »landmeeter en schoolmeester binnen Uytrecht." JOANNES VAN LOON, was »kaertdrucker te Amsteldam." JAN OLFERTSZ SCHOOTEN, was in 1620 te Amsterdam geboren; van JAN CHRISTIAANSZ. is ons niets bekend. Des te meer van de beide anderen. SIMON STEVIN, in 1548 te Brugge geboren, speelde een groote rol onder Prins MAURITS, gaf de schets voor de ingenieurs-school naast de hoogeschool te Leiden [zie Bouwstoffen N^{0}. VIII] en overleed te 's Hage in 1620; hij liet een groot aantal werken na van groot belang. SAMUEL MAROLOIS, die veel vestingen te onzent gebouwd heeft, schreef ook menig boek voor bouwkunde en aanverwante wetenschappen.

9. Nog volgt nu blz. 54—59, het »BYVOEGSEL, || *Zijnde een* Brief, *door* A. de GRAAF, || Geschreven aan || DIRK REMBRANDTSZ van NIEROP, || *Tot verantwoording van eenige Aantekeningen in zijn Boek* || *genaamt des* Aartrycks Beweging, &c."

Deze DIRK REMBRANTSZ. VAN NIEROP was een doopsgezind schoenmaker te Nieuwe Niedorp of Nierop, geboren in 1610. Hij was een vurig verdediger van het stelsel van COPERNICUS en kwam, mede door zijne veelvuldige geschriften, in aanraking en bleef in briefwisseling met vele geleerden van zijn tijd, zoo wel binnenslands als buitenslands. Hij overleed in zijn geboorteplaats den 4 November 1682. Zijn grafsteen, waarom de teekenen van den Dierenriem, bevat het opschrift:

DIRK REMBRANTS VAN NIEROP obiit omtrent 72 jaer. Mr. in de Wiskonst.

HIER RUST DAT SCHRANDER HOOFT
DIE D'ECLIPS RECHT VERLICHTEN
D'ASTRONOMIE WIST TE STICHTEN,
ZIJN GLORIE NOOIT VERDOOFT,
HY TOOND ONS DAT DE ZON

STILSTONDT, D'AERTKLOOT DRAEYDE
EN HOE DE DWAELDER SWAEYDE
UYT WARE WIJSHEYTSBRON.
SCHOON MEENIGH HUNNER SPOT
SYN WIJZER DER PLANETEN
DOET ELK DE WAERHEYT WEETEN,
NU RUST ZIJN ZIEL BY GODT.

DEN 4 NOVEMBER 1682.

Deze schreef in zijne Aardrijks Beweging [54]), Afdeeling »*Eenige* || AENMERKINGEN || *welcke zyn*, || 1. Op 't uytgaen van verscheyden nieuwe || Boecken, soo van my als oock van || andere. || 2. Op de vindingh der lenghte van Oost || ende West. || 3. Op de uyt-reeckening der Son-eclip- || sen, en dat sonder Tafelen, soo wel || particulier als generael [blz. 61—151]", op blz. 63 »Eerste AENMERCKINGE" het volgende:

„Gezien hebbende verscheyden nieuwe || Boecken/ nu uyt-gegeven ontrent || de Jaren 1658/ en 1659/ ende daer in || bemerckende hoe dat elck syn Boec- || ken vult met so van d'een en d'ander || Autheur wat na te schrijven/ ende dat || sonder den Autheur (of eerste Vinder) || zyn naem te gedencken".

Nadat hij van zijn Tijdt-beschrijvinge 1654 [55]) en zijn Wiskonstige Reeckeninge 1659 [56]) gesproken had, en over DE GRAAFS Driehoeks-Metinge, [het boekje van Noot 12], behandelt hij een 8 tal op- of aanmerkingen omtrent diens Sterrekonst [het boekje van Noot 10], op waardige, maar niettemin scherpe wijze. Het zijn deze aanmerkingen, die nu door DE GRAAF behandeld worden, evenzeer op veel ernstiger wijze, dan VAN LEEUWEN door hem behandeld werd. DE GRAAF eindigt, dat onder die acht »*twee* begane *abuysen* of verzinningen vertoont" worden, waarbij de tafels van LASTMAN [57]) worden aangehaald, — en »*twee sententiën*, vervult of volmaakt worden, die ick alleen ten deele voortgebracht had... maar het spreekwoort zegt, || *die een hond slaan wil, vint haast een stok*, zo is 't ook met u geweest... een gezel in de Neerduytze-Starrekonst te hebben, zal voor- || zeker u onaangenaam zijn geweest" want iets vroeger zeide hij »inziende u Examinaty, zo werd || ik geperst eer te geloven dat u de *afgunstigheyt* met dit Ampt verzien heeft dan de *Reden*."

De aanleiding dat dit Bijvoegsel achter de Ontleding opgenomen is, blijkt uit de volgende woorden: »En de Wiskunstenaars || werden zo doende wel voorzien; u hebbenze tot Examinateur van hare Boeken, en u || navolger, of liever, u geschapene (*van Leeuwen*) hebbenze voor Examinateur van de || zelve en haar Perzoonen. Maar dit overslaande, zo zullen wij eens onderzoeken of gy || in u Examinaty gelukkiger geweest zijt, als hy; dat gy daar in zediger bent is zeker, maar || of u 't geluk beter in de rest gedient heeft zullen wij toetzen." De Graaf teekent zich » *U meer toegeneygde, dan ik vertrou* || *van U Beminde* || A. de Graaf."

AANTEEKENINGEN.

---

1)* AENHANGH || Genaemt den || BRIL, || Voor de Amsterdamsche Belache- || lijcke Geometristen. || Bestaende in eenige || Geometrische en andere Questien die door haer openbaer/ op de manier || als de Quacksalvers zijn aengeslagen/ en my van haer eenige voorgestelt/ || die ick alle klaer hebbe gedemonstreert ende bewesen. || Door my || CORNELIS van LEEUWEN, Gesworen Lantmeter || ende Liefhebber der Mathematische Konsten, resideerende || op de Zeedijck daer de Stuurman uythanght. || [Vignette: eene meetkundige figuur, zie blz. 70] || t'AMSTERDAM, || Op HENDRICK DONCKER, Boeckverkooper en Graetboogh- || maker/ in de Nieuwebrugh-steegh, in 't Stuermans Gereetschap 1663. 4⁰.

A—K. 4 blz. niet gepagineerd. Bevat Titel, wit in verso, dan „VOORREDEN" 2 blz. Dan het werk blz. 5 – 79. Blz. 80 wit.

2)* ONTLEDING || Van de || BRIL || *Voor de Amsterdamze Belachelijke Geometristen,* || Door ABRAHAM de GRAAF. || In dewelke getoont wert, || Dat den Autheur *Cornelis van Leeuwen*, met alle voorname be- || schuldingen, die hy andere aantijgt, swanger gaat. Mitsgaders, dat hy || noch onkundig is in de Beginselen van de Wiskunst: dewijl hy diverze || *Valze Regelen* stelt; en voor *Wiskunstige Demonstratien* keurt || die in 't minste niet bewijzen. || *Versiert met de Ontbinding van al de ongesolveerde Quaestien, door hem de Lief-* || *hebbers voorgestelt, en van verscheide andere met haar Demonstratien.* || Met een BYVOEGSEL, || Zijnde een Brief aan *Dirk Rembrantsz. van Nierop:* tot verant- || woording van eenige Aantekeningen in zijn Boek genaamt des || AARTRYCKS-BEWEGING. || [Vignette: meetkundige figuur, zie blz. 43] || t'AMSTELDAM, || Gedrukt voor den Autheur en *Claas Hendricksz. Gietermaker*, woonende op de Haarlem- || merdijk in 't Huys van Lastman Zalr. daar de Konst-School uithangt. 1663. 4°.

4 Blz. niet gepagineerd, bevat titel, wit in verso, dan 2 blz. en opdracht, gedateerd 25 Novemb. 1663. Daarop „ONTLEDING van de BRIL, || *Voor de Amsterdamsche Belachelijke Geometristen.* || *Werdende by manier van een Aanspraak tot den* || *Autheur voorgedragen.*" Blz. 52 „Volgt de Kopy van een BRIEF, || *Geschreven door* || A. de G. . . ." Blz.

52, 53. Eindelijk blz. 54—59. „BYVOEGSEL. || *sijnde een* Brief, *door* A. de GRAAF || Geschreven aan || DIRK REMBRANTSZ. van NIEROP." Blz. 60 wit.

[3])* DEN || Amsterdamschen Belachelijc- || ken Geometrischen || BRIL-MAKER || CORNELIS van LEEUWEN. || Voorgestelt || In een Vertooningh der opgeraepte vuyle leugenen/ ende op- || geblasen Quacksalvers-redenen ontrent sijnen Bril, voor || de Amsterdamsche Belachelijcke Geometristen. || t'Samengestelt, door || CLAES HENDRICKSZ. GIETERMAKER. || [vignette: ornament] || t'AMSTELREDAM, || Gedruckt voor den AUTHEUR, woonende op de Haerlemmer-dijck/ || in 't Huys van Lastman Salr. ANNO 1663. den 7 Augustus. 4⁰.

A, B. Na den titel (wit in verso) begint blz. 3 „Den Amsterdamschen Belachelijcken Geome- || trischen *BRILMAECKER* || CORNELIS van LEEUWEN." Aan het einde blz. 16 staat „t'AMSTERDAM, || Ter Druckerye van HERMAN AELTSZ. in de Kalverstraat, by || den Dam, Anno 1663. den 7. Augustus."

[4])* Half slapende || AENSPRAECKE, || Over de BRIL voor de Amsterdamsche Bril- || lachende Geometrist. || Kortelijck uytgegeven/ || Ende met verscheyde Glasen te samen geset, door den niet wel-geoeffenden, || in de Konst-Broddelaer || CORNELIS van LEEUWEN, tot Amsterdam. || Klaere en grondighe Antwoordt || Op 't Lasterlijck en Leugenachtige Schrift tegens my (en andere) uytge- || gegeven/ door van Leeuwen tot Amsterdam, in een Tractaetjen genaemt den || BRIL voor de Amsterdamsche Belachelijcke Geometristen, met grondige aen- || wysinge sijner valsch en gewoone ordre in 't roeyen en meeten van alle Soorten || van Vaten/ Regenbacken/ Gronwerskuppen en Beeckers/ als mede de swaer- || te van Vyere Kogels/ &c, het welcke hy allen niet verstaet/ ende hy niet met al- || len in de Konst en Practyck geoeffent is. || Tot WAERSCHOUWINGE || Aen alle getrouwe en Vroome Inwoonders deser Stede en Landen, dat deselve voor || haer en hare Kinderen soecken en verkiezen soodanige, getrouwe, oprechte, in de Konst || geoeffende Leermeesters, die niet met groot spreecken en lasteren, maer in || der daet en oprecht onderwijs haer Konst betoonen, in het leeren || van haer Scholieren; dat deselve Stadt en Landt met alle || oprechtigheydt dienstigh konnen zijn. || Proverb. 17. 2 || Laet u eenen Vreemden prijsen ende niet uwen Mondt/ eenen Onbekenden || ende niet uwe Lippen. || Proverb. 3. 5. || Vertrouwt op den Heere met u gantsch herte/ ende en steunt op u verstant niet. || 't Derde Boeck Esdre. Cap. 3 en 4. Boven al overwint de Waerheydt. 4⁰.

D.—I. De verso van den titel luidt: LOF-DICHT, || *Ter eeren* || Mr. CHRISTIAN MARTINI ANHALTIN, || op sijn Grondigh en Rechtsinnigh Schoolboeck || van WIJNROYERYEN. || *EN* || „*Antwoort op de Geometrische Bril* (*en Brillema-* || *ker*) *onlanghs uytgegaen.*" 30 regelig vers door *D. I. Deane*. Dan blz. 29—39 „Half slaepende aenspraecke, over de, &c";

blz. 40—50 „Bewijs met fondamentale reeden, || DAT || CORNELIS van LEEUWEN || een Broddelaer en windtbuydel is, met alle de geene || die by hem geleert hebben, en noch leeren." Blz. 51—54 „Aengaende OOST en WEST-vindinge, daer schrijft || *Cornelis van Leeuwen* aldus van, in sijn tweede Voor-reden, || zijnde den aenhangh genaemt *den Bril voor de Amster- || damsche Belachelijcke Geometristen.*"

Blz. 54—64. „Volght 't Roeyen van Regenbacken, Brouwers-kuypen, || en Beeckers, enz."

Blz. 64—67. „Volght de swaerte van Yzer en Ysere Kogels."

Blz. 67, 68. „Waerschouwingh aen *Cornelis van Leeuwen.*"

5)* ANTWOORDT || Tegen het || LASTERBOECKJE || *Van den || Amsterdamschen Belachelijcken Geometrist* || en *BRIL-SIFTER* || Klaes Hendricksz. Gietermaker. || Waer inne ick wederlegge/ || Al 't gene h [sic] nyt myn BRIL gesift heeft/ en de valsche Logens || die hy my te laste legt; en oock noch vorder bewesen || wat voor een Broddelaer hy is. || By een gestelt door || CORNELIS van LEEUWEN, Geswooren Lantmeter, || en Liefhebber der Mathematische Konsten; resideerende op || de Zeedijck, daer de Stuurman uythanght. || [vignette: meetkundige figuur, voorkomende op blz. 76 van het boekje in Noot 2, maar nu met de meetkundige constructie.] T'AMSTERDAM Gedruckt voor den Autheur; || En men vindtse te koop by Hendrick Doncker, Boeckverkooper en Graet- || booghmaker in de Nieuwebrughsteegh/ in 't Stuurmans Gereetschap/ || het derde Huys van de Nieuwebrugh/ in de Straet. Anno 1664. 4°.

A, B. Na den titel (met verso wit) volgt blz. 3—12, het werkje zelf.

6)* SCHOOL-BOECK || DER || WIJNROEYERYEN: || Waer inne geleert wordt || Het meeten van alle soorten van Vaten, door de Quadrat || en Cubickroede, en oock 't maken van de selve, met noch || een onderrechtinge, hoemen sal meeten de Wannigheyt van || alle soorten van ronde Vaten, en noch de inhoudt van Regen- || backen, Brouwers-kuypen en Bekers, en mede de swaerte van || Ysere Kogels, door meetinge van een Passer te vinden. || Noch een Aenhangh/ || Genaemt den BRIL voor de Belachelycke Geometristen/ || Bestaende in eenige Geometrische en andere Questien/ die door || de selve aenslagen en my voorgestelt zijn/ dewelcke ick alle || klaer gedemonstreert en bewesen hebbe. || *DOOR* || Mr. CORNELIS van LEEUWEN, Geswooren Lant- || meeter, en Liefhebber in de Mathematische Konsten, residee- || rende op de Zeedijck in de Stuurman. || [vignette, een ton met de roeiing, zie blz. 19] || T'AMSTERDAM, || By HENDRICK DONCKER, Boeckverkooper en Graetboogh- || maker/ in de Nieuwebrughs-steegh/ in 't Stuurmans Gereetschap. 1663. 4°.

4 Blz., niet gepagineerd, bevatten titel, met verso wit. Dan 2 blz. „TOE-EYGENINGE, || *Aen alle Liefhebberen der Konst van 't* || WYNROEYEN, || Dienende tot een Voor-reden deses Boecks." Gedateerd „*In Amsterdam*

den 6 *Juny* 1663" en gevolgd door een „GEDICHT op het WYNROEYEN, || Ter eeren den Konstrijcken Wis-konstenaer || Mr. CORNELIS van LEEUWEN" van WARNAAR HESSINCK.

Dan A—D, blz. 1—28: bevat „KORT BEGRYP || Van de Konst der || WIJNROEYERS, || Waer inne geleert wort, soo veel als een || Wijnroeyer noodigh is te weten."

Blz. 1—9 met 2 gegrav. plaatjes; „Van de Wannigheyt van alle soorten van ronde Vaten" en „Tafel van 't meeten der Wannigheyt" [van SYBRANT JANSZ CARDINAEL]. Blz. 10—19: en dan nog blz. 20—28 verschillende vraagstukken.

7)* Oprecht, Grondich en Rechtsinnigh || SCHOOL-BOECK || Van de || WIJNROYERYEN. || Waer inne geleert wordt: || Het meeten van alle Soorten van Vaten/ door de Quadrat en Cubicq- || roeden/ met de Wannigheydt van alle soorten der ronde Vaten/ noch ooch || mede den inhout van Regenbacken/ Brouwers kuypen/ Bekers en swaerte van || Yzere Kogels/ met het maken van den Roey en Dupmstok tot Bosschieterye. || Als oock || Den *Quadrat-* en *Cubicq-Tafel,* || Tegens dat verbrodde, valsch en niets doogende, den Maker selfs || niet verstaende Schoolboeck van Wijnroeyeryen, onlanghs uytgegeven || door *Cornelis van Leeuwen*, Gezwooren &c. op de Zeedijck. Met || een antwoordt op zijnen *BRIL* voor de Amsterdam- || sche Belacchelijcke Geometristen, || Door || CHRISTIAEN MARTINII ANHALTIN, || Oprecht School-houdende in de Konst van Cijfferen/ Geometrie/ || Landtmeeten/ Fortification op Landt af te steecken/ Italiaens en || Scheeps-Boeckhouden: tot Amsterdam, op de Zeedijck || daer de Konst School uythanght, en de Stuur- || man op de Stock staet. || Met naerder uytschrijvinge van Oost- en Westvindinge. || [Boekdrukkers-ornament] || t'AMSTELREDAM, || By HENDRICK DONCKER, Boeckverkooper en Graet- || booghmaker, in de Nieuwebrughsteegh, in 't Stuurmans || Gereetschap. ANNO 1663. 4°.

A—P. Verso van titel, is wit. Blz. 3, 4 „*Aen de Eer en Achtbare seer Discrete* || JAN PIETERSZ. BACKER, DIRCK van HELMONDT, BARENT WICHMANS, FRANS BEX, CORNELIS van RHYN, FEYNTE PIETERSZ., HENDRICK BANIER. Kooplieden en Wijnhandelaers." Blz. 5, 6 „LOF-DICHT || *Op 't konstigh en wel-gefondeert School-boeck der* || *Wijn-royeryen.* || VAN || *Den Rechtzinnigen en Konstrijcken MEESTER,* || CHRISTIAEN MARTINI ANHALTIN" van LE THEODORE. Blz. 7—26 bevat het werk, en daarin blz. 11. „Den Quadrat-Tafel met sommige thien deelen. NOTA: de getallen soo || ofte [lees: after] de stippel ofte punct staen, zijn thien gedeelten." Blz. 12 „Den Cubicq-Tafel met zijn vern deel het Cubicqgetal. NOTA: soo achter || het stippel staet, zijn 16 [lees 10] deelen." Blz. 22, 23. „Tafel van 't meeten der Wannigheydt."

Op blz. 27 volgt de titel enz. van Noot 4.

8)* Beschrijvinge van de nieuwe || RUYT-CAERT, || Zijnde een nieuwe

en volkomen onderwijzinge hoe men || op de selfde sal ontbinden de voornaemste stucken der Zeevaert, || niet alleen de cours-rekeninge soo na de platte als wassende || Caert, maar oock de Stroom-kavelinge. || *Midtsgaders* || Hoe men verscheyde *Astronomische* questien, tot de Zeevaert van || nooden zijnde, op de selve sal ontbinden, en dat door een nieuwe Inven- || tie, volghens welcke men alle Sphaerische reeckeninghe lichtelijck || kan zolveren. || Insgelijcks een klare Instructie om te vinden de Polus-hooghte, de mis-wijsinge || van 't Compas, en tot besluyt een generale regel van Oost en West te varen, || zijnde een Instructie om te vinden 't verschil der lenghte. || Beschreven door Mr. ABRAHAM de GRAEF, *Mathematicus*, Schoole houdende || in de selve Konst, op de Nieuwendijck in de Nieuwestraet, in de drie || vergulde Ossehoofden. || [Vignette: een schip met volle zeilen] || t'AMSTERDAM, || By *Pieter Goos*, op 't Water in de Vergulde Zee-Spiegel. 1657. 4°.

A—N. Verso van den titel is wit, dan 2 blz. ongepagineerd „Voor-Reden" gedateerd „In Amsterdam den 28 November 1657." Blz. 5—50 het werk zelf, in IV Hooftstucken. Dan „Aenhangh van 't Ruyt-caert." „V^de^ HOOFTSTUCK, Handelende van de HOOGH-METINGE" blz. 51—71; „VI. HOOFTSTUCK, Handelende van de MIS-WYSINGE van 't COMPAS" blz. 72—87; „VII. HOOFTSTUCK, Handelende Van verscheyde noodtsaeckelijcke wetenschappen, die men, in Zee zijnde, moet observeren ofte waernemen" blz. 88—99. Blz. 100 is wit.

9)* Na een franschen titel „DE SEVEN BOECKEN || Van de || GROOTE || ZEEVAERT, || zijnde || Een volkomen klare, en konstige beschrij- || vinghe der NAVIGATIE. || *Beschreven door* Mr. ABRAHAM DE GRAAF, *Mathematicus*. || [vignette: een stuurmansschool] || t'AMSTERDAM, || By *Pieter Goos*, op 't Water in de vergulde Zee-Spiegel, in 't Jaer 1658. || *Met Privilegie voor twintigh Iaren*." Folio (verso wit) volgt de titel.

DE SEVEN BOECKEN || Van de || GROOTE || ZEEVAERT, || Waer in beschreven is 'tgheen een Stuer- || man noodigh behoorde te weten. || Onderwijsende hoe men 't selfde sal doen op verscheyde manieren, soo wel || door de *Logarithmus*, *'t evenredigh Liniael*, *'t Pleynschael*, *Ruytcaert*, *Streeck-schael*. &c || als met de Tafelen *Sinibus*, *Tangentibus* & *Secantibus* || En tot dien eynde zijn hier bij gevoeght de Tafelen *Sinuum*, *Tangentium* & *Secan-* || *tium*, ofte der *hoeckmaten*, *Raeck-lijnen* en *Snylijnen*, met de *Logarithmis Sinibus* & || *Tangentibus*, en de *Logarithmis numeris* van 1. Tot 10000. Als mede || de Tafelen der *Kromstreecken*. || En noch verscheyde andere Tafelen tot de Zeevaert van nooden zijnde. || *Midtsgaders* || Hoe men de Tafelen *Sinus*, &c. sal maken. || En voorts sulcken volkomen, klaren, en konstighe Instructie als noyt voor desen de || Stuerluyden in eenighe Zee-boecken is voor-gheschreven, zijnde doorgaens verciert met || verscheyde nieuwe Inventien en Bewerckingen. || *Alles beschreven door* Mr. ABRAHAM de GRAEF, *Mathematicus*, *woonende tot* Amsterdam. *Schoole houdende in de* || *selve Konst*, *op de Nieuwendijck*

in de Nieuwe-straet in de drie vergulde Ossehoofden. || Nae wel visiteren, wilt judiceren. || [Vignette: drie oorlogschepen, zeilende] || t'AMSTERDAM, || By *Pieter Goos* op 't Water in de vergulde Zee-Spiegel, in 't Jaer 1658. || *Met Privilegie voor twintigh Iaren.* Folio.

De verso van dezen titel bevat het „Extract uyt de Privilegie" van 3 December 1657. met „Ampliatie" ten aanzien van de instrumenten en kaarten. Dan 2 blz. opdracht „ *en de Wel-Edele en Mogende Heeren,* De Heeren Ghecommitteerde Raden Ter Admiraliteyt, residerende binnen AMSTERDAM." van PIETER GOOS. Weder 2 blz. „Tot den Lezer" van ABRAHAM de GRAEF.

De zeven boeken hebben elk afzonderlijke titels met den inhoud in verso, allen met het jaartal 1657, en alleen verschillende in inhoudsopgave.

a—f. Blz. 1—39, blz. 40 wit. EERSTE BOECK (3 Hooftstucken) „Handelende van de Loop des Hemels; || Te weten, van de Sphaerische Elementen, de Circulen, ende Beweginghe der || Planeten, ende ten laetsten, een grondige Instructie van de Hemelsche en Aertsche Globe", [vignette: sterrekundige figuur, zie blz. 6].

f—mm. Blz. 1—91, blz. 92 wit. TWEEDE BOECK (2 Hooftstucken). „Handelende Vande Reeckeninge der platte ende *Sphaerische Triangulen,* soo wel door de || *Logarithmi* met *Additio* ende *Substractio,* als door de Tafelen *Sinus* &c." [vignette: meetkundige figuur, zie blz. 3].

Blz. 7 bevat den titel: „TABULAE || *SINUUM, TANGENTIUM* || *& SECANTIUM* || ofte der || HOEKMATEN, RAEKLYNEN || ende SNYLYNEN, || Ad, Radius 100000. || Met de LOGARITHMI || der *Sinuum en Tangentium.*" Blz. 8 is wit: onderaan staat „**Hier volght het** Cijfer-werck, **beginnende met de signatuer** A, en **eyndigende met de signatuer** G." Deze 72 ingeschoven bladz. zijn niet gepagineerd, en bevatten de goniometrische lijnen en hare logarithmen voor elke minuut, alsmede de Logarithmen der getallen in 5 decimalen, zonder verschillen.

Aaa—Iii. Blz. 1—96. DERDE BOECK (5 Hooftstucken). „Handelende van de voornaemste Stucken || derselver. || Bestaende in de Hoogh-metingh, de Mis-wijsinge vant || Compas, en de Drie-hoecx-Rekeninghe op de gelijck- || gradige-Pascaerten, als mede de Stroom-kaveling, || ende ten laesten een seer klare ende grondige || Instructie van de Kromstreecx || Reeckeninghe. || [vignette: eene meetkundige figuur, zie blz. 28].

Op blz. 68 onderaan staat „**Nu volght de rest van** 't Cijffer-werck, **beginnende met de Signatuer** H, || **en eyndigende met de Signatuer** N." De daarop volgende 8 ingeschoven bladen geven de „TAFEL || Der || WASSENDE || LATITUDO || Ofte Vergrootende breete" en dan 57 blz. „TAFEL || der || KROMSTREEKEN."

Aaaa—Llll. Blz. 1—86, en 2 blz. wit. VIERDE BOECK (VI Hooftstucken). „Tracterende || Van 't maken en passen op de, soo gelijck, als wassend-gradige-Pas- || caerten. Vande *Declinatie* der Zon ende

Sterren. Midtsgaders hoemen door || de reeckeninghe der *Sphaerische Triangulen* de uure des tijdts en verschey- || de andere saecken sal vinden: Ende ten laetsten een grondige || Instructie vande loop der Maen en 't bereekenen || der Water-ghetijden [vignette: meetkundige figuur, zie blz. 16].

Aaaaa—Eeeee. Blz. 3—39. Blz. 40 wit. Vyfde Boeck (III Hooftstucken). „Handelende van de voornaemste saecken, die men, || in Zee zijnde, moet *observeren*." [Vignette: een meetkundige figuur, zie blz. 5].

Aaaaaa—Hhhhhh. Blz. 3—60. Seste Boeck (V Hooftstucken). „Tracterende van 't || Evenredigh Liniael. || Te weten: hoe men op 't selfde sal uyt-pas- || sen, soo de platte en *Sphaerische Triangulen*, als de Krom- || streecks-reeckeninge, en noch verscheyde an- || dere *Astronomische* questien [vignette: sterrekundige figuur, zie blz. 44].

Hierachter volgt A—C. Blz. 1—18, 2 blz. wit „Aenhangh || Op 't seste Boeck, waer in ghehandelt || wordt van een nieuw Instrument, welck ick noe- || me *Streeck-schael*."

Aaaaaaa—Mmmmmmm. Blz. 3—96. Sevende Boeck (VII Hooftstucken). „Tracterende || Hoe men de voornaemste stucken der Zeevaert sal || zolveren soo door 't Pleynschael, 't Ruyt-caert, als noch op || verscheyde andere manieren, en het besluyt zijn hier noch || inghestelt 100 konstighe Questien de Navi- || gatie aengaende." [Vignette, als bij Boeck VI].

Ten slotte nog „Register der zeven Boecken," 7 bladz.

10)* De || Starre-Kunst, || *Beschreven door* || Abraham de Graaf; || *Leerende* || De hoedanigheden der beweginge van || alle zichtbare Hemelsche Lighamen, || En 't berekenen haarder zichtbare plaatzen. || Mitsgaders, || *De hoedanigheden der verduistering van Zon en Maan,* || *en de berekeninge van dien.* || [Boekdrukkers ornament] || t'Amsteldam, || By Pieter Goos, op 't Water by de Nieuwebrugh, inde || Vergulde Zeespiegel. A°. 1659. 4°.

Verso van den titel, wit. Dan 6 blz. ongepagineerd. „Voorreden || Aan de || Lezer" gedateerd. „t'Amsteldam, toen de Maan in || 't midden van zijn verduiste- || ring van den avont hier gezien || wiert. 1659."

A—Q. Blz. 1—125: waarop 3 blz. Bladwyzer || der || Starrekunst." Aan het einde „*t'Amsteldam, gedrukt by Paulus Matthysz.* (*Voor Pieter Goos, op 't Water*) 1659."

Blz. 75—125 bevatten sterrekundige tafels.

11)* Redenering || wegens de vinding || der || Lengte || van || Oost en West. || *Door* Abraham de Graaf. 4°.

a, b. 13 blz. ongepagineerd.

12)* Abraham de Graafs || *Vier Boeken.* || Drie vande || Driehoeks- || metinge. || En een vande || Telkunstigen: || In welke kort en klaar

verhandelt wert: zo || van 't maken der TELKUNSTIGEN, als || vande HOEKMATEN, RAAK- || en SNYLYNEN. || *Mitsgaders* || Vande ontbindinge der RECHTLINISCHE || en KLOOTZE DRIEHOEKEN. || *Alles met haar bewijs.* || [Vignette: eene meetkundige figuur, zie blz. 60] || t'AMSTELDAM. || By *Pieter Goos*, op 't Water in de Vergulde || Zee-Spiegel, Anno 1659 8°.

Verso van titel is wit. Dan „Tafel om alle Telkunstigen te maken door vergaring" met Tafel A en B; dan het „Tot den LEZER." gedateerd „In Amsteldam, den 23 October 1658". 2 blz. ongepagineerd.

A—S. Blz. 1—271. (blz. 272 is wit): bevat

Blz. 1—39. EERSTE BOEK. *Van de Hoedanigheden en 't maken der* TELKUNSTIGEN.

Blz. 40—88. TWEDE BOEK. *Vande eigenschappen, vergelijkingen en 't maken der* Hoekmaten, Raak- en Snylijnen.

Blz. 89—144. DARDE BOEK. *Vande eigenschappen, vergelijkinge en ontbindinge der* Rechtlinische Driehoeken.

Blz. 145—255. VIERDE BOEK. *Van de Eigenschappen, Vergelijkinge en ontbindinge der* Klootze Driehoeken.

Blz. 256—271. Bijvoegsel. 17 Voorstellen.

13)* PRINCIPIA ARITHMETICAE, || Theoreticae, & Practicae. || *Of de* BEGINSELEN der || TELKUNST, || *Of* || REKENKUNST; || Haar *Eigenschappen* en *Toepassing*, || Voornamelijk in de Koophandel. || *Alles, na de wijze van* Euclidis *Meetkunst, Wis-* || *kunstig bewezen.* || Een Werk, bequaam zijnde, om voor des zelfs naerstige || Onderzoeker, in korten tijt, te komen tot het hoogste oog- || merk van kennis in de Rekenkunst; dewijl daar in, niet || alleen byna alle voorvallen worden verklaart, maar || ook getoont wort d'oorspronk van alle Regelen, || en Rekeningen, die men daar toe gebruikt. || *Zeer nut voor Boekhouders, en Oplossers van allerhande sware Koop-* || *mans Rekeningen, dewijl daar in gevonden werden de Voor-* || *vallen, en korte manieren, die op de voornaamste* || *Komptoiren voorvallen, en gebruikt werden.* || Beschreven door ABRAHAM de GRAAF, Boekhou- || der, Rekenmeester, enz. tot Amsterdam [vignette: allegorische figuur, voorstellende de „ARITHMETICA"] || t'AMSTERDAM, Gedrukt bij Steven van Lier, || Voor den Autheur, in de Niezel, naast de Witte Ruit, daarze || te bekomen zijn; ook by *Pieter Goos* en *Jan Riewertsz.* || Boekverkoopers. 1662. 8°.

Voorwerk 16 blz. bevat titel, met verso wit. „VOORREDEN" 10 blz. gedateerd „In Amsterdam, den 35 Novemb. in 't jaar, || na Christi geboorte, 11405, *tellende al-* || *leen met dese* 1. 2. 3. 4. 5. 0. *Talletters.*"; BLADWYZER 2 blz.; „AXIOMATA || of || *Algemeene kundigheden*" 2 blz.

A—Fff. Blz. 1—832. Het werk in V Boeken.

14)* WISKONSTIGE || ARITHMETICA, || *Zijnde een korte Verhandeling van de Na-* || *tuur der Cyfer-konst, in haar begin, mid-* || *den en einde, beneffens een duidelyke on-* || *derrigting om die te verstaan:* || Waar agter

tot Toepassing voor den Leer-||ling is by gevoegt een kort || EXCEMPLAAR-BOEKJE, || Inhoudende, alleenlyk die Regels en Vraag-|| stukken, die in de Negotie voorvallen; met || een Verklaring van den inhoud van yder Re-|| gel en bewerking deszelfs, op de kortste ma-|| nier, wydlopig verhandelt door || ABRAHAM DE GRAAF, || En nu op deze ordre gebragt door || A. van DAM. || [Boekdrukkers ornament] || Tot AMSTERDAM, || By de Wed: van GYSBERT DE GROOT || op de Nieuwen-dyk. 1696. 8°.

Voorwerk 8 blz. verso van den titel wit; opdracht aan „Edele, Wijze Agtbare || HEER, || ALBERT BENTES, || *Out Schepen der Stadt* || AMSTERDAM" van A. VAN DAM. 5 blz. „Op de Wiskunstige || ARCHIMETICA [sic] || Van ABRAHAM DE GRAAF || Verkort door || ANTONI VAN DAM." Van A. BOGAERT. 1 blz.

A—F. Blz. 1—96. „MATHEMATICA, || OF || WISKONST, || VAN DE || ARITHMETICA."

Hierachter komt dan:

14a)* EXEMPLAAR-BOEKJE || Van de || ARITHMETICA, || Zynde een vervolg van de Wis-|| konstige Arithmetica: || *Inhoudende (beneffens een korte aanleyding || tot de beginselen der Cyferkonst) alleenlyk die Re-|| gels en Vraag-stukken, die in de Negotie voor-|| vallen, en door een evenredige Rekening || moeten gevonden werden.* || Met een korte Verklaring van den Inhoud van || yder Regel, en Bewerking des zelfs, || op de kortste manier || *In 't breede verhandelt door* || ABRAHAM DE GRAAF, || *En op dese order gebragt door* || A. van DAM. || [Ornament] || Tot AMSTERDAM, || By de Wed: van GYSBERT de GROOT, || op den Nieuwen-dyk. 1696. 8°.

Blz. *3 tot *12. VERKLARING.

A—F. Blz. 3—72 het werk zelf, dan 4 blz. niet gepagineerd „AANWYZING || VAN DE || Paginaas of Bladzyden." Aan het einde: „Tot narichting dient, dat het Tweede Deel || van dit Cyferboekje, namentlijck het Exemplaar-|| Boekje, ook apart tot gebruik voor Leerlingen || verkogt wert.

15)* EXEMPLAAR-BOEKJE || Van de || ARITHMETICA, || Zynde een vervolg van de Wiskonstige || Arithmetica: || *Inhoudende de gansche Reekenkonst, beginnende met de || allereerste gronden; en zoo voortgaande tot alles wat || op een Koopmans Comptoir of in de Negotie voor-|| valt, 't welk door een eevenreedige Reekening || moet gevonden worden; niet alleen zeer dien-|| stig om in de Schoolen; maar ook van een || yder die zig maar eenigzints tot de Negotie || zoekt te begeeven gebruikt te worden.* || Met een Verklaaring van den Inhoud van yder || Reegel in 't byzonder beneevens desselfs || bewerking op de kortste en gemak-|| kelykste manier. || *In 't breede verhandeld door* || ABRAHAM DE GRAAF. || *En op deeze order gebragt door* || A. van DAM. || *En nu op nieuws zeer Nauwkeurig naagezien, met veel || nuttige en noodige aanteekeningen en zommen ver-|| meerderd en verbeeterd, door* || A. S. HABELIUS. || Zynde deze Druk vermeerdert met een

Appendix of Aanhangsel. || .Te AMSTERDAM, || Bij JAN MORTERRE. || Boekverkoper over het Zaandammer Veer. 8°. [uit de Appendix, in Noot 16, blijkt het jaartal 1761].

Voor deze titel komt een fransche met korten titel.

A—K. Blz. 3, 4. VOORREDEN, blz. 5—157 het werk. Dan „BLADWIJZER" 2 blz. ongepagineerd en nog „CATALOGUS van Boeken," 1 blz.

Hierachter volgt dan:

16)* APPENDIX || OF || AANHANGZEL || op het voorgaande Werk. || *Meerendeels getrokken uit de* Arithmetica *van* || *den Geleerde Wiskonstenaar* Marter Wil- || kens, *op nieuw overgezien en van veele* || *fouten gezuiverd.* || Benevens een Inleiding tot de vermaakelyke || Vraagen, en Voorstellen. || DOOR || ARNOLDUS BASTIAAN STRABBE || Leermeester der *Arithmetica* en Wiskunde te || Amsterdam || [ornament] || Te Amsterdam, || By JAN MORTERRE, || Boekverkoper over het Zaandammer Veer. 1761. 8°.

Blz. V—VIII. „VOORREDE || AAN DEN || LEEZER" geteekend „Actum in Amsterdam, toen || de zon 9 graaden in *Leo* was, || in 't Jaar onzes Heeren en || Zaligmakers 12053 de tallet- || ters zyn 0. 1. 2. 3. 4. 5: || A. B. STRABBE.

Blz. IX—XVI. „INLEIDING || TOT DE VERMAAKELIJKE || VRAAGEN EN VOORSTELLEN."

A—G. Blz. 1—106 bevat 306 voorstellen.

Nog 4 blz. ongepagineerd „CATALOGUS."

17)* DE BEGINSELEN || van de || ALGEBRA || of || STELKONST; || Volgens de manier van || RENATUS DES CARTES, || *Verklaart met uytgelezene Voorbeelden; zoo wel in de* || *Meetkonst, als in de Rekenkonst,* || Door || ABRAHAM DE GRAAF; || [Vignette: een brandende lamp met het onderschrift „OMNIBUS"] || t'AMSTERDAM, || By JAN RIEWERTSZ, Boekverkooper, in de Dirk van || Assensteeg, in 't Martelaars Boek, 1672. 4°.

Verso van den titel is wit; dan „Aan den LEZER" 4 blz. ongepagineerd, gedateerd „In Amsterdam, den 1 Februarii, 1672."

A—Pp. Blz. 1—298. „ALGAEBRA [sic] ofte STELKONST" in VI Deelen.

18)* DE GEHEELE || MATHESIS || OF || WISKONST, || Herstelt in zijn natuurlijke gedaante: || Door || ABRAHAM DE GRAAF. || [Vignette: meetkundige figuur, zie blz. 287 van het werk in Noot 28] || t'AMSTERDAM, || Gedruckt voor den Autheur. ANNO M.D.CLXXVI. 4°.

Verso van titel wit; dan „VOORREDEN" gedateerd: Amsterdam den 12 Maart 1676, 10 blz.

A—Ss. Blz. 1—322, het werk in XIII. Boeken.

Daarop „NAREDEN" 2 blz. ongepagineerd.

19)* DE GEHEELE || MATTHESIS || OF || WISKONST, || Herstelt in zijn natuurlijke gedaante: || Door ABRAHAM de GRAAF. || [Vignette, stuurmans-

school als in het boekje van Noot 9] || t'AMSTERDAM, || Gedrukt, by JACOBUS de VEER, || Voor JAN ten HOORN, Boekverkooper over 't Oude Heeren Logement, || in de History Schryver. 1694. 4°.

Verso van titel wit, dan „VOORREDE" 14 blz.

A—Rr. Blz. 1—318, hetzelfde werk in de vorige Noot. Ook hier komt de ongepagineerde „Nareden;" maar daarachter volgt nog „*Beright* aan den BOEKBINDER," waaruit blijkt, dat III Boek heeft 14 Platen; V Boek heeft 14 Platen; VI Boek heeft 5 Platen; VIII Boek heeft 7 Platen; IX Boek heeft 6 en 8 Platen; X Boek heeft 16 Platen; XI Boek heeft 10 Platen; XII Boek heeft 10 Platen; XIII Boek heeft 13 Platen. Bovendien zijn er nog vele figuren in de tekst zelve.

20)* DE KLEENE || SCHATKAMER. || Of een korte beschryving || Van de || KONST der STIERLIEDEN, || Aanwyzende de middelen hoemen door Regelen een || Schip zal Stieren over Zee van de eene || Haven tot de andere. || Door || ABRAHAM DE GRAAF || [vignette: een schip in vollen zeilen] || t'AMSTERDAM, || Voor den AUTHEUR. || By PAULUS MATTHYSZ in de Stoofsteeg, gedrukt. || 1680. hoog 8°.

Verso van titel is wit: dan „VOORREDE" 2 blz. ongepagineerd.

A—G bevat.

Blz. 1—80 het werk zelf.

Biz. 81—105. „BYVOEGSEL || Van de || DRIEHOEKS-REKENING." „Volght de STREEK-TAFEL" 2 blz. ongepagineerd, 1 blz. wit.

20a)* Daarop A—O. bevat. „TABULAE || *Sinuum, Tangentium* || *&Secantium,* || Of van de || Hoekmaten, Raaklijnen || en Snylynen, || waar van dat || *de Radius is* 100000." 45 Blz. „TAFEL || van de || *Vergrotende Breete* || in tiende deelen van minuten." 12 blz.; „Tafel der Kromstreken" 37 blz. „TAFEL || Van sommige der voornaamste Plaatzen" 2 blz. „TAFEL || *van de voornaamste* || STARREN" || 1 blz. „Tafel || *Van de* || Sons Declinatie" 4 blz. „Exame op de Konst der Stierlieden." 2 blz.; alles ongepagineerd.

21)* DE KLEENE || SCHATKAMER, || HET I BOEK || Van de || KONST || Der || STIERLIEDEN. || Door || ABRAHAM DE GRAAF. || *Den derden Druk.* || [Vignette een oorlogschip met volle zeilen] || t'AMSTERDAM, || By JOANNES LOOTS, Boek, Zeekaartverkooper, en || Graatboogmaker in de Nieuwenbrugsteeg, in de || Jonge Lootsman, 1703. || *Den Autheur kent geen voor de zynen, als die met de eygen hand* || *van zyn zoon syn ondertekent.* Aldus || J. de Graaf. hoog 8°.

Verso van den titel is wit, dan „VOORREDEN" van A. DE GRAAF met „NOTA" van zijn zoon ISAAK DE GRAAF, waaruit blijkt waarom de volgorde hier veranderd is; zie Register (1 blz.).

Inleyding, Deelen II, Hoofdstuk III—V, Deel V, I en II Hoofdst. I—III.

A—F. Blz. 1—96. het werk zelf.

G—Q. Blz. 97—250. BYVOEGSEL: dan 32 blz. ongepagineerd bevat de tafels.

Daar achter

21a)* DE || TAFELEN || DER || SINUUM, || TANGENTIUM, || EN || SECANTIUM, || Ofte der || Hoekmaten, Raaklynen en Snylynen, || Als mede de Tafel der vergrootende Breete, || *Achter de selve de* || LOGARITHMI || der Hoekmaten, Raaklynen en Snylynen. || *Als ook de* || LOGARITHMUS NUMERI || van 1 tot 1000. || *Met welke Logarithmische Tafelen alles ligt door* || *toevoeging en aftrekking gerekent word.* || En achter deselve volgt de || Tafel der Kromstreeken, || van Myl tot Myl uytgerekent tot 80 Graden Breete: || *Zynde in desen Druk veel fouten by andere ingesloopen* || *verbetert en gesuyvert.* || t'AMSTERDAM, || By JOANNES LOOTS, Boek-, Zee-kaartverkooper en || Graadboogmaker, in de Nieuwe Brugsteeg, in de || Jonge Lootsman. 1707. hoog 8°.

A—Dd. 232 blz. ongepagineerd.

Daarachter verder

21b)* TAFEL || Van de Voornaamste Zee-plaatsen, || des bekenden || AARDRYKS. || Aanwyzende haar || BREETE en LENGTE || *Beginnende, de Lengte van* El Pico Del Teida, || *op* Ilha Teneriffe. || Op nieuws overgezien, en na de beste Kaarte || verbetert. || [Vignette: hetzelfde schip van N°. 21] || Tot AMSTERDAM || By JOANNES LOOTS, Boek, Zee-kaartverkooper en || Graadboogmaker in de Nieuwenbrug steeg, in de || Jonge Lootsman. Anno [niet ingevuld]. 8°.

A—C. 24 blz. ongepagineerd.

Men ziet het, dat deze 3e Druk veel uitgebreider is dan de eerste van Noot 20.

22)* INSTRUCTIE || Van het || ITALIAANS || BOEKHOUDEN. || Met een || MEMORIAAL || Toegepast op de || NEGOTIE || Particulier, in Commissie, en in Compagnie. || DOOR || ABRAHAM DE GRAAF. || [vignette: het Monogram van A. d. G.] || t'AMSTERDAM, *voor den Autheur.* || By BARENT VAN LIER, op de Egelantiers-graft gedrukt, 1688. folio.

Verso van den titel is wit: dan „AAN DEN LEEZER." 2 Blz. ongepagineerd.

A—O. Blz. 1—108. V Deelen en „APPENDIX || Wegens het || GEBRUYK || Van de || BY-BOEKEN."

23)* Deze derde druk heeft denzelfden titel: maar na de vignette volgt: *Tot HARDERWYK*, Gedrukt by HERMAN RAMPEN; || En sijn mede te bekomen || Tot *AMSTERDAM*, By de Weduwe van GYSBERT DE GROOT, || op de Nieuwen-Dijk, tusschen de twee Haarlemmer-Sluysen, in de Bijbel. 1693. folio

24)* De vijfde druk heeft op den titel vóór de Monogram:

En deze vyfde Druk gecorrigeert van al de voorgaande Fouten||*en met veel nodige Aantekeningen verrijkt.*||Door P. F. C. [dat is P. F. CHICOT].

En daarachter:

t'AMSTERDAM,||Bij de Wed. J. LOOTS en ISAAC ZWIGTERS, Boekverkoopers in de||Nieuwe Brugsteeg, in de Jonge Lootsman 1728.||NB. Den Autheur erkent gene Exemplaren voor de zijne/ dan die bij de Wed. J. Loots||en Isaac Zwigters zijn gedrukt. Folio.

25)* Deze achtste druk is mede hetzelfde werk. Op den titel staat vóór de vignette:

En deze Agtste Druk gecorrigeert, Gezuivert van al de voor-||*gaande Fouten, en met veel nodige Aantekeningen verrijkt.*|| DOOR N. S. [dat is NICOLAAS STRUYCK].

Achter de Monogram:

Te AMSTERDAM,||By ADAM MEYER, Papier en Boekverkooper op de Nieuwe Zyds||Voorburgwal over de Onvolmaakte Tooren. *In de Zwarte Hen.* Folio. Denkelijk 1790. Zie blz. 5.

26)* Het Werk||VAN WIJLEN||ABRAHAM DE GRAAF,||OVER HET||BOEKHOUDEN||GEJOURNALISEERD,||VOLGENDS DE GEWONE ZOOGENOEMDE||Italiaansche of Dubbelde Methode;||door || N. A. VESTIEU||*BOEKHOUDER TE AMSTERDAM,*||*en voor zijne Rekening gedrukt.*||Te AMSTERDAM, bij|| JOHANNES VAN DER HEY,||Boekverkooper op het Water bij den Dam. N°. 7. 4°.

Verso van den titel bevat onderteekening van VESTIEU, gedateerd „*Amsterdam* 12 *Maart* 1806."

„VOORBERIGT" 1 blz. Lijst der Intekenaren. 1 blz.

A—T. Blz. 1—73, blz. 74 wit. Op blz. 75 „GEDRUKT TE AMSTERDAM,||TER BOEKDRUKKERYE VAN *G. VAN TYEN.*"

27)* INSTRUCTION.|Pour tenir les||LIVRES EN PARTIES DOUBLES||Ou à L'ITALIENNE.||Avec trois||MEMORIAUX||Concernant un||NEGOCE||Particulier, en Commission, & en Compagnie.||PAR||ABRAHAM DE GRAAF.|| *Traduit de l'Hollandois, corrigé & augmenté de plusieurs*||*annotations très-importantes.*||PAR||PAUL FRANÇOIS CHICOT,||*Maitre Ecrivain, Arithmeticien & Teneur de Livres.*|| [Vignette: Monogramme de A. de G.]|| A AMSTERDAM,||chez JEAN LOOTS, Marchand Libraire dans la ruë du Pont Neuf,||au Jeune Pilote. 1718. Folio.

In verso van titel een vierregelig vers. Dan „Au Lecteur" van P. F. CHICOT. 2 Blz. ongepagineerd.

A—O. Blz. 1—112, het werk.

28)* INLEYDING||TOT DE WISKUNST;||Of de||BEGINSELEN||Van de

GEOMETRIA || EN || ALGEBRA, || Door || ABRAHAM DE GRAAF. || *De tweede Druk,* || [Vignette: meetkundige figuur, zie blz. 194] || t'AMSTERDAM, || By JOANNES LOOTS, Boekverkooper in de Nieuwe Brugsteeg. || in de Jonge Lootsman. 1706. 4°.

Verso van titel is wit; dan „VOORREDEN" gedateerd „*Rynsburg, den* 1 *January* 1706." 4 Blz. ongepagineerd.

A—Aaa. Blz. 1—375, in II Boeken. Blz. 376 wit.

Blz. 1—106. HET I. BOEK. Van de BEGINSELEN der GEOMETRIA Ofte MEETKUNST.

Blz. 107—375. Het II Boek. Van de BEGINSELEN der ALGEBRA Ofte STELKUNST.

29)* ANALYSIS, || of || STELKUNSTIGE || ONTKNOPING || In de || MEETKUNSTIGE WERKSTUKKEN: || *Vindende van hen* || De Grootste en Kleenste; de Raaklynen op de Krom- || me; de Plaatzen; de Ontbinding der bepaalde || Werkstukken door de Plaatsen; en de || Quadratura van eenige Krom- || linische Grootheden. || *Door* || ABRAHAM DE GRAAF || [Vignette: meetkundige figuur, zie blz. 144] || t'AMSTERDAM, || By JOANNES LOOTS, Boekverkoper in de Nieuwe Brugsteeg, || in de Jonge Lootsman. 1706. 4°.

Verso van titel is wit. Dan „VOORREDEN" gedateerd „*Rynsburg den* 1 *December* 1706." 3 blz. Dan „REGISTER" 3 blz. alles ongepagineerd.

A—Ccc. Blz. 1—391 in IV Boeken: blz. 392 is wit.

Blz. 1—69. HET I BOEK. Van de GROOTSTE en KLEINSTE. Anders genaamt *De Maximis & Minimis.*

Blz. 70—147. HET II BOEK. Van de KROMLINISCHE PLAATZEN.

Blz. 148—311. HET III BOEK. Van de ONTBINDING der BEPAALDE MEETKUNSTIGE WERKSTUKKEN. Door middel van de PLAATZEN.

Blz. 312—391. HET IV BOEK. Van de QUADRATURA, *Of de vergelyking van het Kromme met het Rechte.*

30)* DE || VERVULLING || Van de || GEOMETRIA en ALGEBRA, || Begrepen in het Boek genaamt de || INLEYDING tot de WISKUNST; || Handelende || Van de voornaamste Eygenschappen der KEGELSNEDEN, || en de Ontbinding der Aequatien van DRIE, VIER, || en MEER Dimensien tot in 't oneyndig. || Door || ABRAHAM DE GRAAF. || [Vignette: eene meetkundige figuur, zie blz. 27] || t'AMSTERDAM, || By JOANNES LOOTS, Boekverkooper in de Nieuwe Brugsteeg, || in de Jonge Lootsman. 1708. 4°.

Verso van den titel is wit; dan „VOORREDEN" gedateerd „*Amsterdam den* 21 *October* 1707," 2 blz. ongepagineerd.

A—S. Blz. 1—144, in II Boeken.

Blz. 1—35. Het I Boek. Van de KEGELSNEDEN.

Blz. 36—144. HET II BOEK. Van de ALGEBRA, *Of De Oplossing van de Aequatien van drie, van vier, en van meer Dimensien tot in 't oneyndig.*

31)* ABRAHAM DE GRAAFS || KLEINE SCHETS || Van het || ITALIAANS

of || KOOPMANS BOEKHOUDEN || Bestaande in een kort || MEMORIAAL || JOURNAAL || EN || GROOTBOEK, || ALS MEDE || Een beknopte Onderrechting hoedanig men een *Boek moet* || *sluyten*; en *de Balance daarop formeren*; met een || Alphabeth achter aan gevoegt. || [Vignette: het Monogram van A. de G.] t'AMSTERDAM || Bij de Wed. J. LOOTS en ISAAK ZWIGTERS, Boekverkoopers in de || Nieuwe Brugsteeg, in de Jonge Lootsman, 1728. || NB. Den Autheur erkent geene Exemplaren voor de zijne, dan die bij de Wed. J. Loots || en Isaac Zwigters zijn gedrukt.

A. 16 blz. gepagineerd, titel, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4; nog 3 blz. ongepagineerd.

32)* FORMULAIRE || D'un || JOURNAL || ET || GRAND LIVRE || EN || PARTIES DOUBLES || Ou à L'ITALIENNE || Avec l'explication pour en faire la Balance suivant le || MEMORIAL, || *Mis à la tête de cette Ouvrage pour Modelle.* || PAR || ABRAHAM DE GRAAF. || *Traduit & corrigé* || PAR || PAUL FRANÇOIS CHICOT, || *Maitre Ecrivain, Arithmeticien et Teneur de Livres.* || [Vignette: Monogramme van A. de G.] || A AMSTERDAM || chez JEAN LOOTS, Marchand Libraire dans la ruë du Pont Neuf, || au Jeune Pilote. 1718. Folio.

A. 16 Blz. ongepagineerd.

33)* De vier Boecken van 't || VERGULDE LICHT || DER || ZEE-VAERT, || OFTE || KONST der STUERLIEDEN; || *Bestaende in 't gheen een* Stuerman *hoogh-noodigh* || *behoorde te weten*: || Ten eersten, onderwijsende hoe men 't selve sal doen op ver- || scheyde manieren, soo wel door de Logarithmus, als door de Tafelen || Synus, Tangens ende Secans, ofte Hoeckmaet, Raeck-lijn, en Sny-lijn: als mede || door de Streeck-Tafel: als oock een korte onderrichtinge van 't maken der Tafel Synus; en || voorts sulcken volkomen klaren en konstigen Instructie, als noyt voor desen de Stuerlieden in || eenige Zee-Boecken is voor-geschreven, zijnde doorgaens verlicht met verscheijden Tatelen, || ende nieuwe inventien en bewerckinge. Dit alles beschreven door *Claes Hendricksz. Giettermaker* || *van Medemblick*, Lief hebber der selver Konsten, eertijdts ter Zee gevaren hebbende, ende nu || School houdende tot *Amsterdam* op de Brouwersgracht; leerende een yegelyck Schrijven, || Cijfferen, Boeckhouden, Geometria, Landen, Bergen, Bosschen, Rivieren ende Toorens || meeten; leerende oock de ses eerste Boecken Euclidis, en op yeder werkelycke Propositie een || Questie: midtsgaders de loffelycke ende vermakelycke Konst der Stuerlieden op verscheyde || manieren. || [Vignette: een schip in een cirkel, met randschrift „CLAES .HENDRICKSEN. GIETERMAKER .VAN. MEDENBLICK. ANNO. 1660."] || t'AMSTERDAM, Anno 1660. || Bij Hendrick Doncker, Boeckverkooper en Graed-Boogh-maker, in de Nieuwe-brug-steegh, || in 't Stuermans Gereetschap; ende by den Autheur, op de Brouwers-gracht, in de || Konst-schoole, die alle dese Boecken met sijn eygen handt onder-geteekent || heeft, als volght. 4°.

Voor dezen titel, staat er een, geheel gegraveerd. Een goed portret van den schrijver in ovalen lijst, waarlangs „CLAES HEYNDERICKS GIETERMAKER, GEBOREN TOT MEDEMBLICK. Ao. 1621." Daaronder eene wiskundige school, en daarboven het begin van het opschrift „Vergulden Licht der Zee-vaert || ofte || KONST der STUUR-LIEDEN, || *Synde een Volkomen en Klaere Onderwijsinge der* NAVIGATIE || Beschreven || door," waarop dan het randschrift van het portret volgt. Ter weerszijden van het portret allerlei wis- en zeevaartkundige instrumenten, gedeeltelijk in gebruik van twee vrouwen. Onder aan „t' Amsterdam Gedruckt. || Bij Hendrick Doncker, *Inde Nieuwbrugh steeg in 't Stuurmans gereedschap.*"

In verso van den titel „een SEE-COMPAS," dan Opdracht. „Aen de Edele, Erentfeste, seer voorsieni-||ge Heeren Bewint-hebberen van de Ge-||octroyeerde Oost-Indische Compagnie, ter Kamer || van AMSTERDAM." 22 in getal, 6 blz.: Dan „AUTHEUR || TOT DEN || LEZER" gedateerd „Actum in Amsterdam, de Sonne zijnde in Scorpius, Anno 1660" 5 blz. alle zonder pagineering. In verso de titel.

Het Eerste BOECK || VAN 'T || Vergulde Licht der ZEE-VAERT, || Ofte de Konst der || STUERLIEDEN: || *Handelende van eenige stucken der selver.* || Eerstelyck, bestaende hoe men de Mane-Circkel, Gulden Getal, en d'Epacte, || Nieuwe, volle, en ouderdom der Mane vinden sal: Ten tweeden, hoe men de Sonne- || Circkel, Sondaghs-Letter, Paesch-Feest na d'Oude en Nieuwe-Stijl vinden sal: Ten || derden, een kort begryp van de Periodus Juliana, en haren oorspronghs; Ten vierden, || van 't vinden der Water-getijden, als oock van de Massonnen en Passaed-Winden op || verscheyde plaetsen; Ten vijfden, hoe men de Son en Maens Graed sal vinden op || verscheyde manieren, als oock de Maens op en onder-gangh, en hoe langh sy dage- || lijcks schijnt, als mede hoe men de uure des nachts aen de Sterren sal bekomen: Ten || sesten, verklaringe van eenige Woorden die in de konst van de Zee-vaert ghebruyckt || worden, ende die men nootsakelijck moet verstaen: Ten sevende, hoe men een Astro- || labium sal proeven en gebruycken, als mede hoe men een Graed-Boogh sal maken en || gebruycken, met noch meer andere curieusheden: Ten achtste, hoe men de Sons de- || clinatie sal vinden, en door de selve de Sons Graed, als oock haer Evenaers lenghte: || Ten negende, hoe men door gemeeten hooghte aen Son en Sterren de Polus hooghte || sal bekomen, als mede wanneer de Sterren op haer hooghste en leegste zijn be-Noor- || den 't Zenith, en hoe men de selve aen den Hemel sal leeren kennen: Ten thiende, || hoe men de miswijsinge der Compassen door twee en een peylinge sal vinden, als mede || hoe men de selve sal vergoeden: Ten elfde, hoe men de Sons waren op en onder-gang || sal vinden, als oock een generale beschryvinghe over de kracht ende oorsprongh der || Magneet ofte Zeyl-steen, als mede de uure des tijts van de Sons op en onder-gangh; || midtsgaders noch meer andere dingen, die pertinent hier beschreven staen, als oock in || ordre vervolgende voorge-

stelt. || Beschreven door CLAES HENDRICKSZ. GIETTERMAKER [sic] || [vignette: meetkundige figuur voor de miswijzing van het kompas]. Verder als boven.

A—V. Blz. 1—160.

Het tweede Boeck ... Tracteerende, || Eerstelijck, hoemen den Radix quadraets-wortel sal vinden, als oock een kort begrijp || der Hoeck-maets-tafel tot voorbereydinge der platte drie-hoecks reeckeninghe: Ten || tweeden, te vinden een Boogh van een bekende Synus Tangens, en Secans, als mede || den Boogh ofte den Hoeck van een bekende Synus Pijl, ende de Secans der Logarith- || mus; Ten derden, van 't uyt-rekenen der recht-hoeckige en scherp en plomphoecki- || ge platte drie-hoecken: Ten vierden, hoemen 't Compas sal leeren, met haer verklaringhe: Ten || vijfden, hoe veel mijlen men op yder streeck moet seylen, eer men een Graedt der breette ghe- || wonnen heeft, als mede hoe veelmen van de Meridiaen geweecken ofte in langhte verandert is, || met noch eenige Tafelen, daer op passende: Ten sesten, hoe men Koers veerheyt, langhte, en bree- || te sal vinden op verscheyden manieren na de gelijck-gradighe Pascaert, als oock koppel-koersen || en stroom-kavelingh, midtsgaders van 't onvermoghen der ghelijck gradighe Pascaerten, en hoe || men de selve sal maecken en ghebruycken, met noch eenighe andere nootwendigheden: Ten se- || venden, van 't maecken der Tafelen Synus, alsoock de Tafel der vergrootende breete: Ten acht- || sten, van 't gebruyck der wassende grade Pascaerten, midtsgaders de krom-streeks reeckeninge, || en waer in de selve bestaet, als mede van 't uyt-reeckenen van Oost, West, Zuyd en Noord: Ten || negenden, hoe men vinden sal koers veerheyt, langte en breete, na de wassende Grade-kaert || op verscheyde manieren: Ten thienden, van 't uyt-reeckenen der op-merckens, als oock een || verklaringhe om Oost en West te varen: Ten elfden, om goede gissinghe te leeren maecken, als || mede hoe men daghelijcks sijn Iournael ofte dagh Tafel aengaende de Zee-vaert, houden en aen- || teyckenen sal: Ten twaelfden, by ongheval alle Boecken, en Instrumenten verlooren hebbende, || noch sonder het selve soude konnen voort komen; Ten darthiende, inhoudende dartigh exem- || pelen met alle haer vraghen beantwoordt, als oock tot besluyt van dit tweede Boeck, volgende || eenighe Vraghen ende Antwoorden, tusschen een Schipper ende Stuyr-man, aengaende som- || mighe Koersen, gronden, diepten en ondiepten. || Beschreven door ... [Vignette: meetkundige figuur, zie blz. 166]. Verder als boven.

In verso van dezen titel twee gedichten.

X—Pp. Blz. 163—300.

Het Derde BOECK ... Tracteerende || Eerstelijck, van de ontbindinge der Sperische [sic] Triangelen ofte Kloot- || sche Drie-hoecken, 't welck is het fondament daer de gantsche Astronomia op || ghegront is, want sonder 't selfde kander niet tot sijn volkomen effect gebracht || worden, waer af ick voor eerst gestelt hebbe eenige bepalingen: Ten tweeden, ||

hoe men door rekenen de recht en scheef-hoeckige klootsche driehoecken sal bekomen:||Ten derden, door wat middel gesien wort den damp-kloot, en hoe die een oorsaeck is des||dageraets, en hoe men de selve door rekenen sal vinden: Ten vierden, van 't rekenen der||Sons declinatie: Ten vijfden, van de Sterren, te berekenen hare assentie recta ende de-||clinatie: Ten sesten, hoe men door de Sperische rekeningh sal vinden de uure des tijdts,||mitsgaders verscheydon andere Astronomische voor-stellinge, met haer solutien:||*Beschreven* enz. [Vignette: meetkundige figuur, zie blz. 347]. Verder als boven.

In verso van dezen titel, eene aanhaling uit APOLLONIUS.

Pp—Xx. Blz. 303—350.

Het vierde BOECK||OFTE||AENHANGH:||Bestaende:||In hondert en vier-en-veertigh Questien ofte Voor-stellinge van ver-||scheyde soorten ofte materie, aengaende d'Navigatie, *Geometria, Landt-||meeten, Toorens meeten, Arithmetica,* als *Astronomia,* waer af sommige met haer||Figueren zijn voor-ghestelt, ende eenige door haer bewerckinge bewesen,||maer meestendeels ghestelt tot oeffeninge: Hier na volght nog een Toe-||voeghsel, bestaende in desen: Eerstelijck, hoe men een Horizontale ende||Victicale [sic] Sonne-Wijser sal maecken: Ten tweeden, om door de Sons hoogte||te nemen door een Perpendiculaer, en haer schaduwe, om daer door als dan||de Pools hooghte te vinden: Ten derden, als bekent is de Pools hooghte||ende Middaghs hooghte van de Son, ende de langhte van de Stock ofte Per-||pendiculaer, om daer door te vinden de langhte der schaduwe van de Stock||op der Aerde, met noch een Tafel en haer Verklaringe.||Beschreven door...||[Vignette: meetkundige figuur, zie blz. 375] Verder als boven.

Yy—Ccc. Blz. 352—392. Onderaan staat „t'AMSTERDAM.||**Gedruckt by** JAN BOUMAN, **woont op 't Water/ in de selve ouder de Boomen.**||ANNO 1660."

Daarop volgen de Tafels zonder titel, A—E, blz. 1—45 en 91 blz. ongepagineerd.

De volgende drukken hebben veel eenvoudiger titel.

34)* 'T VERGULDE LICHT||DER||ZEEVAERT||OFTE||KONST der STUURLUYDEN.||*Zynde een volkoomen en klaare onderwysinge der Navigatie, bestaande||in 't geen een Stuurman hoognoodig behoorde te weten.*|| Vernieuwt en verbetert door||CLAES HENDRICKSZ. GIETERMAKER,||in zijn leven Examinateur van de Geoctroyeerde Oost-||en West-Indische Compagnie.||**Den tweeden Druck:||Van veel in-geslopen fauten gesuyvert en misslagen verbetert:** Item 't **vierde||(Boek ofte) Deel vermeerdert met de ontbinding van verscheiden||konstige t'saam-gevoegde Questien.**||DOOR||FRANS van der HUIPS, bekleedende des zelfs plaats.||[Vignette: een schip met volle zeilen]||T'AMSTERDAM,||**By** HENDRIK DONKKER, **Boekverkooper en Graadboogmaker/ in de Nieuwe-||brug-steeg/ in 't Stuurmans Gereetschap/ het derde huys van de Brug/ in de straat.** 1671.||Met Privilegie voor vijftien jaren. 4°.

Hiervoor dezelfde gegraveerde titel als in Noot 33.

In verso van den titel: EXTRACT uyt de PRIVILEGIE, gedateerd 17 July 1668.

Dan opdracht aan „GILLIS VALKENIER," || „Beider Rechten Doctor || *Oudt-Borgermeester en Raadt &c en Bewindthebber der* || *geoctroyeerde Oost-Indische Compagnie ter Kamer,* || AMSTERDAM" van Fr. van der HUIPS, gedateerd „Amsterdam den 20sten Juny 1671" 2 blz. ongepagineerd; dan het SEE-COMPAS.

A—O. Blz. 1—112. Eerste Boek
Aa—Tt. Blz. 1—152. Tweede Boek } zonder afzonderlijke titels.
Aaa—Ppp. Blz. 1—120. Derde Boek

Boven aan de bladzijden staat telkens gedrukt „SCHAT-KAMER || Ofte Konst der Stuerlieden."

Daarop

34a)* NIEUWE || KONSTIGE || TAFELEN, || Der Sinuum, Tangentium en Secantium; || OFTE || *Hoeckmaten, Raecklijnen en Snylijnen, met de Logarithmus,* || *der Hoeckmaten en Raecklijnen; als mede de Logarithmus* || *Numeris, passende op de getallen van* 1. *tot* 1000. || Waer door alles alleenlijck met Additio en Substractio || lichtelijck kan uytgewerckt worden. || Met noch een Tafel der vergrootende breette; als mede een Tafel der || Kromstreken; midtsgaders een Tafel des Tijdts/ uyt-bereekent || op 53 graden Polus hooghte. Aenwijsende de uure van || den dagh/ als de Son op eenige streeck van || 't Compas gepeylt wordt. || t'AMSTERDAM als boven Noot 34.

A—R. Blz. 1—45 en 92 blz. ongepagineerd.

35)* Dezelfde titel als Noot 34, behalve dat achter „Compagnie" volgt: Voor de tweede maal by my Gedrukt. || *Het ierde Boeck vermeerdert met de Ontbinding van verscheyde konstige t'saam-* || *gevoegde Questien, door* FRANS van der HUIPS. || Als mede de Exame der Stuurlieden, en d'Instructien van de eigenschap der Winden in 't vaarwa- || ter tusschen Nederlant en Java, en van de Naalden, Parallel leggende onder de Roos van 't Com || pas, de Declinatie Tafelen verlengt tot 't Jaar 1735. En achter aan de *Logarithmus Tafelen,* || van *Sinus, Tangens* en *Secans* &c. Welke alle Curieus in Kopere Platen zijn || gesneden, en de Streek-Tafelen tot op 80 grade uytgereekent. || Van de voorgaande Drukfauten volkomentlijk gezuyvert en gecorrigeert. || Door JAN SIKKENA, *Leermeester der Wiskonst alhier.* || [vignette, het schip met volle zeilen] || Worde gedrukt en verkogt, t'AMSTERDAM, || Bij JOANNES van KEULEN, Boek en Zeekaartverkooper/ en Graetboogmaker/ || aan de Oost-zyde van de Nieuwe Brug/ in de Gekroonde Lootsman/ 1707. || Met Previlegie voor 15 Jaaren. 4°.

Hiervoor de gegraveerde titel als boven, met in verso de „PRIVILEGIE" gedateerd „14 Maard, 1697".

36)* Dezelfde titel: alleen met de verandering „Voor de vyfdemaal by my Gedrukt"; en het jaartal 1725: Voorts boven de vignette nog „*En dese laatste druk door* Cornelis Pietersz. Stuurman, *meede Leermeester der Wiskonst alhier.*"

37)* Dezelfde titel: alleen met de verandering „Voor de Achstemaal by my Gedrukt." en zonder jaartal: maar dit staat bij de Privilegie „7 Maart 1742." Verder valt hier weg „door JAN SIKKENA; enz."

38)* Dezelfde titel als in Noot 37, alleen met „Voor de Negende maal by ons Gedrukt." De Privilegie is gedateerd „13 Januarij 1774."

Het portret op den gegraveerden titel, dat allengs versleten was, is hier vernieuwd, doch weinig gelijkend.

39)* 't VERGULDE LICHT || DER || ZEEVAART, || OFTE || KONST der STUURLIEDEN. || Zijnde een volkomen en klare Onderwijsinge der Navigatie/ bestaande in || 't geen een Stuurman hoognodig behoorde te weten. || In 't licht gebracht || Door CLAAS HENDRIKSZ. GIETERMAKER, (in sijn leven) || Examinateur van de Geoctroyeerde Oost- en West-Indische Compagnie. || Voor de eerste maal by my Gedrukt. || *Het vierde Boek vermeerdert met de Ontbinding van verscheyde konstige t' saam- || gevoegde Questien, door* FRANS vander HUIPS: || Als mede de Exame der Stuurlieden/ en d'Instructien van de eigenschap || der Winden in 't Vaar-water tusschen Nederlant en Java/ en van de Naalden/ Parallel || leggende onder de Roos van 't Compas/ de Declinatie Tafelen verlengt tot 't Jaar || 1727. En achter aan de Logarithmus Tafelen, van Sinus, en Secans, &c. || Van de voorgaande druk-fauten volkomentlijck geeuyvert en gecorrigeert. || [vignette: het schip met volle zeilen] || Tot MIDDELBURG, || Gedrukt/ bij Aaron van Poulle, de Jonge, op de Noort-zijde van den || Dam in den Stuurman, 1705. Met Privilegie, voor 15. Jaren. 4°.

Voor dezen komt eerst een gegraveerden titel, gelijk aan de echte, met dit onderscheid, dat het portret niet naar links maar naar rechts gekeerd is, overigens vrij goed gelijkend; en dat de „School" daaronder eene andere is.

In verso van den titel de privilegie van „de Staten van den Lande ende Graaffelijkheyd van Zeeland," gedateerd „Middelburg, den 15 Maart 1703," zich grondende daarop „dat het Gemelde laatst herdrukte Boek is doorzaayt || van Fouten en Mis-slagen, soo dat het selve is streckende tot groot Achterdeel van de hoog- || noodige Konst."

Dan „Aan de Koopers van dit Boek" 1 blz., verso wit.

„DEN DRUKKER || Aan den || LEESER," 2 blz. Alles ongepagineerd.

Op blz. 119 van het laatste boek, staat binnen een lauwerkrans „EYNDE || Van den Nieuwen || laatsten verbeterde || C. H. GIETERMAKER."

En hierachter

39a)* DE || TAEFELEN || DER || Sinuum, Tangentium en Secantium, || Ofte

der || Hoekmaaten, Raecklynen en Snylynen, || *Als mede de* || Logarithmi der Hoekmaaten, Raecklynen en Snylynen, || En achter de selve de Logarithmus Numeri van 1 tot 10000. || *Met welcke Logarithmische Taaffelen dat alles licht door toevoegingh* || *en aftrekkingh gereeckent wort.* || En achter de selve volcht de || Taeffel der vergrootende Breedte, || Als oock de || Taeffel der Krom-streecken. || *Synde deze Tafels met de grootste omzigtigheyt nagezien, en van over de* 850 *fouten gezuyverd, die in de* || *laaste kopere Plaat-Tafels zyn ingesloopen, hier mogen de gebruykers sig op verlaten en vast gaan.* || [Vignette: het schip met volle zeilen] || Tot MIDDELBURG, || By ARON VAN POELLE, Boek- en Zeekaartverkooper. 1702. 4°.

In verso van den titel 2 verzen.

A—Q. Blz. 3—72, 56 blz. ongepagineerd.

40)* WEDERLEGGINGE || *Over 't geen* || PIETER KARSSEBOOM || AENWYST. || *Aengaende* || Van eenige op-geraepte Mis-stellingen || in mijn vier Boecken, genaemt 't Vergulde || Licht der Zee-vaert, ofte Konst der Stuer-lieden. || *Beschreven door* || CLAES HENDRICKSZ. GIETERMAKER. || [Vignette: hetzelfde als bij Noot 33] || t'AMSTERDAM. || By *Claes Hendricksz. Gietermaker*, in de Nieuwe-straat, || in de Konst-Schoole, Anno 1661. 4°.

A—C. Blz. 1—20.

41)* ARITHMETICA || OFTE || REKEN-KONST. || *Bestaende* || In Negenthien Deelen; Waer in begrepen zijn veele || Exempelen, ende door verscheyden Regulen gesolveert: || Als mede diversche vermaeckelijcke Geometrische Questien. || By een gestelt || DOOR || [Vignette: goed portret in ovalen lijst met randschrift „CLAES HEYNDERICKS GIETERMAKER. GEBOREN TOT MEDENBLICK. ANNO 1621"] || *Tot* AMSTERDAM, || Gedruckt voor den Autheur/ ANNO 1661." 8°.

Verso van titel is wit. Dan „VOOR-REDEN, || *Inhoudende* || wat Arithmetica zy. || De nuttigheyt die daer uyt ontstaet. || ENDE || d'Autheur der selver" 7 blz.; dan „*d'Autheur* || tot den || LEERLINGH." Gedateerd „*Actum in Amsterdam. De Sonne zynde in 't begin* || *van Arius. Anno* 1661," 6 blz. Nog 1 blz. met drie gedichten.

A—O. Blz. 1—226. Aan het slot van blz. 226 staat: t'AMSTERDAM, || Ter Druckery van *Gerrit Harmansz* en *Israel de Paul*, in de Oude Nieuwstraet. ANNO 1661.

Dan 1 blz. „*Druck Fouten*" en 1 blz. wit.

42)* TWEEDE DEEL || VAN DE || ARITHMETICA || OFTE || REKENKONST. || *Bestaende* || In drie hondert vijftigh konstige en ver- || makelijke Quaestien, die door Plus en Minus, || als oock door de Regulae Falsii; Midtsgaders || door Cos, konnen gesolveert worden. || Den tweeden Druck. || *Vermeerdert met de ontbindinge Arithme-* || *ticae van yder Questie bysonder. En een Aenhangh* || *van vijftigh andere konstigere ende vermake-*

lyckere || *Quaestien, elcx met haer Ontbindinge Arithmeticae,* || *soodanigh ons wetens noyt in 't licht is gegeven.* || DOOR || CLAES HENDRICKSZ. GIETERMAKER. || t'AMSTERDAM, 1663. || Gedruckt voor den Autheur *Claes Hendricksz. Gietermaker,* || School houdende op de Haerlemmer-dyck, in 't huys van || *Lastman* Zalr. aldaer de Konstschool uythanght, en de Stuur- || man op de Stock staet: Presenteert een yegelyck te onderwij- || sen de Fondamenten der *Navigatie, Astronomia, Theoria* || *Geometria, Roeykonst, Arithmetica, Italiaens* en *Scheeps-* || *Boeckhouden,* &c. 8°.

Verso van titel is wit. Dan „Aen den Konst-lievenden || LESER" gedateerd „Laus Deo, in Amsterdam, de Maen zynde in het || begin van Capricornus. Anno 1663." 4 blz. ongepagineerd.

A—E. Blz. 1—80. De vraagstukken: blz. 80 eindigt „Niet zonder moeyte. || *Anno* 1662."

A—I. Blz. 1—136: de „ONTBINDINGE der 350 QUAESTIEN."

45)* ALMANACH, || Na den Nieuwen-stijl, || *Van Negen-en-dartigh eenvolgende Jaren,* || Dat is: || *Van het Jaer* 1662. *tot* 1700. *incluys,* || *Gestelt op den Meridiaen deser Stadt Amsterdam.* || Als mede een vervolg na desen Almanach, be- || staende voor eerst in eenige Tafelen, en daer na vijf-en twintigh Exem- || pelen der Klootsche drie-hoecken: Midtsgaders tot besluyt, hondert en || veertigh vermaeckelijcke Astronomische Questien, daer van de vragen || meest al duydelijck beantwoort zijn; soo dat het selvige sal dienen, voor || alle Schippers, Stuer-lieden, ende andere curieuse Persoonen, die in || verre gelegen Landen reysen, en aldaer eenige Jaren blijven ofte woo- || nen. Derhalven ook vermakelijk voor mijn Discipelen en Schoolieren. || *By een gestelt door* || [vignette: portret met randschrift als in Noot 33. Maar het portret is hier een ander: G houdt een passer en maatstok in de hand] || Gedruckt tot Amsterdam, Anno 1662. Voor *Claes Hendricksz. Gietermaker,* Liefhebber deser || Konsten, School houdende in 't huys van Lastman Zalig: in de Haerlemmer-straet, aldaer de Konst-schole uythangt, || en de Stuerman op de stock staet, hebbende alle dese Exempelaren met sijn handt ondertekent als volght: 4°.

In verso van den titel een gravure, voorstellende de Faam boven een halven aardbol, waarop „*C. S. Vichem fecit*": en waaronder het vers

„Ick die dees *Almanach,* hier stel voor yder een,
Tot nut van 't Varendt-volck, ten beste van 't gemeen.
En ken geen voor de Mijn, al voeren s' mijnen Naem,
Dan daer op staet gedruckt *mijn Trony* en dees *Faem.*"

Voor-reden van den || AUTHEUR || *tot den gunstigen Lezer,* gedateerd „Laus Deo, in Amsterdam, de Maan zijnde in 't begin van || Aquarius, Anno 1662." 2 blz.

KLINCK-DICHT van *Frederick Verloo,* 2 blz. en van J. G. SAEGHMAN, 1 blz. met verklaring; alles ongepagineerd.

A—I. Blz. 1—68; ieder jaar beslaat eene bladzijde. Aan het einde „t'AMSTERDAM, || Gedruckt by GILLIS JOOSTEN SAEGHMAN, || Boeck- || verkooper in de Nieuwe-straet, Anno 1662."

44)* De drie Boecken van || KLAES HENDRICKSZ. GIETERMAKERS || Onderwijs der Navigatie, || ofte Konst der Stuurlieden, || BESTAENDE || In een volkomen, kort en grondigh Onderwys der Zee- || vaert, als oyt voor desen in eenige Zee-boecken is || voorgeschreven: 't welck alle Schippers en Stuurlie- || den volkomentlijck behooren te weten, insonderheyt || de gene, die haer begeeren te begeven in dienst van de || Ed. Ed. Heeren Bewinthebberen der geoctroyeerde || Oost- ofte West-Indische Compagnie; versien met al- || lerhande Tafelen; mitsgaders de volkomentheyt der || Spherische rekeninge: in 't kort, alles wat een Stuer- || man van nooden magh hebben, is duydelijck voorge- || stelt en beantwoort. || By een gestelt door *Klaes Hendricksz. Gietermaker*, geadmitteert || Landtmeter, en Examinateur der Stuurlieden in dienst van de || Ed. Ed. Heeren Bewinthebberen der geoctroyeerde Oost- en || West-Indische Compagnie, eertijdts ter zee gevaren hebben- || de, en nu tegenwoordigh School houdende op de Haerlem- || merdijck, bij d'Eenhooren Sluys in de Konst-School &c. || Ornament || t'AMSTERDAM, in 't jaer 1666, || Gedruckt voor den Autheur, en *Pieter Goos* in compagnie: || hy kent geen Exemplaren voor de sijne, als die met sijn eygen handt ondertekent sijn, als volght: 8°.

In verso van den titel een achtregelig gedicht: Dan „Aen de Edele, Erentfeste, seer voorsienige || Heeren || DE HEEREN, || BEWINTHEBBEREN || der geoctroyeerde Oost- en West-In- || dische Compagnie ter Kameren || VAN AMSTERDAM," 2 blz. en „AEN DEN KONST-LIEVENDE || LESER" gedateerd „Actum in Amsterdam, de Son zijnde 10 graden || in Virgo, in 't jaer 1666" 2 blz.; alles ongepagineerd.

A—O. Blz. 1—224. Eerste Boeck.

Aa—Ii. Blz. 1—144. Tweede Boeck.

Aaa—Hhh. Blz. 1—120. Derde Boeck.

Blz. 120 aan het einde „Niet zonder moeyte."

45)* AENHANG || OP || KLAES HENDR. GIETERMAKERS. || Onderwijs der Navigatie, || Ofte Konst der Stuurlieden, || BESTAENDE || In eenige Tafelen der Sterren, aenwijsende, hoe men || alle dagen, licht en sonder moeyte, kan sien aen den || Hemel, hoe laet dat het in der nacht is, als de Sterren || haer vertoonen, op alle Maenden des Iaers, en dat van || 5 tot 5 dagen, tot groot gerief en vermaeck voor alle || Schippers, Stuurlieden, en Matroosen: als oock ande- || re die by nacht reysen, ten aensien voor klocke-stellers, || en ambachts-lieden, die haer werck 's nachts op een || seker ure moet beginnen, en aen tijdt verbonden sijn: || Item nachtwakers, schildwachten, als oock de gene || die op santernelle staen, doch sij moeten eerst de Ster- || ren aen den Hemel kennen, 't welck heel

licht te lee-||ren is. || [Ornament] || *Gedruckt tot Amsterdam, in 't jaer* 1666, || Voor KLAES HENDRICKSZ. GIETERMAKER, || Geadmitteert Landtmeter, en Examinateur der Stuurlieden, || in dienst van de Oost- en West-Indische Compagnie, School- || houdende op de Haerlemmerdijck bij de Eenhooren-Sluys, &c. 8°.

a—b, blz. 1—32, waarvan blz. 29—32 „STARRELIEDT || Om daer by zonder eenig werktuig de || uuren des nachts te vinden. || TOON: *O Hailig zalig Bethlehem*" door „JAN ZOET Amsterdammer."

46) GULDEN SCHALE || VAN DER || GROOTEN ZEEVAERT, || Waer op geleerdt wort Breete, Langte, || Cours en Verheyt te passen, sonder eenigh || Figuer te slaen. || *Te leeren in den tijdt van vier dagen/ noyt voor desen* || *aldus gepractiseert geweest/ maer nu eerst/ door* || *Godts zegen/ gevonden* || DOOR || CHRISTIAEN MARTINI ANHALTIN, || In de Konst-Schoole van Geometriae, Fortification, || Zeevaert, en Boeckhouden, op de Zeedijck || tot AMSTERDAM. || [Ornament] || t'AMSTERDAM. || *Ter Druckerye van* Cornelis de Bruyn, *Boeck-drucker* || *voor aen in de* || *Nieuwe Lely-straet/ in Sonsbeeck.* ANNO 1658. 4°.

In verso van den titel „Aen den Berisper en Laetdunckenden." Dan „Aen mijne Scholieren," 2 blz.; „Voorbereydinge tot het Werck," 1 blz. Dan „Onderwysinge der Linien || OP DE || GULDEN SCHALE || Van de Groote Zeevaert," 1 blz. Voorstellen I—IX, 10 blz. Te zamen 16 blz. ongepagineerd. Aan het einde staat „1. Paral, 29. Heere, het is alles van U, en wy geven 't U || uyt uwe handt."

47)* SLOT en SLEUTEL || *VAN DE* || NAVIGATION, || *OFTE* || GROOTE ZEEVAERT. || Ontsluytende door verscheyden Grondt-regelen, al || 't gene een Stuerman, en alle die ter Zee varen, behooren te weten, || en hoe de Konst hoe langhs hoe meer mach verbetert worden. || *ENDE* || *Tot dien eynde zijn hier by gestelt de Tafelen van de* Hoeckmaten, Raeck- || lijnen *en* Snylijnen, *met de* Logarithmi Hoeckmaet *en* Raecklijn, || Pleynschael *en* Ruytkaert, *oock grondige instructie en onderwysinge* || *der* Vlacke *en* Klootsche Driehoecks-reeckeninge, *in diversche* || *Voorstellingen, met een uytschrijvinge aen den Konst-begeerigen* || *Leser ende Liefhebber, in de Voor-reden van* Oost *en* West. || DOOR || CHRISTIANUS MARTINI ANHALTIN, School-houdende in de || Konst van *Cijfferen, Geometrie, Lantmeeten, Hooghten, Diepten* en *Verheden, Italiaens* || en *Scheeps-Boeckhouden, Fortification, Architect, Astronomie, Bos-schieterye* || *Roy-konst* en *Navigation*, ofte *Groote Zeevaert*, in 't korte als ye- || mandt doen kan te onderwijsen en leeren. || Tot Amsterdam, op de Zeedijck/ daer de Konst-School uythanght/ || en de Stuerman op de Stock staet. || [Ornament] || t'AMSTERDAM, || By HENDRICK DONCKER. Boeckverkooper en Graedboogh-maker/ in de || Nieuwebrughs-steeg/ in 't Stuermans gereetschap/ en by den AUTHEUR. || CHRISTIANUS MARTINI ANHALTIN, die alle dese Boecken, met sijn eygen handt onder- || teeckent heeft/ als volght. 4°.

Verso van den titelis wit. Dan „*Dedicatie*" aen de „*Edele, Erentfeste, Groot-Achtbare,* || *Wyse, en Voorsienige Heeren;* || *Myn* Heeren ||... Regeerende Burgermeesteren... Raedts-Heeren... Secretarien... V. Secretarius I. U. D.... Stadts Rentemeester... Heeren der Reeckenkamer... Secretarien." 3 blz. „Aen den Konst-beminden || Leser", 2 blz. en „*Aengaende de Oost en* || *West Vindinge,*" 2 blz. alles ongepagineerd.

A—R. Blz. 1—133 in III Boecken; verder 3 ongepagineerde bladzijden: de 1e bevat 2 figuren; de tweede de „Errata" en onder aan „t'Amsterdam, || Ter Druckerije van Harman Aeltsz. in de Nieuwebrugh-steegh/ || in 't Oude Muyse-nest. Anno 1659."; de derde bevat een woord en een vraagstuk „Aen den Konst-lievenden", en eindigt met het vers:

„Niet uyt trots, ofte hoogheyt en eer
Want ick een scholier ben in 't A B:
Maer tot myns Naest'n onderwijs en leer;
O Godt, zyt ghy myn Leermeester me'e."

48)* Oprechte en Waerachte || Ruytkaert || Van de Groote Zeevaert. || Met der selver genoeghsame onderwjis [sic] en gebruyck || tot de geheele *Navigation* ofte *Groote Zeevaert,*" welck is een recht || bewijs en verlichtinghe der *Pleynschael;* als Schieten der Son en || Sterren, Ty-reeckeninghe, breedte en langhte, voor mijne || Scholieren, en die den rechten grondt der Zeevaert || geerne met haeste leeren willen. || *Duydelichen voorgestelt en gepractiseert* || Door || Christian Martini Anhaltin, School- || houdende in 't leeren van Cijfferen, Italiaens, en Scheeps-Boeck- || houden, Geometrie, Lantmeten, en de Konst van de groote || Zeevaert, op de Zeedyck, daer de Stuerman || op de Stock staet. || [ornament] || t'Amsterdam, || By Hendrick Doncker, Boeckverkooper en Graetboogh-maker/ inde Nieuwe- || brugh-steegh/ in 't Stuermans-Gereetschap/ en voor den Autheur. 1659. 4°.

In verso van den titel „Tot den Konst-beminden || Leser", 1 blz. ongepagineerd, dan blz. 1—8 en groote plaat.

49)* Deze „Hondert Geometrische Questien van Sybrant Hansz. Cardinael" komen voor in het volgende werk:

Practyck des landme- || tens: Leerende alle rechte ende || kromzydige Landen/ Bosschen/ Boom- || gaerden/ en andere Velden meten/ || soo wel met behulp des Qua- || drants/ als sonder het selve. || Mitsgadere alle Landen deelen in ghelycke ende on- || gelycke deelen op verscheyden manieren, || met eenighe nieuwe ghecalculeerde || Tafelen daer toe dienende. || Gecomponeert door Iohan Sems ende Ian Pietersz. Dou, || gheadmitteerde Landtmeters. || *Vermeerdert met hondert Geometrische Questien met* || *haer Solutien. Door* Sybrant Hansz. || *Rekenmeester tot Amsterdam.* || [vignette: een zestal wis- en landmeetkundige figuren] || Ghedruckt tot Amsterdam by Willem Jansz. op het || Water/ in de vergulde Sonnewijser. 8°.

Verso van den titel is wit. Dan „Aen den Hoogh-gheboren Vorst ende || Heere Mauritz, gheboren Prince van O- || rangien ... MITSGADERS || *De Edele, Vermoghende, VVyse seer Voorsienighe* || *Heeren, Staten van Hollandt, Zeelandt ende* || *West-Frieslandt*," geteekend „in || Leyden desen elfsten October anno 1600, ||" door „IOHAN SEMS || ende || IAN PIETERSZ. DOU" (6 blz.). Dan „Tot de verstandighe Lesers" 3 blz. 1 blz. alles ongepagineerd.

A—V. Blz. 1—103. Drie Deelen en Appendix.

Daarop „BESLUYT" 1 blz., „Register" 2 blz. „VOORSTELLINGHE" 2 blz. alles ongepagineerd; dan nieuwe titel.

49a)* Van het gebruyck der || Geometrische instrumenten. || Leerende alle onghenaeckelycke lenghten/ breetten/ || wijtten/ hooghten ende diepten/ met behulp van som- || mighe Geometrische instrumenten af meten/ soo wel sonder calculatie als met || behulp der selvighen. || Desghelycx Caerten maecken, soo wel voor eenighe || Landschappen met hare behoorlycke Steden, Dorpen, || Casteelen ende Sloten, als van eenighe particuliere Velden, || ende hoemen een gantsche Provintie, mitsgaders de Middel- || linie ende ommeloop des Aerdbodem sal af meten, ende een || Stadt, Stercte ofte Casteel in de grondt leggen, met meer an- || dere konstighe stucken der Geometrie belanghende. || Door *Iohan Sems* ende *Ian Pietersz. Dou.* || Vignette: dezelfde als by het vorige. || Gedruckt by Willem Jansz. inde Sonnewijser.

Verso van den titel is wit. Dan „Den VVelgheboren Heeren, Heeren || VVilhelm Ludwich Grave tot Nassauw, || ... MITGADERS || *Den Edelen, Erntfesten, Hoogh-gheleerden VVy-* || *sen vermoghenden Heeren Ghedeputeerden* || *Staten van Vrieslandt*", geteekent „Uyt Leeuwaerden desen vijftlen September. ANNO || 1600" door „IOHAN SEMS || ende || IAN PIETERSZ. DOU," 5 blz. „Tot den konstlievenden Lesers" 3 blz. alles ongepagineerd, maar behooren reeds tot de signatuur.

A—I. Blz. 1—131. Drie Deelen. Dan „BESLUYT" 1 blz. Register 2 blz. ongepagineerd. Daarop weder nieuwe titel.

49b) Hondert || Geometrische questien || met hare solutien. || *Door* || Sybrandt Hansz. van Harlinghen, || Reeckenmeester tot Amsterdam. || Vignette: meetkundige figuur over het theorema van Pythagoras. || t'AMSTERDAM, || Ghedruckt by Willem Jansz. op het Water/ || in de vergulde Sonnewijser.

Verso van den titel is wit, dan „VOORREDEN" 1 blz. met verso wit, behoorende alles bij de signatuur.

A—H. Blz. 1—127. De verso bevat het drukkersmerk: Eene hand houdt een weegschaal, waarin de hemel- en aardglobe; de eerste weegt het zwaarst; daaronder, „PRAESTAT."

Vermoedelijk is deze uitgave van 1612. Eene latere bevat dezelfde titels, behalve dat onder de vignette staat.

49c)* „Ghedruckt tot Amsterdam by Jan Jansz. op het || Water/ inde Pas-

Caert." 8°. Voor de twee eerste boekjes loopt de signatuur en paginee-ring door.

A—Dd. 4 blz. ongepagineerd (de opdracht is weggevallen) blz. 5—290. 2 ongepagineerd, geen opdracht, blz. 295—421, 3 blz. ongepagineerd. Daarachter:

49d)* Dezelfde titel als 49b), maar onder vignette staat: t'AMSTERDAM,|| Ghedruckt by Jan Jansz. op het Water/ || inde Pas-Caert. 8°.

A—H. Blz. 1—118.

De eerste uitgave, van dit boekje, 49) en 49a), waarop de opdrachten van 1600 betrekking hebben, is eene veel fraaiere uitgave in 4°.

49e)* Practijck des Lantmetens. || Leerende alle rechte ende cromsijdige Landen,, || Bosschen, Boomgaerden, ende ander velden meten, soo || vvel met behulp des Quadrants, als sonder het selve. || *Midtsgaders alle Landen deelen in ghelycke ende* || *onghelycke deelen op verscheyden manieren, met eenighe* || *nieuwe ghecalculeerde Tafelen daer toe dienende.* || Van nieus ghecomponeert ende in druck uyt ghegheven door || Iohan Sems, geadmitteert Lantmeter by den Hove van Vrieslant/ eñ || Ian Pietersz. Dou, gheadmitteert Lantmeter by den Hove van Hollant. || Vignette: hetzelfde als bij Noot 49, maar eenigzins meer uitgewerkt. || Gedruckt tot Leyden by Jan Bouwensz. Anno 1600. 4°.

A—Pn. 8 Blz. ongepagineerd, blz. 1—303, 5 blz. ongepagineerd.

En evenzoo het boekje van Noot 49a).

A—Q. 8 Blz. ongepagineerd, blz. 1—126, 2 ongepagineerd, met fraaie platen.

Het exemplaar in mijn bezit, uit de Bibliotheek van Prins Frederik Hendrik, bevat een goed portret van Iohan Sems. „AETATIS SUAE. 51 || ANNO. 1623. || MF. *Pin.* || *CVSichem. sculpsit,*" met het motto „*Toute chose par Raison et Mesure est a priser de Nature.*"

50)* Uitgekomen in 1653, waarvan de tweede druk:

NEDERDUYTSCHE || ASTRONOMIA. || Dat is: || Onderwijs van den Loop des Hemels. || Leerende || Het vinden der Plaetsen en bewegingen der vaste Ster- || ren/ Son en Maen; als oock haer Eclipsen of verduystringen. || Item/ den loop der Planeten/ welcke door rekeningh/ en oock || tuygh-werckelyck met een Planeet-wijser || aengewesen wordt. || Hier by gevoeght een AEN-HANGH, dienende tot naeder || verklaeringhe over den Loop des Hemels. Als oock eenighe VOOR- || BEELDEN der SON-ECLIPSEN, || welcke rekening door verscheyden voorbeelden || ghetoont wordt. || *Alles nut en vermakelyck, niet alleen voor de Liefhebbers deser konst,* || *maer oock voor Schippers en Stuyr-luyden.* || Beschreven door || DIRCK REMBRANDTSZ. van NIEROP, || Liefhebber der MATHEMATISCHE Konsten. || Ende nu met den tweeden Druck, overghesien, verbetert ende || vermeerdert, en den selfden Autheur, als oock een gedruckten || PLANEET-WYSER. || Vignette: eene sphaera armillaria. || t'

AMSTERDAM, || By Gerrit van Goedesbergh, Boeck-verkooper op 't Water/ in de Delfsche || Sybel/ over de Nieuwe Brugh. Anno 1658. 4°.

Voor dezen titel, een gegraveerde, bevattende een schild, waar boven links „Hipparchus" en rechts „Rex Alphonsis" zittende, te midden van sterrekundige instrumenten, boeken en een sterrenhemel. Onder „Hipparchus" staan „Petolomeus" en Copernicus"; onder „Alphonsus" staan „Tycho Brahe" en „Joh. Phocylides"; allen ten voeten uit. Op het schild leest men „Nederduytsche || ASTRONOMIA || *Synde* || Een kort doch volkomen || Onderwijs van den || Loop des Hemels || Door" || daaronder een goed portret, waar rondom „DIRCK REMBRANTSZ. VAN NIEROP", en waaronder „t'AMSTERDAM || By Gerrit van Goedesbergen || *boeck verkoper op het Water*. 1658."

De verso van den eersten titel is wit, dan „KORTE VERKLARINGE || Van de || TYTEL-PLAET" door H. L. 1 blz. „KLINK-DICHT, || *Op den treffelycken Nederduydtschen* || ASTRONOMIA", door „J. G. RUPS, Hier na vernieuwt", 1 blz. Daarop „Tot den LESER", 3 blz.; „Kort Begrijp deses Boecks" 5 blz. alles ongepagineerd.

A—Cc. Blz. 1—205, blz. 206 is wit, dat werk zelf in XI *Hooft deelen*.

A—H. Blz. 1—65, blz. 66 is wit. AENHANGH.

a—k. Blz. 1—78. *VOOR-BEELDEN* || *der* || SON-ECLIPSEN, || Waer in vertoont wordt, || om in 't alghemeen te bereeckenen de || plaetsen des Eerdtrijcks daer de Son ten grootsten ver- || duystert wort, en d'uyterste palen daer men de || Son-Eclips sien kan. || *Als oock* || In 't byson der te bereeckenen op een voor-ghe- || stelde plaetse/ de tijdt ende grootheyt des Son-Eclipsen/ || alwaer 't selfde door verscheyden voor-beelden ghe- || toondt wordt.

Later verscheen nog:

50a)* BY-VOEGHSEL || Op de Nederduytse || ASTRONOMIA || EN || SONNE STILSTANT, || Welcke zijn || Eenige Aenteyckeningen dienende tot verbeteringh en || vermeerdering des selfden, en dat so wel op d'eerste als tweede || Druck deser ASTRONOMIA. || Waer mee dat die vermeerdert zijn met een nieuwe || uytreeckening op de Planete Mercurius/ voortkomende uyt de || twee waergenomen samen-standen in de Sonne/ gedaen by || P. GASSENDUS en J. HEVELIUS, || By een gestelt door || Vignette: zijn portret als boven || *Liefhebber der Mathematische Konsten*. || t'AMSTERDAM, || By ABEL van der STORCK, Boeckverkooper op 't Water/ recht || over de Nieuwe Brugh/ in de Delfsche Sybel/ 1677. 4°.

Verso van den titel is wit. Dan „Aen den || LESER", geteekent „Aldus ge-eyn- || dight in Ooghstmaent des 1676. Jaers", 2 blz. ongepagineerd.

A—P. Blz. 5—116.

51)* ENCYCLOPAEDIA || MATHEMATICA || Ad Academicos Trajectinos, || *QUAM* || Favente Deo Opt. Max. || SUB PRAESIDIO || JACOBI RAVENSBERG || A. L. M. & Matheseos in Academia Rheno- || Trajectina Professoris, ||

Publice examinandam proponunt || ALEXANDER de BIE || BARTHOLDUS à WESEL || ANDREAS LANSMAN || Amstelo-Batavi. || *Ad dies* 4. 5. & 6. *Aprilis horis locoque solitis.* || Vignette: Abraham offert Isaac met het randschrift „OBEDIENTIA POTIOR VICTIMA." || ULTRAJECTI, || Ex Officina AEGIDII ROMANO, Academiae Typographi, || *Anno* CIƆ IƆC XLII. folio.

In verso van den titel de opdracht „D. D. FRIDERICO RUYSCH, || D. D. GISBERTO vander HOOLCK, || Inclutae Rei-publ. Trajectinae Coss."

A—G. Blz. 1—28 bevatten: SPHAERICA (X), ASTRONOMICA (XI), PLANETARIA (XXXV), ASTRONOMICA-MECHANICA (VI), ASTRONOMICA-CHRONOLOGICA (V), ASTROLOGICA (IV), GEOGRAPHICA (IX), HYDROGRAPHICA ET NAVTICA (VIII), ACOVSTICA (IX), OPTICA (XV), CATOPTRICA (X), DIOPTRICA (XI), STATICA (IX), ARITHMETICA (V), GEOMETRICA (X), PERIBOLOGICA (XI), SACRA (VIII), FORENSIA (III), MEDICA (V), PHYSICA (XIV), PRACTICA (III), CRITICA (III).

52)* Het genoemde werk van Stevin maakt een deel uit van het volgende:

WISCONSTIGE || GEDACHTENISSEN, || Inhoudende t'ghene daer hem || in gheoeffent heeft || DEN DOORLVCHTICHSTEN || Hoochgheboren Vorst ende Heere, MAVRITS Prince van || Oraengien, Grave van Nassau, Catzenellebogen, Vianden, Moers &c. || Marckgraef vander Vere, ende Vlissinghen &c, Heere der Stadt Grave, || ende S'landts van Cuyc, St. Vyt, Daelburgh &c, Gouverneur van || Gelderlant, Hollant, Zeelant, Westvrieslant, Zutphen, || Vtrecht, Overyssel &c., Opperste Veltheer vande || vereenichde Nederlanden, Admirael || generael vander Zee &c. || *Beschreven deur* SIMON STEVIN *van Brugghe.* || vignette: een ovaal met een ketting zonder einde, loopende over twee hellende vlakten || met het opschrift „WONDER EN IS GHEEN WONDER" || TOT LEYDEN, || Inde Druckerye van Ian Bouvvensz. || Int Iaer CIƆ IƆ CVIII. folio.

Verso van dezen hoofdtitel is wit. Dan „VOORREDE" 1 blz.; in verso „CORT BEGRYP DER || WISKONSTIGHE || GHEDACHTENISSEN. || *Dese VVisconstighe ghedachtenissen sullen verdeelt syn in* || *vyf stucken.* || *Het eerste vant VVeereltschrift.* || *Het tweede vande Meetdaet.* || *Het derde vande VVeeghconst.* || *Het vierde vande Deursichtighe.* || *Het vijfde vande Ghemengde stoffen.* || *En voor elck stuck sal staen een Cort begryp der boucken, dee-* || *len, of onderscheytsels daer in vervanghen.*"

Deze vijf stucken hebben alle een dergelijken titel als de beschrevene; maar de vignette is hier een ooijevaar met het bijschrift „VIGILATE", de jaartallen zijn 1608, 1605, 1605, 1605 en 1608, en achter den naam van den drukker staat bij die van 1605, „woonende op de hoogelandtsche Kerckgraft." De verso van die vijf titels geven nu het „CORT BEGRYP." Ieder „*Deel*" daarvan heeft weder een gewonen titel, en in verso het CORT BEGRYP der BOECKEN. En wel achtereenvolgens.

Dit Weereltschrift sal drie deelen hebben:

Het eerste deel van den Driehouckhandel. IV Boucken. A—Hh. bz. 1—364.

Het eerste vant maeckset der tafels der Houckmaten.

Het tweede vande Platte driehoucken.

Het derde vande Clootsche driehoucken.

Het vierde van Hemelclootsche werckstucken deur rekeninghe der clootsche driehoucken gewrocht.

Het tweede deel vant Eertclootschrift. VI Boucken. A—Q. blz. 1—191.

Het eerste van des Eertclootschrifts (*Geographia*) bepalinghen int ghemeen.

Het tweede van syn Stofroersel.

Het derde van de Damphooghde.

De volghende boucken sijn het Zeeschrift angaende, te weten:

Het vierde vande Zeylstreken.

Het vijfde vande Havenvindingh.

Het seste Spiegheling van Ebbenvloet.

Het derde deel vanden Hemelloop. III Boucken A—Gg. Blz. 1—357.

Het eerste bouck vande vinding der dwaelderloopen en der vaste sterren deur ervarings dachtafels met stelling eens vasten Eertcloots.

Het tweede vande vinding der dwaelderloopen deur wiskonstighe werckingen met stelling eens vasten Eertcloots, en eerste oneventheden.

Het derde vande tweede oneventheden, waer in comt Copernicus stelling eens roerenden Eertcloots.

Bijvough des breedeloops der vijf dwaelders.

Anhangh des hemelloops van der dwaelders onbekende roersels.

TWEEDE STUCK ... VANDE MEETDAET. VI Boucken. A—R. Blz. 1—203.

Eerste Bouck van het teyckenen der grootheden.

Tweede Bouck van het meten der grootheden.

Derde Bouck vande vier afcomsten als Vergaring, Aftrecking, Menichvulding en deeling der grootheden.

Vierde Bouck vande everedenheyts reghel der grootheden.

Vyfde Bouck vande everedelicke snyding der grootheden.

Seste Bouck van tverkeeren der grootheden in ander formen.

DERDE STUCK VANDE DEVRSICHTIGHE. III Boucken. A—I. Blz. 1—108.

Eerste Bouck vande Verschaeuwing (*Perspectivis*).

Tweede vande Beginselen der Spieghelschaeuwen (*Elementis Catoptricis*).

Anhang.

Derde vande Wanschaeuwing (*Refractione*), [ontbreekt].

VIERDE STUCK. VANDE WEEGHCONST. VI Boucken. A—T. Blz. 1—219.

Eerste vande beginseten der Weeghconst.

Tweede vande vindingh der swaerheyts middelpunten.

Derde vande Weeghdaet.

Vierde vande beginseten des waterwichts.

Vyfde vanden anvang der waterwichtdaet.

Anhang.

Seste vande Bijvough, 6 deelen.
Het eerste van het Tauwicht.
Het tweede van het Catrolwicht.
Het derde vande vlietende Topswaerheyt.
Het vierde vande Toomprangh.
Het vyfde vande Watertrekkingh [ontbreekt].
Het seste vant Lochtwicht [ontbreekt].
VYFDE STUCK VANDE GHEMENGDE STOFFEN. VI Deelen. Blz. 61.
Het eerste van Telconstighe anteyckeningen. A, blz. 1—10 [gebreken verscheyden Hooftstucken].
Het tweede vande Vorstelicke Bouckhouding. A—R, blz. 1—21, 1—6, 1—58, 1—8, 1—106.
Het derde vande Spiegheling der Singconst [ontbreekt].
Het vierde vanden Huysbou [ontbreekt].
Het vijfde vanden Orygkshandel [ontbreekt].
Het seste van verscheyden anteyckinghen [ontbreekt].
Blz. 107. VAN ETTELICKE GHEBREKENDE || *stoffen*, reeds boven aangegeven. »D'oirsaeck waerom die niet ghestelt en sijn na t'inhoudt der voorschreven || Cortbegrypen, is datse niet volcommelick genouch gereet en waren, doen den || Drucker niet langher by hem en begheerde te bewaren datter een tijt lanck tot || sijn achterdeel ghedruckt hadde ghelegen; Sulcx dat mijn voornemen nu || is de boveschreven rest ter gheleghender tijt te laten uytgaen"; maar daarvan is niets gekomen.
Blz. 108—112. TAFEL.
Blz. 113—117. DE GHEDRVCKTE FOVTEN. Blz. 118 is wit.

58)* Een gegraveerde titel, door »*W. Akersloot*"; boven aan Minerva en Mercurius, tusschen allerlei wapenen; rechts en links twee vrouwen, de meetkunde en de landmeetkunde voorstellende: links onder de kolommen van den titel een kanon, rechts de cijfers 3781, 4670, 9145, 6780, 1430. Daartusschen de titel

FORTIFICATIE || Dat is/ || Sterckte Bouwing: || So wel tot offensive als defen- || sive Oorlogh/ beschreven || en voor-gestelt || DOOR || SAMUEL MAROLOIS. || *Oversien en verbetert* || *Door* || *ALBERT GIRARD* || *Mathemat.* || *Nu nieus uyt de Fransche in onse* || *Nederlandtsche Tale over-geset,* || *tot dienst van de Liefhebbers* || *der selve Konst,* || Door W. D. || A AMSTERDAM || chez Jan Janssen || *Anno* 1627 || Cum Privilegio. folio.
De verso van den titel is wit.
A—N. Blz. 1—98. Blz. 99, 100 Naschrift van *ALBERT GIRARD*: blz. 101 niet gepagineerd, „ERRATA". Blz. 102 is wit; 41 dubbele platen.
Dit werk is eene vertaling van

58a)* FORTIFICATION || OV || ARCHITECTVRE || MILITAIRE || *tant offensive que* || *defensive: Suputee* || *et dessignee* || PAR || *Samuel Marolois* || 1615 || Hagae Comitis || ex officina *Henr. Hondii* || folio oblong.

Deze titel maakt een deel uit van een gegraveerden titel door „*S. Frysius* A. 1615": hij stelt eenige geheel misteekende figuren met afschuwelijke onmogelijke aangezichten voor te midden van verschillende wapenen.

A—Mm. 77 blz. Premiere Partie.

A—M. 24 blz. Seconde Partie.

Deze bladz. zijn in plano, in twee kolommen gedrukt, zonder pagineering.

Dan 40 platen.

Dit werk is wederom een gedeelte van het volgende.

53)* Eerst een gegraveerde hoofdtitel. Aan de vier hoeken beelden van EUCLIDES, VITELLIUS, ARCHIMEDES en VITRUVIUS. Daartusschen een schild, waarboven „OPERA MATHEMATICA", en waarin

OU || OEUVRES MATHEMATIQUES. || Traictans de || GEOMETRIE, PERSPECTIVE, ARCHITECTURE ET || FORTIFICATION. || par || SAMUEL MAROLOIS. || Ausquels sont aioints les fondements de la || Perspectiue & Architecture de I. Vredm. Vriese || Augmentée, & Corrigeé, en diuers en- || droicts, par le mesme Auteur.

En waaronder verder „AMSTELODAMI". || Apud Ioannem Janssonium Bibliopolam sub || intersigno Tabulae maritimae. || *Anno* 1617. folio oblong.

Daarop weder een gegraveerde titel: De Vrede en de Overvloed houden een schild, waarop GEOMETRIE || CONTENANT LA THEORIE, || ET PRACTIQUE DICELLE || NECESSAIRE || A LA FORTIFICATION. || PAR || SAM. MAROLOIS. || HAGAE-COMITIS: || EX OFFICINA HENRICI HONDII. || ARNHEMI, || APUD IOANNEM IANSSONIUM. || *Cum privilegio.*

Beide gegraveerde titels zijn veel beter dan die van Noot 53a. De bladz. zijn niet gepagineerd, in plano, in twee kolommen gedrukt.

A—X in fraaie letter met 32 regels; maar vandaar af, met veel minder fraaie letter.

Y—XX met 40 regels per bladzijde. Dan Platen 1—42, 1—5.

54)* DES || AERTRYCKS BEWEGING, || EN DE || SONNE STILSTANT, || Betoogende || Dat dit geensins met de Christelijke || Religie is strijdende. || Waer in dat alle Redenen en Argumenten, die tot noch || toe hier tegen ingebracht zijn, wederleyt ende be- || antwoort worden. || Met noch verscheyden AENMERCKINGEN, soo van de || vindingh der lenghte van OOST en WEST, en anders: || Zijnde alles seer nut en vermakelijck/ voor de Lief- || hebbers van Godlijcke/ Natuerlijcke/ en || Wiskonstighe dingen. || By een gestelt door || DIRCK REMBRANTSZ. van NIEROP. || Liefhebber der Mathematische Konsten. || Vignette: een schildpad. || t'AMSTERDAM, || By Gerrit van Goedesbergh, Boeckverkooper/ op 't Wa- || ter/ aen de Nieuwe-Brugh/ in 't Jaer 1661. 4°.

Verso van den titel is wit. Dan „Tot den || LEZER", gedateerd „om-

trent het eynde van den Herfst- || maent, in den Jare 1660", 2 blz. „*Kort Begrijp deses Boecks*", 2 blz.; alles ongepagineerd.

A—H. Blz. 1—60. Vier Hooftdeelen. Dan

I—T. Blz. 1—151. *Eenige* || AENMERCKINGEN, || *Welcke zijn*, ||

1. Op 't uytgaen van verscheyden nieuwe || Boecken, soo van my als oock van || andere [blz. 63—79].

2. Op de vindingh der lenghte van Oost || ende West [blz. 80—113].

3. Op de uyt-reeckeningh der Son-Eclip- || sen en dat zonder Tafelen, soo wel || particulier als generael [blz. 114—151].

Aan het slot

Ter Drukkerye van TYMON HOUTHAAK, op de || Nieuwe-zijds-Kolk, in de Vogel Struys.

Blz. 152 is wit.

55)* Blijkens de voorrede van de volgende (derde) uitgave is de eerste druk van 1654 en de tweede van 1659.

Tijdt Beschrijvinge || DER || WERELDT. || Waer in gehandelt wordt/ || Ten eersten, van des Werelts Ouderdom, als dat || die nu al boven de ses-duysent en acht-hondert jaren || gestaen heeft. || Ten tweeden, van de Feesten Israëls, waer in af-ge- || beelt wort, de tijdt voor de Wet, onder de Wet, ende || oock onder 't Euangelium. Als mede een nader aen- || merckinge op 't Paesch- en Pincxter-Feest. || Ten derden, van de voornaemste Geschiedenissen || des Werelts, die op Tijdt-Kaerten in 't korte gestelt || zijn: als oock een Kronijck-Liedt van den selven in- || houdt. || Ten vierden, van onse Burgerlijcke Tijdt; ver- || toonende den ordre van de Sondaghs-Letter, Nieu- || we Maen en Paesch-tijden, soo wel Oude als Nieu- || we-Stijl: als oock de Zon en Maens-graed in den || Zodiak te vinden. || Bij een gestelt door || DIRCK REMBRANDTSZ. *van Nierop*, || Lief-hebber der Mathematische Konsten. || Ende nu met desen derden Druck oversgesien/ verbetert/ ende || wel een derde part vermeerdert bij den selfden Autheur. || t'AMSTERDAM || By Gerrit van Goedesbergh, Boeck-verkooper/ op || 't Water/ by de Nieuwe-brug/ in de Delfsche Bybel/ 1665. 8°.

Daarvoor een gegraveerde titel. Een geleerde dicteert aan een schrijver, waarnaast de tijd staat: daarboven hangen 4 tafereelen uit de Bijbelsche geschiedenis: op en bij de tafel liggen meetkundige werktuigen. Op het afhangende tafelkleed leest men „TYDT || BESCHRYVING || *der* || Werelt." Daaronder „*Amsterdam bij* Gerrit *van* Goedesbergh *boeck-vercoper op 't water*."

In verso van den titel het portret van den schrijver met een achtregelig vers van D. TRAUDENIUS.

Dan „*Tot den* LEEZER" gedateerd „Aldus gedaen in Nieuw || Niedorp in Julius in 't Jaer 1664. || *By My* || DIRCK REMBRANTSZ" 6 blz., dan „KORT BEGRYP" 4 blz. Alles ongepagineerd.

A—P. Blz. 1—239. Op de volgende blz. „t'AMSTERDAM || Gedruckt by PAULUS WARNAER, in 't Haentjen Hoeck-steegh, 1665."

55a)* De vierde druk is uitgegeven bij „Wed. Abel van der Stork. 1675": op den gegraveerden titel staat onderaan: „t'Amsterdam bij *Abel van der Stork, boeckvercoper op 't Water.*"

Het „Tot den LEEZER" bevat 8 blz. en eindigt „Gedaen in October 1671."

Op bladz. 240 staat „t'AMSTERDAM, || Gedrukt by HENDRIK HARMENSZ. || in de Lange-straat, bij de Brouwers || Graft, 1675."

56)* *Mathematische Calculatie,* || Dat is, || Wiskonstige Rekening: || Leerende || Het vinden van verscheyden Hemelloopsche || Voorstellen, en dat door de Tafelen *Sinus Tangents* || of *Logarithmus* wiskonstelick uyt te rekenen: || Als oock tuyghwerckelick op een || liniael uyt te passen. || *Als mede 't beschrijven en uytrekenen der* ZONWYZERS: || *zijnde alles zeer vermakelick voor de Liefhebbers deser Konst,* || *ende niet min gedienstigh voor Schippers en Stuurlieden.* || Noch is hier by gevoeght de *Wis-konstige Musyka:* || waer in getoont wort de oorzake van 't geluyt, de redens || der Zangh-toonen, en verscheyden dingen, tot de || Zangh en Speel-konst behoorende. || DOOR || vignette: het portret van den schrijver met zijn naam rondom. || *Liefhebber der Mathematische Konsten.* || t'AMSTELDAM, By GERRIT van GOEDESBERGEN, Boeckverkooper || op 't Water/ in de Delfsche Bijbel. Anno 1659. 8°.

In verso van den titel: „Kort inhoud dezes Boecks || De Inleidinge waer in dat gheleert wordt het || maken der Logarithmus Tafelen/... Het eerste Deel/ van de uytreeckening der Driehoec- || ken/ begreepen in 20 Voorstellen || Het tweede Deel/ van Kloostsche reeckeningen/ begre- || pen in 10 Werckstucken, || Het derde Deel/ van de beschrijvinghe der Zonnewij- || sers/ begrepen in 9 Hooft-deelen. || Het vierde Deel/ zijn 10 Vraeghstucken/ ende dat || meestendeel van de Weeghkonst. || Daer van dat elck Deel zijn Inleydingh en Kort || Begrijp voor den aenvangh des selfden gestelt is."

a—b. Blz. 1—8, *INLEYDINGE,* Aan het slot „Ge-eyndicht in Hoymaent des 1658 Jaers."

A—L. Blz. 1—167.

Daarachter met een nieuwen titel — het werkje komt ook afzonderlijk voor —

56a)* WIS-KONSTIGE || MUSYKA: || Vertoonende: || De oorsaecke van 't geluyt, de || redens der Zanghtoonen telkonstigh uytge- || reeckent, ende het maken en stellen || der Speeltuygen. || *Als mede van der ouden Musyck, en verschey-* || *den gevoelens der zelfde. Zijnde alles seer gedienstigh* || *en vermakelick voor* Musikanten, Organisten, || *of andere Instrument-speelders* || DOOR || vignette: portret van den schrijver met zijn naam daaromheen. || *Liefhebber der Mathematische Konst.* || t'AMSTELDAM, || By GERRIT van GOEDESBERGEN, Boeckverkooper || op 't Water/ in de Delfsche Bybel. 1659. 8°.

Verso van den titel is wit.

a—e. Blz. 1—70.

Later verscheen nog

[66b])* Tweede Deel || Op de || WIS-KONSTIGE || REKENING, || Welke syn || Eenige Aanteyckeningen, dienende tot || verbetering en vermeerdering des selfden. || Waer mee dat beneffens eenige bewysingen in de || Driehoecken/ en Werkstucken in menighte vermeerdert syn || en dat soo wel in Klootse Driehoecken/ als in || Klootse Snydingen. || Als oock de Sonnewijsers, Waterwight en de Sangh-Konst, || die met veel wonderlijke en vermakelijke dingen ver- || meerdert en verbetert sijn. || By een gestelt door || vignette: het portret van den schrijver met zijn naam. || *Lief hebber der Mathematische Konsten.* || t'AMSTERDAM, || By de Weduwe Abel van der Storck, Boeckverkoopster op 't Water/ || recht over de Nieuwe Brugh/ in de Delfsche Bybel/ 1680. 4°.

Verso van den titel is wit.

Het „Aen den LEZER", 3 bladz. geeft een overzicht van hetgeen hij in zijn leven heeft uitgegeven, „die ik ook alle (als door ongebaende || wegen) self hebbe moeten opsoeken"; de volgende bladz. bevat een gedicht van D. P. PARS. Dan „Kort Begryp", 3 blz.

„Eerste Deel van de Driehoeks Reekeninge. N°. 1—5.

Op het tweede Deel. N°. 6—40.

Van de twaelf Huisen des Hemels. N°. 41—44.

Van de Klootse Snydingh. N°. 45—75.

Derde Deel van de Sonne-wijsers. N°. 76—83.

Vierde Deel van de Weegh-konst, en voornamelyck de Water-wight. N°. 84—108.

Van de Wis-Konstighe Musyka. N°. 109—115."

Alles ongepagineerd.

A—Z. Blz. 1—180.

[67])* De eerste uitgave verscheen te Amsterdam bij *Pieter Karsseboom* in 1661. Een latere druk is de volgende:

Cornelis Jansz. Lastman || KONST der STUURLUIDEN. || IN WELKKE || Door zeekere Grondt-regelen getoondt werdt, hoe die zelve Konst na 't || behooren gebruikt, en laughs zoo meer magh gebeterdt werden. || Tot welkken einde hier by gesteldt zijn de Tafels van de Hoekmaten || Raak- en Snylijnen: nevens het maakzel, gebruik en inhoudt der zelver Tafelen; || met een grondige onderwijzinge des Driehoeks reekeningh. || Merklijk verbeterdt, en vermeerderdt met een || AANHANGH, || Bestaande in verscheiden VOORBEELDEN, tot Oeffeningh der || zelver Konst beschreeven; nevens een || Toegift ofte Vervolgh || van diverse VOORSTELLEN de Zeevaart toe-gepast, ende ontbonden. || Door || FRANS vander HUIPS, || Examinateur der Stuurluiden, in dienst van de Geoctroyeerde Oost- en West- || Indische Compagnie ter Kamer AMSTERDAM. || Met bysoeging van een ALMANACH na den Nieuwen-Stijl, van Zes-en- || twintigh achter-eenvolgende Jaren/ beginnende

met den Jare 1675, en eindigende || met het Jaar 1700 in-gesloten. || Gesteldt op de Meridiaan deser Landen. || Vignette: een zeilend schip. || t'Amsterdam || By Jacob en Casparus Loots-Man, in Compagnie met Hendrik || Donkeer, 1675. || Met Privilegie voor vijftien eerst-komende achtereen-volgende Jaren. 4°.

In verso van de titel de Privilegie, gedateerd 16 July 1674.

Dan „Aen den Konst-Lievenden || Leser" geteekent „*UE ten dienste* || Frans vander Huips. || In Amsterdam, den 1sten October. || Anno 1675." 2 Blz. alles ongepagineerd.

A—Gg. Blz. 1—236.

Blz. 1 Register; blz. 2 Voor-reden; blz. 3 Noodige Bepalingen der Hoeckmaeten, Raecklijnen en Snijlijnen; blz. 7 *Den Inhoud dezer volgende Tafelen*, blz. 9 Tafelen.

Blz. 32 het eerste Hooft-stuck. XXIV Voorstellen.
Blz. 59 het tweede Hooft-stuck. Voorstel XXV—XXXIII.
Blz. 98 het derde Hooft-stuck. Voorstel XXXIV—XXXVI.
Blz. 105 het vierde Hooft-stuck. Voorstel XXXVII—XXXVIII.
Blz. 111 het vijfde Hooft-stuck. Voorstel XXXIX—XLV.
Blz. 187 het seste Hooft-stuck. Voorstel XLVI—LX.
Blz. 213 het sevende Hooft-stuck. Voorstel LXI—LXX.

Dan met nieuwen titel:

57a)* Aanhangh || op || *Cornelis Jansz. Lastmans* || Konst der Stuurluiden. || Bestaande in verscheiden || *Voorbeelden*, || tot Offeningh [sic] der zelver Konst beschreven; || Met een || Toegift ofte Vervolgh, || Van diverse Meetkonstige Voorstellen, de Zeevaert || toe-gepast, ende ontbonden. || Door || Frans vander Huips, || Examinateur der Staurluiden, in dienst vande Geoctroijeerde Oost- || en West-Indische Compagnie, ter Kamer Amsterdam. || Vignette als boven. || t'Amsterdam, || Gedrukt by Jacob en Casparus Loots-man, Boekverkoopers op 't Water. || Met Previlegie voor vijftien Jaren. 4°.

A—G. Blz. 1—46.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.



N°. XXII. JAN HENDRICK JARICHS VAN DER LEY.

1. Bijzondere omstandigheden brachten een paar boekjes van voornoemden schrijver in mijne handen: die gelegenheid was te kostbaar om daarvan geen gebruik te maken, en iets omtrent den Generalen Regel mede te deelen, dien JAN HENDRICK JARICHS VAN DER LEY in der tijd met zoo veel ijver tegen zulke bevoegde wiskundigen verdedigde.

Van zijn persoon is ons niet veel bekend. Hij was geboren in 156? en zoon van HENDRICK JARICHS VAN DER LEY. Omstreeks 1615 was hij »Ontfanger van de Admiraliteyt tot Dockum"; zijn motto was »Weest **van** een **Der Ley** sin".

2. Zijn eerste werk »Eerste Boeck van 't Licht der Zeevaert. Amsterdam, WILLEM JANSZ. 1608. 4°." schreef hij in 1608: dit is mij nimmer voorgekomen. Daarop verscheen „Het Gulden Zeeghel || Des groote || Zeevaerts". 1615 [1]). In de Opdracht aan Prins MAURITS verhaalt de Schrijver het een en ander omtrent hetgeen hem wedervaren is.

»Voor die Iaren [dus 1612]... heb ick de E. E. | Hoochmogende Heeren, Staten Generael voorgedraghen ende || vertoont, een generale Regel, waer met, so wel des Werelts leng- || te als breete (in alle ghekoppelde Cruys-courssen, die veranderin- || gè van de Pole maken, als op een streeck,

besonder tusschen twee bekende Polus || hoochten aengeseylt zynde) afgepast en gemeten can worden. Daerover || haer mogende E. drie uyt hare vergaderinghe hebben Gecommitteert, die tot || ondersoeck vande voorsz. Reghel, den wysconstighen Meesters *Stevyn* ende || *Marlo* [lees: Marolois] als personen inde voorsz. Conste ervaren, hebben beroepen, de welcke || .... gheadviseert hebben,.... tot naerder ondersoeck vande || sake te roepen, verstandighe Stuyrluyden en andere Personen, soo wel inde || practycque als Theorie ervaren.... Ende so ten laestē deurt geduyrich aen-houdē, hebbē de vier || hun tegenwerpingen.... in handē || .... overgelevert,.... maer soo ick op haerluyder tegenwerpingen geätwoort || en 't contrary bewesen.... dewelcke (nae zy die gesien en gelesen || hadden) de selve weder in handen vande Heeren Raden met een gheschrift || van vier ondertekent hebben gebracht,.... Luydende aldus. ||

De geschriften van Jan Henricx den Ontfanger overgesien ende daerop ghelet heb- || bende/ wy ondergheschreven bevinden dat zyne inventie sonder fondament op beu- || selen/ en ydele speculatien ghebouwt/ ende den Stuyrluyden om te gebruycken gans || onnut zijn/ daer en wert niet met allen mede voortgebracht dat voor d'Zeevaerders eenighe || verbeteringhe can gheven/ soo tot het passen en meeten (als hy voorgeeft) als omde lenghte || des aertrijcks te vinden/ gelyck voordesen claer genoech bewesen ende by hem onwederlecht || gheblewen is/ Refereeren ons der halven tot ons voorschreven bewijs/ ende was onderteec- || kent met voorschreyden handen/ Willem Jansen, Sybrant Hansen, Hendrik Reijers Stuyrman, || Hessel Gerrijts. ||

Maer also ick my over sulcks beclaechde en seyde dat.... de gheschriften van weersijts van onpartidige behoorden geordelt || te worden,.... hebben [de Heeren] my op den 20 Junij Anno 1614.... geschreven.... Waerom ick my in September daeraen volghende.... hebbe ghepresenteert, de welcke.... hebben doen roepen den heere *Petrum Plantium*, *Willem Janssen*, || *Mr. Sybrandt Hanszen*, *Hessel Gerryts* ende *Barend Everts Zoon*, *Keteltas* Maer so || niemant compareerde als Meester *Sybrandt* alleen, de welke.... heeft verwil || licht, dat de saecke vande Hooch-gheleerden *Doctor*

Mulerius, Professor inde || Academie tot *Groninghen*, Den wys-constighen Meesters *Symon Stevyn*, en || *Marlo*, *Jan Pieterszen Dou*, Geometer tot *Leyden*, ende *Gerryt Pieterszen*, Geo- || meter tot *Alckmaer* zoude ghereVideert worden. Maer alsoo Mr. *Sybrant* || daer nae gheassisteert met *Willem Janssen* en *Hessel Gerryts* inde vergade- || ringhe van de voorsz. Heeren (daer ick met den stuyrman *Caspar* van *Donderen* || praesent waren) proponeerde, dat hy de sake voormaels qualycken hadde ver- || staen, zy mochten wel lyden, dat de voorschreven vijf personē over de sake ge- || roepen worden, maer wilden hun verstandt in 't ordel van andere niet stellen."

Verder in zijn »Aen de Const-lievende Lesers, mitsgaders alle Stuyrluyden" vermeldt hy nog

„dat ick myn aenwysinge vyf persoonē hadde over- || ghelevert/ naementlyck deu vermaerden Geographicus Pet. Plantius, || Mr. Sybrant Hansen, Willen [sic] Iansen, Hessel Gerrijts, eñ Barent Evertsen || Keteltas, de welcke alle teghen my ghescreven hebben (wtghenomen || den Heere Plantius).

Vervolgens spreekt hij over het „geschrift van vier handen ondertekent op dat de plaetse vande voorsz. Barent E- || vertsen, die niet present/ maer vande andere afgesondert, ende oock wt gheslooten waer/ wederom || vervult soude wesen/ ende haer aen geen experimentist gebreken soude... Ende/ op dat/ de beminde || Lesers/ oock moghen weten dat die vier persoonen (die d'voorz. Sententie ondertekent en || ghesloten hebben) gheen ghemeene persoonen zyn gheweest/ sal haer believen te verstaen dat || Willem Jansen is gheweest een dienaer oft discipel vande wijtvermaerdeu ende hoochgeleerden || Astronomus Tycho Brahae, tegenwoordich boeckvercooper ende Eertcloots-beschryver binnen || Amsterdam, die oock het licht der Zeevaert [*]) heeft laten wtgaen/ is zeer wtnemende in zyn hant- || werck daer van hy gheen cleyn ghewin treckt. || Meester Sybrant Hansen een Briese wt de Zee-Stadt Harlinghen haer alder Base/ seer || vermaert inde tel ende meet-const/ oock so wytnemende in de selve/ als een in Hollant te || vinden is/ eñ te rechte nae een tweeden Ludolph [van Ceulen namelijk] geleken mach worden/ heeft onlanchs/ || noch hondert zeer constige Geometrische questien [*]) mette solutien laten wtgaen/ hy heeft mede || een instrument

onderhanden dat gedreven sal worden met sterke wateren/ waer met hy deur || de tijt rekeninghe de Longitudo meent te vinden. || Hessel Gerrijts eertijts een dienaer van Willem Janssen, is mede een Mathematicus ende || Caertmaecker binnen de voorschreven Stede/ in zyn hantwerck seer perfeckt. || Hendrick Reyersen mede woonachtig binnen Amsterdam een zeer Experten ende ervaren || Stuyrman, die tweemael in Oost-Indien (soo ick wel onthouden heb) geweest heeft/ tegen- || woordich opper Stuyrman inde vloote/ die voorleden Somer onder 't beleyt vanden Amirael Spilbergen deur de strate Magelanus nae Oost-Indien is gegaen/ ende mede een leermey- || ster in de Conste van de groote Zeevaert/ heeft verleden jaer een boeck laten wtgaen/ geintituleert || vasten gront der loflycker Zeevaert/ [4]) waer in gheleert wort deur een t'samen sprekinghe/ hoe een || Stuyrman zyn instrumenten sal gebruycken/ seer dienstich voor alle lief- hebbers der Zeevaert. || Siet beminde L. deze persoonen zijn niet onder de Theoristen de geringste."

Ook zegt hij dat »Barent Evertsz. Keteltas, heeft een boeck Anno 1609. laten wtgaen vant ghebruyck der naeldwy- singe" [5]) en vervolgens omtrent de practicijns „waer van Willem Janssen de principaelste is daerse alle opsien/ ghe- lyckmen con- || nen mercken/ dat oock by zijn medeconferenten naulicx niet teghen my gheschreven is/ oft heb- || ben eerst zyn advijs en̄ antwoordt van hem gehaelt/ daerō heb ick ... twee mannen ... aen hem ghesonden/ met een corte verclaringhe vande principale || punctē ... maer heeft de voorschrevē mañen niet willen te || woorden staen."

Het voorgaande geeft, behalve menige merkwaardige bijzonderheid, wel den indruk dat onze schrijver eerlijk en bescheiden is te werk gegaan, en dat hij eenig recht had te klagen (blz. 85). „Wat dunkt || u nu constlievende Lesers/ heeftmen niet met de Remonstrant als de kat met de muys gespeelt." Dit mag ook wel, ten deele althans, het gevoelen zijn geweest van *Die Staten Generael der Vereenighde Nederlanden*, toen zij aen de Admiraliteyt tot Amsterdam den volgenden brief schreven [zie blz. 20]:

„Eerentfeste/ eersame/ vrome/ lieve/ besondere H. L. sullen uytte by- || ligghende Reqte aen ons ghepresenteert by Jan Henrixs Ontfanger || Gheneral van de Convoyen in Vrieslandt ver-

staen/ dat de zelve ‖ vermeent door eenen seeckeren Generalen Regel ghevonden te hebben ‖ het meeten vande Longitudo vande zee Oost ende West. Wy ‖ hebben den selven opde voorsz. syne Inventie doen hooren by eenighe ‖ Gecommitteerde wt onse vergaderinghe/ Mitsgaders by Meesters ‖ Stevijn ende Marlo, hun de Mathematische conste ten besten verstaende/ diewelcke verclaren by soo verre als des Inventeurs aengheveu inde practyque alsoo ‖ bevonden wordt als hy mainteneert/ dat sal (het welcke zy naeulycx weten te contradiceeren) ‖ dat zyne inventie seecker ende vast gaet/ mitswelcken/ nademael aende waerheyt van ‖ dese Inventie tot bevorderinghe vande Zeevaert ende by Consequentie voorden dienst vant ‖ Landt/ ten hoochsten is gheleghen. Soo is ons begheren dat U. L. deselve rypelyck sullen ‖ doen examineren by cloecke verstandighe ende ervaren Stuyr-luyden/op verre ende ‖ langhe reysen gheweest hebbende/ ende andere ervaren persoonen/ soo wel inde practyque als ‖ Theorye. Den Inventeur daer op ghehoort ende ons adverteeren/ wat de selve van de ‖ waerheyt/ vande voorschreven inventie sullen bevinden/ ende ordelen met U. L. advys ‖ sonder den Remonstrant langhe opte houden vande bedieninghe van zyn officie/ op dat ‖ wy op des selfs versoeck moghen disponeereu nae behooren. U. L. hiermede inde Protectie ‖ vande Almoghende bevelende.

Het blijkt uit dezen brief, dat STEVIN en MAROLOIS niet overtuigd zijn geworden door het ongunstig advies van de vier examinateurs; zoodat de Staten Generael, met zeer voorzichtige bewoordingen nochthans, tot een nader onderzoek wilden aanleiding geven. Doch deze poging schijnt mislukt, misschien wegens den bekenden invloed van WILLEM JANSSEN [BLAEU], juist te Amsterdam. Althans men verneemt later niets meer van dit onderzoek; en het is daarentegen aan de Admiraliteit te Rotterdam, dat naderhand de taak van dit onderzoek, en het uitrusten van een schip tot dat einde, wordt opgedragen.

Doch laat ons terugkeeren tot ons »Gulden Zeeghel".

Op blz. 23 begint het eigenlijke boek, waarin niet alle maar sommige objectiën worden aangegeven, en daarop door den schrijver beantwoord.

Blz. 23—51. Vier »Objectiën bij Mr. Sybrant Hanssen";

waarbij hij aanhaalt „de Geographische Onderwysinghen [6]) aande hooch gheleerden *Adrianus Methius* Profess: || sor inde Universiteyt tot Franeker."

Blz. 51—85. Vijf »Objectiën van Willem Janssen"; waarbij hij aanhaalt „Van 't ghebruyck der Hemelsche ende Aertsche Globe van Robert Hues [sic]" [7]) en »*de wijsconstige gedachtenissen* van Mr. Symon Stevyn" [8]) en de »*Apendice cosmographiae Appiani* van Gemma Frisius" [9]), en waarbij hij ook met groote lof gewaagt van »*Adriaen* de *Veens gebulte Pascaert.*"

Blz. 85—97. Drie »Objectiën bij Hessel Gerryts."

Thans behandelt hij vijf door hem gestelde vragen, met de daarop gegeven antwoorden door de vroeger genoemde vijf personen. Bij het eenige antwoord, door HENRICK REYERSSEN gegeven, laat schrijver de bij zijne bedaarde, bescheiden toon, opmerkelijke klacht volgen:

„Met verlof/ Vrage? Waerō hebt ghy de andere vraghen niet beantwoort? Oft cont ghy. geen antwoort becomen/ daer d'andere die gehaelt hebben? [by Blaeu]. Hy sprack immers al/ || doen hy u experientie sochten. Voorwaer my iammert uwes/ dat ghy u dus hebt laten || verleyden/ op datse haer vuyl met u mochten uytwasschen, hebt ghy self niet diemael teghen || my bekent dat ghy... verclaerden Willem Janssen ende Mr. Sybrant " verstoort te hebben/ om dat ghy met my in dier meyninge waert... dat ghy seydet met Willem Janss geen doen te || willen hebben ' ende om dat ghy soudt moeten verclaren dat hy nood hoorde/ hy cond u goet doen/ || dattet u oock onlanghs wel vyftich gulden hadde geschaet (soo ick recht onthouden heb) om dat || ghy de ghebulte Caerten voor zijn Caerten met wassende graden prefereerde... dewyle ghy dit alles weet en een || man inde Zeevaert/ vol van experientie zyt/ die oock by alle menschē voore en uytnemēde Stuyr: || man gheholden wordt/ en oock voor mocht bestaen/ hebt ghy seg ick dan oock niet connen mer: || ken/ datse meer u experientie (alsoo by haer gheen was) als u eere hebben ghesocht om haer doē || een beter aensien te maken/ dat verwondert my!"

Het schijnt dus dat BLAEU, misschien door vrees voor zijn eigene kaarten, die dan ook terecht zoo beroemd zijn, gedreven werd, om alles tegen te werken, wat op dit gebied anders te voorschijn kwam.

Ten slotte blz. 109. Zijn nareden bij wijze van gesprek tusschen de Waerheyt, de Natuerlycke Reden en een Ouden. Dit is naar de toenmalige wijze der zeelieden doorvlochten met godsdienstige opmerkingen, zelfs versen. Hij eindigt met de woorden:

»*Siet dit sprack*, Natuyrlycke Reden, *met sulcken eernste ende bevallichheyt* || *dat t'om te verheughen was* || Daerom || Weest Van een Der Ley, sin. || *Rom.* 12. || *Finis.*"

3. In 1619 verscheen zijn »'t Gezicht des groten Zeevaert" 10). In de »Toe-eygen-Brief" aan Prins Maurits deelt hij nog verder mede, hoe het met zijn Generale Regel gegaan is.

„Van welcke Regul Generael de waerheyt te weten, uwer Ho. Mo.= || inden jare 1617 bewogen zyn/ te roepen voor hare Ho. Mo. E. Commis= || sarisen/ beyde Theoristen ende Prac= ticyns/ om de selve te laten exami= || neren/ gelyck 't geschiet is/ dat die niet alleen verclaert worde een Ge= || neralen Regul te wesen/ ende dat sy/ die te vooren blind waren/ door || de selve sagen/ end' oock de eenichste Regul/ om tot een Generale re= || formatie over de Groote Zeevaert te comen: Maer dat de selfde het || volghende jaer inder daed deur 'texperiment als een Generalen Regul || des Ghesichts devonden is. Gelyck uwer Ho. Mo, en Doorluchtighe || Heeren/ etc. uyt de verclaringhe (soo van Theoristen als experimen= || tisten) mede ghebleecken is."

Men ziet hieruit, dat onze schrijver hier een geheel anderen toon aanslaat, dan wel vroeger. En zulks is dan ook niet vreemd; toen was hij remonstrant, thans had hij zijn doel bereikt. Het is waarschijnlijk, dat hem hierbij de hulp van Mulerius, een der Examinateuren, van grooten dienst is geweest; waarover straks later. Op dien toe-eygen-Brief volgt een zeer fraai geëtst portrait door P. Feddes Harlingensis, met het randschrift »Ian Henricks Iarichs || vander Ley. oud 53." Daarboven zijn wapen: daaronder zijn spreuk: »Weest een Derley sins." Geteekend: P. Hars *pinx.* & *fecit*". Onder dit portret het gedicht

Caligo magna, coecitusque Temporum
Adflârat altis Nauitas erroribus:
Huic visa lux est. Pervium post hac mare
Eöus, Afer, Belga debebunt viro.

P. Winsemius.

In verso van dit portret, is een vraagstuk opgegeven.

Aen de Const beminners.

Het ghegeven sy AB, $3\frac{5}{7}$ lanck,
Soeckt nu een linie sonder te caculeren, [sic]
End' sonder eenige Instrumentens dwanck,
Dan als Passer en Liniael om consts vermeren:
Die een zyd' sy eens *cubus*, van inhoud als boven,
Uit bewys-reden, niet Aritmetice ghehaelt:
Maer meet-constigh, datmen 't vastelijck moet loven:
Staende in een Cirkel rond mede bepaelt,
In sulcker voegen als hier voor des Tytels werck,
Sonder de linie t'nemen van 'tghegeven perk.

A———————————————B

Mathematico.

Niet ingevuld; denkelijk dienende, als opdracht aan bijzondere personen; in het exemplaar, dat ik voor mij heb, is ingevuld »Nno." met inkt.

Daarop volgt een brief van NICOLAVS MULERIVS, gedateerd »In Groningen den 20 Novemb. 1619.", waarin deze o. a. zegt.

»Onder welcke || Consten twee syn diemen moet houden voor de vernaemste, || ende principaelsten: namentlyck, de *Zeevaert* ende de *Const* || *van Wapens....* Men moet dit || voor een vaste maxime aennemen: *Dat de cleyne Vrybuyters roven ter Zee, maer die groote Vrybuyters* || *dryven haer neeringe te lande.* Tegen beyde moetmen sich rusten, ende waecken, stadich een || oogh int seyl houdende.... Ende somen wilde sustineren dat onse || luyden alle andere natien overtreffen in de Zeevaert, soude dat oock een misslaen wesen? Ick || meene neen. Niet te min is het notoir, dat inde Const vande groot Zee-vaert niet weynich || mangels is, soo veel als het *Oost*, ende *West* belangt: Om 't welcke mangel te beteren hebben, || verscheyden geesten, sedert eenighe jaren herwaerts, seer beesich geweest. Maar niemant heeft || tot noch toe de saecke meer gheholpen (myns bedunkens) als *Jan Henrick Iarichs*, Ontfanger || van de Amiraliteyts Collegie

in Vrieslandt. Hy en heefter oock geen arbeyt noch geen costen || aen gespaert. Ten eersten, heeft hy ghevonden een nieu fatsoen van *Pas-Caerten* met door || schynende Loopers, daer mede de Zee-vaert grotelycx geryvet, ende gedient is. Ten anderen, || is door hem met vlytich, ende Constich arbeyt geinventeert een nieu regul, dien hy noemt || Generale Regul, dienende om 't Stuyrmans stick, op behoudē courssen, ende eervaren gissingen || eerst gestelt, bequamelyc t'examineeren, ende na de Const te rectificeren, so wel inde lengte, als || in de breete, dat is so wel Oost, en West, als Zuyd, en Noord..., Wanneer || men wel insiet des Reguls gront, ende daer by stelt 't gheene de Stuyrluyden plegen te doen, || ende noch doen, men sal moeten bekennen, dat de Const van de Zee-vaert door d'Ontfangers || Inventie merkelyck gebetert is.... Soo doende sullen sy vaster gaen, ende minst doolen. Alle vraye Consten || zyn niet tseffens maer van trap tot trap opgeclommen. T geene datter noch aen mochte ghe- || breecken ofte beter gestelt conde worden, hebben wy te hoopen, dat hy Ontfanger 't selve || noch mach vervullen, ende verhooghen, soo God hem 't leven gunt, ende de menschen hem || oorsake geven om met een nieuwe couragie voort te varen."

Dit bedaarde, gunstige oordeel zal de schrijver zeker ten goede zijn gekomen, en den tegenstand denkelijk wel wat bedaard hebben.

In een »*Aende Const-lievende Leser*" merkt onze schrijver op, »d'Inventeur heeft hem in 't || Gulden Zegel.... gerefereert || tot verscheyden propositien van 't voorsz. Gesicht.... Maer so ick 't Gesicht || zedert verandert en 'tgeene voor quam te staen wel achter en || 'tachterste voor heb gebracht: In sommige formen, niet alleen || van naem verandert, maar oock eenighe formen daer by ghevoecht.... Dat dese veranderinge geschiet || is, comt dat de Regul, op dese maniere bequaemst beschreven ende verclaert wordt."

In dit boek wordt nu, na een 20tal Bepalingen omtrent de te behandelen zaken, de Generale Regul/... mitsgaders de aert ende natuyre vande courssen der selver voor het eerst in een volledig stel van 23 Propositien [blz. 113 staat »Twee-

en twintichste Propositie", moet zijn 23 ste.] behandeld, met tal van passingen, regulen, exempels, voor-vallen, vermaninghen en aenwysinghen.

Na de »FINIS" (blz. 125) volgt een schrijven van „de Staten Ghenerael" »Aende Heeren ghecommitteerde Raden ter Admiraliteyt || residerende tot Rotterdam" met verzoek dit boek te willen examineren, gedateerd „uyt den Hage den een-en-twintichsten Novembris 1615", waarop »COPYE" van het zeer gunstige Rapport volgt. „den 1. December xvj c ende vyf-thien/ ende was ondertepckent Pieter Dirks Karre. || Matelief de Jonghe. [De eerste was Equipage-Meester, de tweede heette Cornelis]. De selve heb- || ben doen vergaderen/ eerstelijck Mr. David Davidts docerende de selve Zeevaert binnen || Rotterdam/ ende Pieter Cornelissen, alias Pieter met zyn bil-len/ Jan Claesz. Bal, Ian Kunst || Stuyrluyden/ ende Vigoreux vander Linde Schipper/ alle residerende binnen Rotterdam."

Daerop volgt weder een schrijven van „De Staten Generael der Vereenichde Nederlanden uyt den Haghe den xvij. November 1617." Hierin komt voor

... alsoo wy gehoort hebbende... dat de || Examinateurs (by ons alhier expres beschreven) vanden Ghaneralen Regel|| van 't Gesicht des groten Zee-vaerts van IAN HENRICK IARICHS|| Ontfanger Generael van het Collegie ter Admiraliteyt binnen Dockum (als namentlyc || DOCTOR WILLEBRORDVS SNELLIVS Professor tot Leyden/ Mr. SY- || MON STEVYN Ingenieur, ende JAN PIETERSEN Douwe Geometer tot || Leyden, als Theoristen hun de Mathematische Konsten ten besten verstaende, MEL- || CHIOR van KERCK-HOVEN. IAN CORNELISZ. Const, Schipper van || het Schip Delft/ ende Mr. IORIS CAROLVS Leer-Meyster ende Stuyrman || vande Const der grooter Zeevaert binnen Enckhuysen, als Practicijns (op langhe ende verre Reysen geweest zijnde/ende hun inde Conste vande groote Zeevaert ten besten ver- || staende en gheoeffent zijnde) verclaren ende advyseren/ dat den voorschreven Generalen || Regul subtyl ende op goede Regulen van Geometrie ghefondeert is/ ende dat oock de || voorschreven Practicijns de selve niet alleene mede voor eenen Generalen Regul verclae || ren ende dat sy dien sullen volghen... Soo hebben wy

ten dien- || ste vanden Lande/ goedt ende noodich ghevonden dat daer van met den eersten een goedt || Experiment werdt ghenomen by ervarene Stuyr- || luyden ende Schippers/ hun des ver- || staende. Ende gheaccordeert dat by U. L, eene bequame Jacht van veertigh Lasten ten || selven fyne zal werden toe gerust/ omme met de Voortyt in Zee te mogen uytloopen."

En hierachter laat schrijver volgen.

„Waerop het volghende Jaer 1618 by de voorghemelte Heeren Raden ter Amirali- || teyt tot Rotterdam een wel ghemonteerd Schip van hondert Lasten g'equi- || peert/ ende deur den Capi- teyn Caerl Nijs, Ghewaldighe Profoost vande Ho. Mo, Hee- ren || Staten Generael/ Johan Buys Comys, ende Mr, Ioris Carolus Schipper ende opper stuyr- || man als superintendenten/ midtsgaders de stuyr-luyden (vande vyf respective Collegien || ter Amiraliteyt) 't experiment vande voorschreven Generalen Regul ghedaen is."

Ik wil echter van dit werk niet afstappen zonder een geheel eigenaardige zinsnede uit de »Toe-eygen-brief" mede te deelen. Handelende over de „mug-zifterijen (die zy in haer eyghen selfs || doen/ in 't minste niet aen-roerden)" zegt hij van die „wedersprekers."

„Verwach- || ten een ander maniere (als willende het selfde deur vaste Starren (van || een contrari Loop als D'ordinantie Gods is) aen-ghewesen hebben: || maer al te vergeefs. Want had het God soo belieft/ hy had een ander || Hemel met vaste Starren gheschapen/ die zyu loop van 't Zuyden na 't || Noor- den/ oft van 't Noorden na 't Zuyden dede/ gelyck dese haer loop || van 't West na 't Oost heeft. Maer soo den Almach- tighen ende alwetende Godt bekend was/ wat de Stuyr-luyden van nooden waer/ heeft || deur zyne voorsienicheyt haer deur een ander wech willen leyden/ daer || mede sy tot inde behouden ha- ven conden gheraecken/ want zijn alwe- || tenheyt wiste wel... Soo hy dan so een || Hemel al habde geschapen/ die zijn loop na 't zuyden oft noorden dede/ || dat sy haer daer op verlaten souden/ en... haer lichtelijck bebroghen conden vinden/ en over sulck in || groot peryckel van Lijf/ Schip/ en goet te verliesen ge- raken."

Tot zulke redeneeringen gaf de Theorie van »der Sonne beweging en de Aardrycks stilstant," aanleiding!

4. In het volgende jaar 1620 verscheen de »*VOYAGE* ‖ Vant Experiment vanden Generalen Regul des Gesichts van de Groote Zeevaert" [11]). Ook voor dit werk schreef hij in opgewekte stemming wederom een *TOE-EYGHEN-BRIEF* aan Prins MAURITS, waaruit ik het volgende wil overnemen.

»Hebbe daer tegens [de groote misbruycken van de Stuerluyden] al over ‖ langh verbeteringe ghesocht, ende eyntelyck voorgenomen myne geinventeerde ‖ generale Regule vant Ghesicht des Grooten Zeevaerts in het licht te gheven, nae ‖ dat al vooren uwe Princelycke Excell. daer van by my openinghe.... oock door eenighe ervarene ‖ Mathematicos, Examen ende ondersoeck was ghedaen, als de selve uwe Excell. ‖ vellicht noch sich sal weten ende genadelyck believen 't erinneren. [Men ziet dat hij zijne vroegere tegenstanders toch alle eer geeft]. Zeedert ende ‖ inde tydt van acht Iaren is de selve als een kostelycken rouwen Diamant, met ‖ de scherpste stoffe van jalousie ende nydigheydt, oock tot myn excessive arbeydt ‖ ende kosten dier voegen gheslepen, ende bereyt dat sy nu eyntlyck by experientie ‖ selve bevonden is, sodanigh te zyn gelyck van my ten beginne werde gesustineert: ‖ ... T'welck alsoo bysonder ende claerlyck is gebleken ‖ inde Voyage by ordre vanden Hooch-ghedachte Heeren Staten Generael, verle- ‖ den Iare, vanden Gewaldigen Provoost Generael *Carel Nys* gedaen."

In dezen Brief komt een schrijven voor van Professor NICOLAUS MULERIUS over den oorsprong van het woord »Admiraal", dat naar 't Arabisch eigentlijk Ammiraal zoude moeten zijn. VAN DER LEY volgt daarbij eene andere schrijfwijze »Aen D'Meer all" onder opmerking o. a. dat, »de tijdt, inde Name oock self besloten, nimmer uyt 's Menschen memorie komen kan." [»Aen D. MeeraLL" geeft toch 1600].

Na deze opdracht volgt weder hetzelfde fraaie portret als in het vorige boek; in verso komt dadelijk, met andere, gothische letter, dezelfde brief van NICOLAUS MULERIUS als daar. Maar dan volgt een merkwaardig produkt van dien tijd, gemaakt door MARTINUS HAMCONIUS FRISIUS.

»In regulam Marinam industrij & solertis viri ac Domini D. Joannis Henrici Jarichs de Ley, Carmer Acrosticon & Chronographicum.

I *ndolo Johannes*	**H** *enricus Frisi peracr*	**I**
O *ceanum lustrans,*	**E** *rrantium ubique pericl*	**A**
H *orret, &, inventa*	**N** *unquam prius arte, medetu*	**R**,
A *lmae Mathematici*	**R** *eddit quam Regula libr*	**I**.
N *unc ego exultans*	**I** *nventum Navita ob acre ho*	**C**
N *umini & Auctori*	**C** *laro quasi carmine Sidrac*	**H**
I *ubila & aeternis*	**O** *pus altum extolle camaeni*	**S**

Oceanus.

IohanneHenrICo Patre, & genItrICe MathesI,
Longi eCCe haVd *) LatI, est RegVLa nata saLIs.

Nepthunus.

OCeano InspeCto, pontI CaeLIqVe perItIs
RegVLa repperta est Certa MarIna IarIChs †).

Tethys.

ECCe IaIChs BataVos, HIspanos §) dItat & AngLos:
FrIsICa LaVs Indos aC Gara Mantas adIt.

Triton.

PsaLLIte ChrIstIColae, MarIs aVfert FrIso perICLa:
BeLgaVIro grates, AngLe, & Ibere, refer.

Regula Marina.

DoCCoMII nasCor, ponto CoLor, approbor Hagae:
Arte **) poLos CVdens, portVbVs Indo rates".

Uit het reisverhaal blijkt vooreerst, dat het schip »Bruyn-Visch" heette „groot ontrent hondert lasten/ ende || het selve met alle provisie van Dorloghe wel voorzien/ ende ghe- || mant met vier ende sestich koppen... Carel Nijs haren Ghewaldiger Pro- || voost Generael vanden Legher/ ende Capiteyn Superin- tendent/ neffens den Comps || Johan Buys, ende Meester Ioris

*) *Litera* D. *more veteri non numeratur.*

†) *Singula disticha habent annum* 1618.

§) *Nunc arte mox auro.*

**) *Ad ortum et occasum.*

Carolus Schipper ende Opper-Stuyrman van Enck- || huysen, mede Superintendenten, inden Jare seslthien-hondert achtthien, den vierden Juny] nieuwe Stijls, wesende den tweeden Pincxter- dagh, ontrent thien uren voor middagh, de || Maes ... uyt- gheloopen, met Caspar van ⁚ Donderen van Doccum, van weghen de Generaliteyt, mitsgaders 't Collegie ter Amira- || liteyt in Vrieslandt, Arent Ianssz van Rotterdam, Denys Ianssz [van Casant] van Middelborgh. Cor- || nelis Ianssz [van Vlielandt] van Amsterdam, ende Ian Ianssz van Enckhuysen voornoemt als Stuyr-luyden || van weghen d'Ed. Moghende Heeren Raden ter Amiraliteyt van de respective Collegien || ghecommitteert". waarbij later nog genoemd worden

Lambart Heyxan van Leeuwaerden, gheappoincteerde over het Experiment, [misschien wel vertegenwoordiger van VAN DER LEY].

Meester Abraham, Diamant-Slijper, Gerrit Thomissz. Bel van Rotterdam, Bottelier, die 23 September overleed. „Den 25. November zynse teghen den avondt voor den Briel ghekomen."

En nu gaat (blz. 44) onze schrijver over tot het vergelijken van zijn uitkomsten met de nieuwe globen van Jodocus Hondius, en met Willem Janssen groote verbeterde Globus, en vindt daarbij, dat er groote verschillen bestaan waaronder hij er drie meer bepaald uitwerkt.

Lengteverschil van Harrfiord (Island) en Schoon-Eylandt. 31⁰ (Hondius) 22⁰ 30′ (Janssen) 32⁰ 20′ (Experiment).

Lengteverschil van Schoon-Eylandt en Tayael.
24⁰ 30′ (Hondius) 20⁰ (Janssen) 25⁰ 27′ (Experiment).

Lengteverschil Tayael en Cobo Finis Terrae.
17⁰ 15′ (Hondius) 20⁰ 10′ (Janssen) 20⁰ 15′ (Experiment).

Bij deze beschouwingen en de gevolgtrekkingen daaruit ten voordeel van den Generalen Regel, vermeldt schrijver nog de „Pas-caerten van Cornelis Doedis, Willem Janssen, Evers Gysberts van Edam [die het tweede der opgegeven lengteverschillen op 29⁰ 4′ bepaald had] Arien ende Maerten Jans Zonen van Edam" [blz. 48].

AANTEEKENINGEN.

1) Het Gulden Zeeghel || Des grooten || ZEEVAERTS. || Daerinne beschreve wordt de waerachtige grondt vande Zeylstreecken en platte Pas-caerten (voor desen noyt bekent) waermet als onder een secreten || Zeeghel de ghenerale Regule vant gesicht des groote Zeevaerts, bevestight en tot zijn vollencomen perfectie gebracht wordt/ dienende tot een Voorlooper || vande voorschreven Regule/ daerinne mede ghesien worden/ de onbehoorlijcke Procedueren die de wedersprekers teghen de selve ende het ghemeene- || beste drie Jaren lanck hebben gheplecht. || Beschreven ende int licht ghebracht deur || JAN HENRICK JARICHS VAN DER LEY, || Ontfangher Gheneraal der ghemeene middelen vande uyt en invoerende goederen in || VRIESLANDT, Stadt GRONINGHEN ende OMLANDEN. || Vignette: twee concentrische cirkels, waartusschen „Den Circkel Is soo gemeen dat de kinderen den Selven weten te maken. Maer zijn vermogen, natuere en eygenschap recht te weten, Is een groote sake. Het welcke niemant volcomen weet dan Godt alleen. LVD. COL. in boeck van Circkel." Een horizontale middellijn van den binnensten cirkel, is in twee stukken verdeeld AE en EO, waarboven staat 33 en $48\frac{31}{33}$: PEF staat loodrecht op AO: langs de koorde AP staat „*De rechte weg dwaelt niet.*" Aan de benedenzijde van dien cirkel rust daarop een zegelring met een kompas er op, en daarboven een passer: onder aan den ring staat 1, boven het kompas 2 en boven den passer 3: binnen den ring leest men „In alle dri ist volcomen." Ter wederzijde van deze gegraveerde vignette is gedrukt links: van beneden naar boven

Ghelijck hier int Gulden Zeeghel/
Dé gront der Zeyl-streken verclaert zijn/
Soeckt/ ghij vindt den Gulden-Regel/

en rechts, van boven naar beneden,

„Int wesen van desen ghebaert/ fijn,
Met oock een Even-redenheyt.
Aen een volghend: ghelijck men seyt."

Onder aan de bladzijde staat:

Tot Leeuwarden/ by Abraham vanden Rade/ Boeck-Drucker Ordinaris. 1615. Folio oblong.

In verso van dezen titel het „Extract uyt de Privilegie" gedateerd „in s' Graven-haghe den xxiiien, Juny 1615," waaronder

„Siet niet *Zoile* vileyn, Op de stijl de slecht „is,
Maer ordelt hier alleyn, Wat van beyden recht „is."

Daarop blz. 3—13 „Voor-Reden" „Aenden ... Furst ende || Heere MAVRITIVS PRINCE van Orangien, ... Mitsgaders/ || ... mijn Heeren de Raden van de Admirali- || teyt ..." gedateerd „Actum Dockum den 12,7 bris. 1614."

Blz. 14—19. Een „Aende Const-lievende Lesers, mitsgaders alle Stuyrluyden."

Blz. 20. Brief van *Die Staten Ghenerael* [Aende Admiraliteyt tot Amsterdam].

Blz. 23—114. Het werk met platen N°. 1—28, veelal op de versos gedrukt.

Onder aan op blz. 114

„Deerom || Weest VAN een DER LEY sin. || *Rom.* 12 || FINIS." Dan de Errata.

Blz. 115 niet gepagineerd. „Cort inhoudt deses Boecks."

Signatuur A—P.

2) WILLEM JANSSEN [BLAEU] Licht der Zeevaert. 3e Dl. Amst. 1621. Folio oblong. Zie Bouwstoffen N°. XX, Aant. 4.

De tweede druk heeft een gegraveerden titel.

2a) HET || LICHT DER ZEEVAERT || daerinne claerlijck beschreven ende afghebeeldet || werdē/ alle de Custen ende Havenen/ vande Westersche/ Noordsche/ Oostersche ende || Middellandtsche Zee'n. Oock van vele Landen/ Eylanden ende plaetsen van Guinea/ || Brasilien/ Oost ende West-Indien. || Wt de alderbeste Zeebeschryvers gheschriften (als Lucas Jansz. waghe- || naer ende meer andere) eensdeels vergadert: maer uyt vele ervarene Zeevaerders || schriften ende mondtlijcke verclaringhen van alle verlopen ghebetert, ende met || veel nieuwe beschrijvinghen ende Caerten seer vermeerdert. Alles ghedeelt in || vier boecken, waer van yders inhoudt voor elck uytghedruckt staet. || *Hier zijn bijghevoeght (beneffens eene onderwysinghe in de conste der Zeevaert) nieuwe tafelen van der* || *Zonnen declinatie, gherekent uyt de observatien van Tycho Brahe, ende gherecht op de Meridiaen* || *van Amsterdam. Midsgaders nieuwe tafelen ende onderwijs van 't recht ghebruyck der* || *Noordsterre ende andere vaste sterren. alle Zeevarēde luyden te nut ghedaen:* || DOOR WILLEM IANS ZOON. || Vignette: boekdrukkers-ornament. || TOT AMSTERDAM. || *Ghedruckt bij Jan Janszoon, wonende op 't Water,* || *inde Pas-kaert. Anno* 1627.

Deze titel staat op een steen tusschen een stuurman links onder het wapen van Holland, en een bootsman rechts onder het wapen van Amsterdam. De geheele onderrand van het titelblad wordt ingenomen door een fraai gezicht op Amsterdam, uit het Y genomen. Folio oblong.

In verso van den titel een „KLINCK-DICHT OP HET LICHT DER ZEE-VAERT" en een vers „TOT DEN BERISPER", beide geteekend „*Recht moet recht zijn.* Z. H."

Daarop een gegraveerde plaat, eene zeilende vloot tusschen Neptunus en Aeolus: daarboven een scheeps-lantaarn brandende; daaronder een Zeevaarts-school met veertien personen. In verso een gedicht van *P. C. Hooft*, „OP HET LICHT DER || ZEE-VAERT" [waarboven de Hollandsche Leeuw in den tuin].

„En was den Leeuw zijn hert niet grooter als zijn nest,
Neptunus had hem goed, door nootdrufts noot te temmen;
Maer zijn verstaelde borst sich barnen kreunt, noch bremmē,
Van Scyll' oft haer ghebuyr; springht uyt der duynen vest,
Om onvermoeyelijck, Noord, Zuyden, Oost en West,
D'onburgherlycke Zee, zijn als nae, door te swemmen.
Den Vorck des Zee-Gods, om d'oneffen vloe'n te kemmen,
O Prins der dieren, drijft hier aen u strandt int lest.
Dit Boeck, dat wijst, om u in 't varen vaer t'ontslaen,
Der Klippen dreyghen, en der Bancken laghen aen:
Het leert u 'sHemels oordt, bij menigh helder teeken
En weetmen van haer wegh en tredt gheen wis bescheydt;
De Sterren zijn in Zee nauw meer als duysterheyt;
Soo werdt dan door dit Licht des Hemels licht ontsteecken."

Daarop een opdracht aan de Staten Generael en Prince Maurits (2 blz.) een „Tot den Goedtwilligen Leser" (2 blz.). Daarop

A—F. (24 bladz. ongepagineerd) „Corte ende clare Inleydinghe tot het verstant van || de Hemelsche Spherae, in soo veele/ als tot de conste der || Zeevaert van noode is."

Dan titel van 1626, EERSTE BOECK, overeenkomende met dien in Noot 4 van Bouwstoffen N°. XX.

A—P. Blz. 1-119 bevattende 17 Capittelen, 19 Caerten en 134 Landverkenningen.

Dan titel van 1625. TWEEDE BOECK, van denzelfden vorm.

a—v. Blz. 1—131, bevattende 20 Capittelen, Caerten 20—41, en 133 landverkenninghen.

[3]* SYBRANDT. HANSZ [CARDINAEL]. Hondert Geometrische Questien. Amst. 1612. 4°. Zie Bouwst. N°. XXI, Aant. 49.

*) De eerste uitgaaf is te Amsterdam 1614. Een tweede is het volgende werk.

De vaste Grondt || Der Loflycker Zee-vaert/ || Waer in 't samen sprekende wijse tusschen Jaep ende Veer ge- || leert wort/ hoe een Stierman zijn Graet-boge Astrolabium ende || andere Zee-Instrumenten/ die tot de groote Zee-vaert noo- || dich zijn met goet fondament sal ghebruycken. || Dienstich voor alle Lief-hebbers der Zee-vaert, ende voorne- || melyck voor die gene/ die 't Stiermanschap met goet oordeel || ende verstandt begheeren te bedienen. || Beschreven door Heyndrick Reyersz.: Stierman onderwijsende || in de Konst vande groote Zee-vaert. || Noch is hier by ghevoegt een Declinatie vande vaste Ster- || ren naer de observatie vanden Ghelcerden Ticho Brahe. || Mitsgaders eenige Tafelen aenwijsende 'tgantsche jaer door || de Ascensio recta der Sonnen/ en eenige vaste Sterren: waer door men || sonder eenigh instrument by 'tgesicht, aen de Sterren/ de uren by nachte kan || vinden. Noch isser het Sterre-Liedt van Robbert Robberts by gedaen. || Vignette: een schip met volle zeilen. || Tot Amstelredam, || By Dirc Pietersz: Boec-verkoper/ wonende op 't Water inde || Witte Pers/ by de Oude Brugge/ recht over de koren-Marct. 1622. 4°.

A—D. Blz. 1—32.

Blz. 3, 4. „Tot den Leer-Gierighen Lezer."

Blz. 5—26. „De vaste grondt der Zee-Vaert. || 'Tsamen sprekender wijze ghehouden in Zee binnen || Scheeps-boort, tusschen *Ianssens Iaep*, ende *Reynier de Veer*," met 6 figuren in de tekst, en 1 plaat.

Blz. 26, 27. Tafel van de principaelste Stucken in deze 'tsamen- || spreeckinghe verhandelt."

Blz. 28—30. Tafelen.

Blz. 31—32. Sterre-Liedt bij Robbert Robberts. Geteekend „Een 0 in 't Cyfer."

Van dit werk een herdruk, met geheel anderen titel.

**) Jaep en Veer, || Of || Stuurmans Praetjen. || Waer in de vaste grondt der Loflijcker || Zee-vaert met bondige redenen, bewesen wort, so in 't || gebruyck van 't Compas, Graed- boge en Astrolabium, als || andere Zee-Instrumenten, tot dienst van alle Zee-Matroosen, en || Lief-hebbers der konste. || Beschreven door wijlen Hendrick Reyersz, Opper- || Stierman op Oost en West-Indien/ Meester inde || groote Zee-vaert. || Hier is by gevoeght een declinatie van de vaste Sterren, || na de observatien van Ticho Brahe, alsmede eenige || Tafelen vande Ascensio recta der Sonne en vaste Sterren; waer by || men oock, by nachte, de uren kan vinden. En het sterre- || Liedt van Robbert Robberts. || De laetste druck/ naerstigh oversien/ en van vele feylen gebetert || met aenteekeningen op de kant/ en byvoegingen vande Graed-boge. || Vignette: een zeeman met peillood. || t'Amstelredam, || Gedruckt by Jacob Theunissz. Boeck-verkooper op 't Water/ || in de Loots-man/ 1651. 4°.

A—D. Blz. 1—32.

Blz. 3, 4. „HENDRICK REYERS, || Aen alle Schippers, Zee-Matrosen en || Lief-hebbers der Loflycker Zee-vaert."

Blz. 5—26. „JAEP en VEER, || 'Tsamen-sprekender wijse gehouden," alles hetzelfde als boven.

Dan Nota, waarom de inhouds-tafel hier ontbreekt.

Blz. 27—32. Even als boven.

Een volgende herdruk heeft wederom een geheel anderen titel.

4b)* **Stuurmans Praetje** || Tusschen || Jaep en Veer, || **Nieuwelijck vermeerdert door een Lief-** || **hebber** der ZEEVAERT. || Vignette: het wapen van Amsterdam. || t'AMSTELREDAM. || **By** JACOB COLOM, **Boeckverkooper op 't** || **Water in de Vyerige Colom/** ANNO 1..7 [denkelijk 1667]. 4°.

Voorrede ontbreekt.

Blz. 3—32. „t'Samen-sprake ghehouden enz." wederom hetzelfde als in het vorige werk.

Blz. 33—36. „'t Gebruyck des Noordsters, alsmen die peylt na de || Wachters en het noorderste achterwiel des grooten Wagens."

Het jaartal is aldus bepaald, omdat het zeker na dat van de uitgave Noot 4a) moet vallen: en de uitgave van Jacob Colom stellig niet later zijn dan 1674.

Er bestaat nog een druk, waarin voorkomt „alsmede een nieu Sterreliedt van L. J. SINCK." Amsterdam 1654. 4°.

5) HET || GHEBRVYCK || DER NAELD-VVIISINGE || TOT DIENSTE DER || zeevaert beschreven. || *DOOR* || *BARENT EVERTSZ. KETELTAS lief-hebber der Ma-* || *tematische conste tot Amsterdam.* || Hier by ghevoeght een perfecte Tafel van der Sonnen Declinatie, || volghens den Meridiaen van Hollandt. || *Als oock de t'samenstellingh eenes Instruments, waer doormen can vin-* || *den de verhooginge des Werelts aspunten sonder hulpe van Son Maen ofte Ster.* || Vignette: eene aardglobe waarnaast twee personen, waaronder op een stuk perkament

„Die t's Werelts grooten cloot Neptuns woeste contryen
Doorridet allesins op 's Hemels lichten let,
Nae d'Astronomische raedt u voorsichtelijck set
Soo can den dullen Wint noch den stroom u verleyen."

t'AMSTELREDAM, || **By Carent Otss. Boeckdrucker/ woonende buyten de** || **Oude Reguliers poort/ inde nieuwe Druckerij.** Anno 1609. 4°.

In verso van den titel het Privilegie „ghedateerd den 18. Octobris 1608."

Dan een latijnsch gedicht van *R. Lubbaeus*: te zamen 1 blz.; dan „*Claudianus de Magnete,*" gedicht, 1 blz.; nog twee hollandsche verzen, 1 blz. De opdracht aan „VORST ENDE HEERE MAVRITS", gedateerd „uyt Amsterdam den 4. Ju||lius 1609." (4 blz.) „Tot den Piloten ende lief-

hebbers" en „Clinck-ghedicht. || *Op den Gheestelijcken Magneet"* door E. L. 4 blz. Alles te zamen A. 8 blz.

B—M. Blz. 1—65, en 19 blz. ongepagineerd.

Blz. 1—64. „CORT || VERHAEL || VANDE EYGHEN- || schappen ende werckinghe des || Magneet-steens." in 21 *Propositien*, met platen van een compas op het vaste lant (blz. 23) en op zee (blz. 30) een ander (blz. 40), horizontael compas (blz. 44) zeequadrant (blz. 49) Planispherium (blz. 51) en veranderd (blz. 60).

Blz. 65. Tafel der Sonnen Declinatie (13 blz.). Dan

„ANHANG || Waer inne voorghestelt wort een Instrument: waer || door men can waernemen de verhooginghe des Werelts aspunten || inde donckere nacht, soo wel als byden schoonen daghe, sonder || hulpe van eenighe lichten des Hemels." (5 blz.) met eene plaat.

6)* A. METIUS, Nieuwe Geographische onderwijzingen. 1614. 4°. Zie Bouwstoffen N°. XII, Aant. 26.

7) ROB. HUES. Tractaet ofte handelinghe van het gebruyck der Hemelsche en der Aertsche globe. Amst. *Cornelis Claesis*. 1597. 4°.

Herdruk. Ib. *M. Colijn*. 1612. 4°; ib. 1613. 4°; ib. 1623. 4°.

Hiervan de volgende latijnsche vertaling

7a)* TRACTATVS || DE || GLOBIS, COE- || LESTI ET TERRESTRI || EORVMQVE VSV. || *Primum conscriptus & editus à* ROBERTO HUES *Anglo* || *semelque atque iterum à* IUDOCO HONDIO *excusus, & nunc ele-* || *gantibus iconibus & figuris locupletatus: ac de novo recognitus multisque* || *Observationibus oportune illustratus ac passim auctus opera et studio* || JOHANNIS ISACII PONTANI Medici & Philosophiae || Professoris in Gymnasio Gelrico Hardervici. || Vignette: eene hemelglobe. || AMSTELODAMI. || Excudebat JUDOCUS HONDIUS, sub signo || Canis vigilantis in Platea Vitulina prope Senatori- || am Domum. ANNO CIↃ IↃ C XVII. 4°.

Verso van den titel wit. Dan de EPISTOLA DEDICATORIA", „D. FREDERICO SANDIO" (5 blz.) een „AD-LECTOREM" (1 blz.). „INDEX || PRAECIPVORVM || HVIVS TRACTATVS || CAPITVM" (5 blz.), „PRAEFATIO" (10 blz.), de verso, eene plaat. „GLOBUS, TERRESTRIS."

Alles te samen de signatuur A—C.

D—V. Blz. 1—130 het werk.

De volgende blz. bevat het drukkersmerk. Een aardglobe, waarboven een planisphaerium, op den koperen meridiaan staat „UTOR, DESCRIBO, ORNO, VITUPERO ET OPTO FIDELITER" Een hazewind zit naast die globe, met zijn linker poot er op. Daarboven „FIDELITER"; daaronder AMSTELODAMI. || Excudebat IUDOCUS HONDIUS, sub signo || Canis vigilantis in Platea Vitulina prope Senatori- || am Domum. ANNO CIↃ IↃ C XVII.

8)* S. STEVIN Wisconstighe gedachtenissen. 1608. Folio. Zie Bouwstoffen N°. XXI, Aanteek. 52.

9)* *Cosmographie.* || Ofte beschrijvinghe der ghe- || heelder Werelt/ begrypende de ghelegentheyt || ende bedeelinghe van elck landtschap ende contreye || der seluer gheschreven in Latyn door Petrus Apianus. || Gecorrigeert ende vermeerdert door M. Gamma Frisius, excellent || Geographijn ende Mathematicijn, met sommighe andere tractaten van || de selve materie, ghemaect van den voorseyden Gamma, ende hier || by gevoeght, waer af d'inhout staet in 't navolghende bladt. || Vignette: eene mappe-monde, waarboven „JEHOVA", en waaronder IODOCUS HONDIUS. || TOT AMSTELREDAM. || By Cornelis Claesz. Boecvercooper/ woonende op 't Water || in 't Schryf-boeck. Anno/ 1609. 4°. [Met beweegbare figuren].

In verso van dien titel, een negen-regelig hollandsch gedicht van „Gregorius de Bonte den Boeck || ter eeren". Dan „Het inhoudt van desen Boeck" (1 blz.). „De goetwillige beminders || der Cosmographyen" (2 blz.) „Tafel der Capittelen" (7 blz.).

A—Hh. Fol. 1—121 alleen in recto genummerd, nog 5 blz. ongepagineerd.

Fol. 1—28. „Het eerste Boeck van Cosmographien van Petrus Apianus."

Fol. 28 verso—103. „Het tweede Boeck van Cosmographien van Petrus Apianus", waarbij

Fol. 85 verso—100 verso. „Gheleghentheyt ende Beschryvinghe van Indien van Spangien".

Fol. 103 verso volgt

„Een boecxken seer nut ende || Profytelyck allen Geographiens/ leerende || hoemen eenighe plaetsen beschryven ende het verschil oft di- || stantie der selver meten sal/ welck te voren noyt ghesien en is gheweest/ || ghemaeckt by Gemmam Frisium Mathematicien ende Li- || centiaet inder Medecijnen."

De Opdracht „Den grootachtighen Heere ende Koopman/ Heere Thomasyne Gombelli", was gedateerd „uyt Antwerpen den laet- || sten Januarius Anno 1533." Dit werk eindigt folio 111 recto. De verso bevat den titel:

„Dat gebruyck ende han- || delinghe van den Astronomyschen Rinck || van Gemma Frisio Mathematicien || ende Doctoor inder || Medecinen", waaronder eene afbeelding van dit werktuig. De opdracht. „Den seer vernaemde ende || Edelen Heere/ Heer Jan Kreutter Se- || cretaris der deurluchtiger Coninghinnen Douagiere || van Hongarien" was gedateerd „Wt Loven den || eersten dach van Februario. || Anno 1534."

Dit werk eindigt weder folio 121 recto; de daarop volgende bladzijde bevatten „De Tafel van sommige seer || vermaerde Steden ende plaetsen/ inhouden || de de lenghde ende breede der seluen/ van graden || ende minuten by orden vanden A. B. C."

De laatste bladz. bevat een acrosticum op CORNELIS CLAESZOON „Het Boeck tot alle Beminders der || deuchdelycker Consten." Daaronder „PATIENTIA Victrix. || Tot Amstelredam/ by Cornelis Claesz. || Boeckvercooper, woonende op 't Water in 't Schrijf || boeck/ Anno M.VJ.C ende IX."

Op folio 5 recto komt voor de merkwaardige „figuere vande divisie der Spheren/ oft deylinghe || der Hemelen." Rondom de aarde zijn tien concentrische cirkels, getiteld: 1. LVNAE || 2. MERCVRII || 3. VENERIS || 4. SOLIS || 5. MARTIS || 6. JOVIS || 7. COELV SATVRNI || 8. Octavum Firmamentum || 9. Nonū Coelum Cristallinum, (met de teekens ven den dierenriem) || 10. Decimum Coelum Primum Mobile. Aan den buitenrand dier cirkels staat bovenaan „COELVM EMPIREVM HABITACVLVM DEI" en onderaan „ET OMNIVM ELECTORVM."

Dit werk is de hollandsche vertaling van het volgende.

9a)* PETRI APIANI || COSMOGRAPHIA || PER GEMMAM || Phrysium, apud Louanienses Medicum ac Mathema- || ticum insignem, restituta, Additis de adem re ipsius, || Gemmae Phry. libellis, vt sequens pagina docet. || Vignette: een aardglobe met de bijbehoorende losse stukken. || Vaeneunt Antuerpiae in pingui gallina Arnoldo Berckmaño. . 1 . 5 . 3 . 9." Klein folio [met beweegbare figuren],

A—P. 3 folios niet genummerd, dan Fo. IIII—LXII, alleen in recto genummerd.

In verso van den titel „CONTENTA IN HOC LIBELLO." „DIDACI PYRRHI LUSITANI CARMEN" en „DISTICHON." Daarop volgt

R. D. & Illust. Principi D. Matthaeo M. diuina sacro || sanctae Rho. ecclesiae Tit. S. Angeli Pres. Card. Ar- || chiepiscopo Saltzburgeñ Ap. Sc. Legato. &c. || Petrus Apianus (dictus Benevvitz) ex Leysnick || Mathematicae disciplinae clientulus, Salutem || etc." geteekend „Ex foelici Landisuta, Anno M . D . XXIIII . || septrimo Calend. Februarias."

Fol. III (niet genummerd)—XXIX recto. PRIMA PARS.

Fol. XXIX verso—XLIIII verso. SECUNDA PARS.

Fol. XLV recto—XLVII recto. APPENDIX.

Fol. XLVII verso—LIII verso. „LIBELLVS DE || LOCORVM DESCRIBENDORVM || ratione, & de corum distantiis inueniendis, || numquam antehac visus. || Per Gemmam Phrysium," met dezelfde opdracht als boven, in het latijn.

Fol. LIV recto (niet genummerd)—Fol. LXI recto.

„VSVS ANNVLI || ASTRONOMICI PER || Gemmam Phrysium || vignette: een geleerde, dien den ring vasthoudt ||" met dezelfde opdracht als boven, in het latijn.

Fol. LX verso—LXI verso „TABELLA LA. TITV. OPID. ALIQVOT."

Fol. LXII recto „DIDACI PYRRHI LUSITANI || CARMEN. || Loquitur Liber" een gedicht van 24 regels. Daaronder staat „Absolutum Antuerpiae per Aegidium Coppenium, || cura et impensis Arnoldi Berckman, || Anno Christiano. 1539", en in verso alleen het drukkersmerk: een grafsteen, waarop schild met een boom, waarbij een korhoen en daaronder „ARNOLDUS BIRCKMAN."

10)* Gegraveerde titel door P. FEDDES HARLINGENSIS, in folio oblong

Ter wederzijden, links PYTHAGORAS met een boek op een voetstuk, waarop een figuur voor zijn theorema; rechts EUCLIDES met een boek, waarop eene zeevaartkundige figuur, staande op een voetstuk, met meetkundige figuur; in het midden, de Heiland, die een nederhangend afgerold papier vasthoudt. Daarop weder de ring met compas, en de passer in den cirkel; waarbij in den ring de woorden: „In Drie ist volcomen." [Evenals in het boek van Noot 1; maar het omschrift van daar ontbreekt hier]. In dien cirkel is een driehoek beschreven A P Ω. AP heet „Wille. *De rechte wegh dwaelt niet.*" PΩ heet „'t Volbrengen." Om AP als middellijn is weder een cirkel, waarin „*God sprack het word Licht,*" en om AP als koorde is een tweede cirkel beschreven met dubbelen straal, die dus een groot deel van den eersten bedekt, daarin staat beneden AΩ, „*oneyndelych.*" Onder de figuur leest men „*De wet is door Mosen gegeuen. Maer de genade eñ || waerheyt is door Jesum Christum geworden. Joh.* 1 *vers* 11." En daaronder:

„*Dat in Drie 't volcomen es* [sic], *verstaetmen uyt Pythagoras Viere*
End' mede deur Euclides, daer hy 't bewyst na syne maniere.
Dat de producten vã A en Ω, in desen, eñ vã het Begin eñ Eynde sỹ eens wesen."

Verso van titel is wit. Dan een ledig titelblad; alleen staat onderaan: „Ghedruckt tot Franeker/ By Jan Lamrinck/ Boeckdrucker Ordinaris || der H. H. Staten van Frieslandt. Anno 1619."

In verso het Privilegie „in 's Gravenhage den 17den || Novembris 1617." Dan „TOE-EYGEN-BRIEF" aan de „Staten Generael... Hooch-gheboren Furst ende || HEERE || MAURITIUS.... || Met || Den Wel-gheboren HEERE || WILHELM LUDWICH,... Onsen Ghenadigen HEERE. || Mitsgaders || De E... Gedeputeerde Staten/ ende d'Heeren ter Amiraliteyt", gedateerd „Actum || Dockum. Den eersten Aug. Anno. 1619. 12 blz. ongepagineerd.

Daarop een zeer fraai portret van denzelfden graveur. Rondom staat: „JAN HENRICH JARICHS VANDER LEY, oud 53". Daarboven zijn wapen; daaronder: „Weest een DERLEY sins". Dit alles op een vierhoekig schild, waaronder een gedicht van den Historiographus P. Winsemius

„*Caligo magna caecitasque Temporum*
Adflârat altis Nauitas erroribus.
Huic visa lux est. Pervium post hac mare
Eous, Afer, Belga habebunt viro."

In verso van dit portret een wiskundige opgave in vers.

Brief van Nicolaus Mulerius, gedateerd „In Groningen den 20 Novemb. 1619." 4 blz.

Daarop een latijnsch gedicht van Menelaus Winsemius (1 blz.) een grieksch (met de latijnsche vertaling) van S. Arcerius (1 blz.) een latijnsch gedicht van P. Winsemius (2 blz.) en daarop de fransche titel: „'Tgesicht des Grooten || ZEEVAERTS. || Met de wonderbaerlycke aert ende

natuyre der coursen. Tsampt de || platte Pas-caerten met hare spherische Lopers: dienstigh om soo wel der || werelts lenghde als breete te meten (voor desen ondoen- || lyck) in de Groote Zee. || Beschreven door een Generalen Regul, ende inde aldergebruycklyckste || practyckque/ ten dienste van 't gemeene best gebracht. || Door || Jan Henricks Jarichs vander Ley, || Ontfanger Generael vande gemeene middelen der uyt- ende in- || voerende goederen in Vrieslant/ Stadt Gronin- || gen/ ende Om-landen"

Verso van den titel wit. Dan „*Aende Const-lievende Leser*" 4 blz. „Vermaninge aen alle Stuyrluyden/ hoe sy de tegenwoordighe || Caerten sonder pericul sullen gebruycken." (2 blz.) „Een geringh/ ende binlyck versoeck vande Inventeur (ten dienste || voor 'tghemeene best/ en alle Lief-hebbers vande Const der Grote || Zeevaert) aen alle Stuyr-luyden." (2 blz.) „Cort inhout van 't Ghesicht des Groten Zeevaerts." (2 blz.)

Tot dus verre XXXVI blz. ongepagineerd. Dan

A—R. Blz. 1—125. 7 blz. ongepagineerd. Op de laatste blz. staat: „Ghedrukt tot Franeker/ || By Jan Lamrinck/ Boeck-Drucker Ordinaris || der H. H. Staten van Vrieslandt. || Anno 1619."

Het werk zelf blz. 1—125, bevat eerst 20 Bepalingen: dan Propositien.

De platen, N⁰. 1—26, paskaarten, zijn meerendeels op de verso afgedrukt; bovendien nog vier stukken (doorschijnende Loopers) voor elke 10° Breedte van 30° tot 70°, waarop gedrukt is „*cum privilegio.*"

De volgende bladzijden bevatten een brief van de Staten Generael „Aen de Heeren ghecommitteerde Raden ter Admiraliteyt || residerende tot Rotterdam... uyt den Hage den een-en twintichsten Novembris 1615." (1 blz.) met een Rapport tot antwoord in Rotterdam 1 December xvjc ende vijfthien" (2 blz.) waarop een tweede brief van de Staten Generaal uyt den Haghe den xvij November 1617" (2 blz.); dan een bericht van den Schrijver, en „de fauten in 't drucken begaen" (1 blz.)

II)* *Voyage* || Vant Experiment vanden Generalen Regul des Gesichts vande Groote Zeevaert, || ghedaen door ordre. vande Doorluchtige Ho. Mo. Heeren Staten Generael der Vereenighde Nederlanden, || by *Carel Nys*, Provoost Generael vanden Legher, Capiteyn Superintendent, neffens *Johan Buys*, Commys, || ende Meester *Joris Carolus*, Schipper ende Opper-Stuyr-man, mede Superintendenten: Waer door volko- || mentlyck blyckt, dat soo wel de *Longitudo* als de *Latitudo* ghemeten is. Beschreven ende uyt-ghegheven || door *Jan Henrick Jarichs vander Ley*, Ontfangher Generael vant Collegie ter Admiraliteyt in Vries- || landt, int Jaer onses Heeren M.DC.XX. || Vignette, gegraveerd: dezelfde cirkel met passer en kompas, ook met de lijnen en het randschrift als in het boek van Noot 1; maar in de hoeken buiten den cirkel is hier bijgevoegd „*Door Numerus Radix en Zens* || *gelijck die bouen malcander staen hier* [in den ring toch staat de N., boven het kompas het teeken der tweede

macht, en boven den passer dat der derde macht] *geraekt m'In behouden haven na wensch || D'welck is de rechte Pythagoras vier.*" || Ghedruckt in 'sGraven-Haghe by Hillebrant Jacobssz., Ordinaris ende ghe- || swooren Drucker van de Ho. Mo. Heeren Staten Generael. Anno 1620" iu folio oblong.

In verso van den titel de „Privilegie, ghedaen *in 'sGraven-Haghe, opten twee-en-twintichsten || February sestkien hondert ende twintigh.*"

Dan „*Toe-Eygen-Brief* aan Mavrits ... Prince van Orangien" gedateerd „Wt Doccum, den eersten Januarius, Anno 1620." 6 blz. ongepagineerd.

Daarop hetzelfde portret als in Noot 10); en reeds in verso dezelfde brief van Nicolaus Mulerius, maar hier met gothische letter (4 blz). Dan een Carmen Acrostion et Chronographicum van Martinus Hamconius Frisius (1 blz.)

Daarop een „*Aen de Const-lievende Leser*" 4 blz. ongepagineerd.

Dit alles te zamen 16 blz. met de Signatuur A en B. Dan C—J. Blz. 1—52 en 2 blz. ongepagineerd.

Het eerste bevat de Voyage zelf met figuren N⁰. 1—7 (paskaarten), allen op de versos gedrukt.

De twee laatste blz. (ongepagineerd) bevatten latijnsch gedicht van *Cornelius Busius J. U. D.* „*Summo Mathematico* || D. Johanni Jarix || *vander Ley, Regulae suae Marinae* || *Praxin sive Experimentum* || *feliciter promul-* || *ganti* || Carmen Jambicvm."

OVER DE AANSLUITING

VAN EEN

DRIEHOEKSNET VAN LAGERE ORDE AAN DRIE PUNTEN VAN EEN NET VAN HOOGERE ORDE.

DOOR

Ch. M. SCHOLS.



§ 1. In de Vergadering van 2 April 1881 werd door mij, uitgaande van het beginsel der conforme overbrenging, eene methode ontwikkeld voor de aansluiting van een sluitend gemaakt driehoeksnet van lagere orde aan drie of meer punten van hoogere orde. Bij deze methode, die ik uitvoeriger behandeld heb in de *Verslagen en Mededeelingen*, 2de Reeks, Deel XVI, blz. 297 en vv., kwam ik, voor het bijzondere geval van de aansluiting aan *drie* punten, onder andere tot deze eenvoudige uitkomst, dat de hoeken van het secundaire net veranderingen ondergaan, die evenredig zijn met de projectiën van de overstaande zijden geprojecteerd volgens eene bepaalde richting. In de Vergadering van 26 November 1881 toonde ik aan, hoe men alleen door het aanbrengen dezer correctiën de berekening op eenvoudige wijze kan uitvoeren.

De vraag doet zich thans voor of het voor dit bijzondere geval niet voldoende is, als beginsel voorop te stellen, dat aan de hoeken correctiën worden aangebracht, die evenredig zijn met de projectiën der overstaande zijden, geprojecteerd volgens eene bepaalde richting. Is dit toch het geval, dan heeft men de theorie der conforme overbrenging in het geheel niet noodig en kan het geheele vraagstuk behandeld worden met behulp van de meer elementaire wiskunde.

Dat het aanbrengen dezer correctiën werkelijk tot het beoogde doel moet leiden, zal in de volgende bladzijden worden aangetoond, door te bewijzen dat het secundaire driehoeksnet, dat sluitend gemaakt is, door het aanbrengen dier correctiën een sluitend geheel blijft vormen en dat de aansluitingsdriehoek in het secundaire net gelijkvormig wordt aan dien driehoek in het primaire net, waaruit volgt, dat als het secundaire net aan twee punten van het primaire aangesloten wordt, het ook aan het derde punt zal aansluiten.

Tevens zal door een voorbeeld worden aangetoond, hoe men de bedoelde correctiën langs den eenvoudigsten weg kan berekenen.

§ 2. Om aan te toonen, dat het sluitend gemaakte driehoeksnet, door het aanbrengen van correctiën aan de hoeken, een sluitend geheel blijft vormen, moet men bewijzen:

1⁰. dat de som van de correctiën van de drie hoeken in iederen driehoek gelijk nul is;

2⁰. dat de som van de correctiën van de hoeken om een centraalpunt nul is; en

3⁰. dat bij een dergelijk punt de som van de correctiën van de *log sin* der links gelegen basishoeken gelijk is aan de som van de *log sin* van de rechts gelegen basishoeken; of, wat op hetzelfde neerkomt, dat de som van de correctiën van de *log sin* van de rechts gelegen basishoeken verminderd met die som voor de links gelegen basishoeken nul is.

Dat door het aanbrengen aan de hoeken van correctiën, die evenredig zijn met de projectiën van de overstaande zijden, geprojecteerd volgens eene bepaalde richting, aan de eerste voorwaarde voldaan wordt, is onmiddellijk in te zien, als men opmerkt, dat de som van de correctiën van de drie hoeken A_1, A_2 en A_6 in fig. 1 gelijk is aan de som van de projectiën $B_2 B_6$, $B_6 B_1$ en $B_1 B_2$ van de drie zijden $A_2 A_6$, $A_6 A_1$ en $A_1 A_2$ van den driehoek, dat is gelijk aan de projectie van den omtrek van eene gesloten figuur, welke projectie uit den aard der zaak nul is.

Ook aan de tweede voorwaarde wordt voldaan door de genoemde correctiën, want de correctiën der vijf hoeken om

A_6, fig. 3, zijn respectievelijk gelijk aan de projectiën $B_1 B_2$, $B_2 B_3$, $B_3 B_4$, $B_4 B_5$ en $B_5 B_1$ van de zijden $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A_5$ en $A_5 A_1$; hun som is dus ook de projectie van den omtrek van eene gesloten figuur en dus nul.

Alvorens het bewijs te leveren, dat ook aan de derde voorwaarde voldaan wordt, moeten wij nagaan de verandering, die de *log sin* van een hoek ondergaat. De correctie van hoek A_1 fig. 2 is evenredig met de projectie $B_2 B_6$ van de overstaande zijde $A_2 A_6$. Stellen wij de lengte dier zijde gelijk aan a en den hoek $F A_2 A_6$, die zij met de richting van projectie maakt, door φ voor, dan kunnen wij die correctie ΔA_1 gelijk stellen aan $K a \sin \varphi$ waarin K eene constante voorstelt. De correctie, die de *log sin* van een hoek ondergaat, is gelijk aan de correctie van den hoek vermenigvuldigd met den cotangens van dien hoek; dus:

$$\Delta \log \sin A_1 = ctg\, A_1 \, \Delta A_1 = Ka \, ctg\, A_1 \sin \varphi.$$

Trekken wij nu in fig. 2 de drie loodlijnen uit de drie hoekpunten op de overstaande zijden, dan snijden deze elkaar in een punt D. In den driehoek $A_1 D A_6$ is nu $\angle D A_6 A_1 = 90 - A_1$ en $\angle A_1 D A_6 = 180 - A_2$; hieruit volgt dus voor den afstand $A_1 D$ van het hoekpunt tot dat gemeenschappelijk snijpunt, welken afstand wij door b zullen voorstellen,

$$b = A_1 A_6 \frac{\sin (90 - A_1)}{\sin (180 - A_2)} = A_1 A_6 \frac{\cos A_1}{\sin A_2}.$$

De zijde $A_1 A_6$ is echter gelijk aan:

$$a \frac{\sin A_2}{\sin A_1},$$

waardoor b overgaat in

$$b = a \frac{\sin A_2}{\sin A_1} \cdot \frac{\cos A_1}{\sin A_2} = a \, ctg\, A_1$$

en dus de correctie van de *log sin* van A_1 in:

$$\Delta \log \sin A_1 = K b \sin \varphi.$$

Trekken wij nu door A_1 en D twee lijnen $G A_1 C_1$ en $D E$ loodrecht op de richting van projectie $A_2 B_2$, dan is $\angle G A_1 D = \angle F A_2 A_6 = \varphi$, en dus $K b \sin \varphi$ evenredig met de projectie $C_1 E$ van de lijn $A_1 D$.

Hieruit volgt dus dat de verandering, die de *log sin* van een hoek ondergaat, evenredig is met de projectie van den afstand van het hoekpunt tot aan het gemeenschappelijk snijpunt der drie hoogten, geprojecteerd volgens eene richting loodrecht op die, volgens welke de zijden moeten geprojecteerd worden om de correctiën der hoeken te vinden *).

Trekken wij nu in fig. 3 in ieder der vijf driehoeken de twee loodlijnen uit de hoekpunten aan den omtrek op de overstaande driehoekszijden en noemen wij de snijpunten van beide loodlijnen in de vijf driehoeken D_1 D_2 D_3 D_4 en D_5, dan is de som van de correctiën van de *log sin* van de rechts gelegen basishoeken evenredig met de som van de projectiën $C_1 E_1$, $C_2 E_2$, $C_3 E_3$, $C_4 E_4$ en $C_5 E_5$ van de lijnen $A_1 D_1$, $A_2 D_2$, $A_3 D_3$, $A_4 D_4$ en $A_5 D_5$. De som van de correctiën van de *log sin* van de links gelegen basishoeken is gelijk aan de som van de projectiën $C_2 E_1$, $C_3 E_2$, $C_4 E_3$, $C_5 E_4$ en $C_1 E_5$ van de lijnen $A_2 D_1$, $A_3 D_2$, $A_4 D_3$, $A_5 D_4$ en $A_1 D_5$; trekken wij deze af, dan veranderen daardoor de richtingen der lijnen en wij krijgen dus de som van de projectiën $E_1 C_2$, $E_2 C_3$, $E_3 C_4$, $E_4 C_5$ en $E_5 C_1$ van de lijnen $D_1 A_2$, $D_2 A_3$, $D_3 A_4$, $D_4 A_5$ en $D_5 A_1$. Voegen wij deze som bij de eerste, dan vinden wij voor de som van de correctiën van de *log sin* der rechts gelegen basishoeken verminderd met die som voor de links gelegen basishoeken, de som van de projectiën $C_1 E_1$, $E_1 C_2$, $C_2 E_2$, $E_2 C_3$, $C_3 E_3$, $E_3 C_4$, $C_4 E_4$, $E_4 C_5$, $C_5 E_5$ en $E_5 C_1$, dat is de projectie van de gesloten figuur $A_1 D_1 A_2 D_2 A_3 D_3 A_4 D_4 A_5 D_5 A_1$, welke projectie gelijk nul is.

Wij zien dus dat aan alle drie de voorwaarden voldaan

*) Deze stelling is in de boven aangehaalde verhandeling, voorkomende in de *Verslagen en Mededeelingen*, Deel XVI, op blz. 332 op meer omslachtige wijze aangetoond, uitgaande van de correctiën, die de coördinaten der hoekpunten ondergaan.

wordt, en het secundaire net, dus door het aanbrengen van de bedoelde correctiën aan de hoeken, een sluitend geheel blijft vormen.

§ 3. Indien men het secundaire net, waarvan de hoeken de noodige correctiën ondergaan hebben, aan twee punten van het primaire net aansluit, zal het derde punt ook aansluiten, indien slechts de aansluitingsdriehoek in het secundaire net gelijkvormig geworden is aan dienzelfden driehoek in het primaire net. Hiertoe is het voldoende, dat twee van de hoeken van dien driehoek gelijk geworden zijn aan de overeenkomstige hoeken in het primaire net. Men moet hiertoe dus over twee parameters naar willekeur kunnen beschikken, en deze parameters zijn werkelijk aanwezig; de eene wordt gevonden in den hoek waardoor de richting bepaald wordt, waarin de zijden van den driehoek geprojecteerd worden, en de tweede in den factor waarmede de projectiën vermenigvuldigd moeten worden (de factor K in de vorige paragraaf).

Hierdoor is dus aangetoond, dat door de genoemde correctiën de aansluiting werkelijk verkregen en het beoogde doel dus bereikt wordt.

§ 4. Voor de berekening van de correctiën van de hoeken kan men de eenvoudige formule:

$$K\, l \sin \varphi$$

toepassen, waarin K eene constante, l de lengte van de overstaande zijde en φ den hoek voorstelt, welke die zijde met de richting van projectie maakt. De lengten der zijden vindt men in het secundaire net berekend, het is daarbij onverschillig in welke eenheid zij zijn uitgedrukt; men kan bij die berekening uitgaan van eene benaderde lengte van eene zijde, als er eene rechtstreeks gemeten is, of ook eenvoudig een van de zijden willekeurig als eenheid aannemen *). De hoeken φ vindt men uit de hoeken der drie-

---

*) In de praktijk zal men meestal den eersten weg volgen, omdat men

noeken zoodra slechts van eene zijde bekend is den hoek, dien zij met de richting van projectie maakt.

Hiertoe worden in het secundaire net de coördinaten van de driehoekspunten van den aansluitingsdriehoek berekend ten opzichte van een coördinaten stelsel, waarvan de oorsprong samenvalt met een hoekpunt en een der assen samenvalt met de richting van een der zijden. Uit die coördinaten worden nu berekend de hoeken, die de drie zijden van den aansluitingsdriehoek met een der assen maken. Uit deze richtingshoeken vinden wij de hoeken van den aansluitingsdriehoek en deze afgetrokken van de bekende hoeken van dien driehoek in het primaire net geven de correctiën, die de eerst berekende hoeken moeten ondergaan. Uit deze correctiën zijn nu de twee bovengenoemde grootheden gemakkelijk te vinden.

Ten einde de gedachten beter te bepalen, beschouwen wij het driehoeksnet in fig. 4 voorgesteld; de punten A, B en C zijn de aansluitingspunten aan het primaire net. Uit de lijnen PN en NA, PO en OB en PQ en QC kan men de coördinaten van A, B en C berekenen ten opzichte van de lijnen PO als y-as en eene loodlijn daarop door P als x-as. Uit deze coördinaten berekend men verder de hoeken, die de zijden $BC = a$, $CA = b$ en $AB = c$ met de y-as maken; zijn deze hoeken φ_a, φ_b en φ_c, dan vindt men de hoeken A, B en C van den aansluitingsdriehoek uit:

$$A = \varphi_b - \varphi_c \pm 180^0$$
$$B = \varphi_c - \varphi_a \pm 180^0$$
$$C = \varphi_a - \varphi_b \pm 180^0.$$

Zijn deze hoeken in het primaire net nu gelijk aan A', B' en C', dan zijn

bij het berekenen van het secundaire net, soms eene benaderde waarde van enkele zijden noodig heeft, namelijk als er hoeken geoentreerd moeten worden; bij het hier volgend voorbeeld hebben wij den laatsten weg gekozen, om daardoor duidelijker te doen uitkomen, dat het geheel onverschillig is in welke eenheden de zijden van het secundaire net zijn uitgedrukt.

$$\delta A = A' - A$$
$$\delta B = B' - B$$
$$\delta C = C' - C$$

de correctiën, die de hoeken A, B en C moeten ondergaan.

Stellen wij nu den hoek, dien de zijde $P\,O$, dat is onze y-as, met de richting van projectie vormt door k voor, dan zijn deze hoeken voor de zijden a, b en c respectievelijk:

$$k + \varphi_a, \; k + \varphi_b \text{ en } k + \varphi_c$$

en hieruit volgt dus:

$$\delta A = K\, a \sin (k + \varphi_a) = K \sin k\, a \cos \varphi_a + K \cos k\, a \sin \varphi_a$$
$$\delta B = K\, b \sin (k + \varphi_b) = K \sin k\, b \cos \varphi_b + K \cos k\, b \sin \varphi_b$$
$$\delta C = K\, c \sin (k + \varphi_c) = K \sin k\, c \cos \varphi_c + K \cos k\, c \sin \varphi_c$$

of als wij de coördinaten van de hoekpunten A, B en C invoeren:

$$\delta A = K \sin k\,(y_c - y_b) + K \cos k\,(x_c - x_b)$$
$$\delta B = K \sin k\,(y_a - y_c) + K \cos k\,(x_a - x_c)$$
$$\delta C = K \sin k\,(y_b - y_a) + K \cos k\,(x_b - x_a).$$

Vermenigvuldigen wij deze vergelijkingen respectievelijk met x_a, x_b en x_c, dan vinden wij door samentelling:

$$x_a \delta A + x_b \delta B + x_c \delta C = K \sin k\,[x_a(y_c - y_b) + x_b(y_a - y_c) + x_c(y_b - y_a)]$$

en als wij hetzelfde doen na vermenigvuldiging met y_a, y_b en y_c:

$$y_a \delta A + y_b \delta B + y_c \delta C = K \cos k\,[y_a(x_c - x_b) + y_b(x_a - x_c) + y_c(x_b - x_a)].$$

Aangezien nu de uitdrukkingen tusschen de vierkante haakjes respectievelijk gelijk zijn aan + en — tweemaal den inhoud van den aansluitingsdriehoek in het secundaire net, zoo vinden wij:

$$K \sin k = + x_a \frac{\delta A}{2J} + x_b \frac{\delta B}{2J} + x_c \frac{\delta C}{2J}$$

$$K \cos k = - y_a \frac{\delta A}{2J} - y_b \frac{\delta B}{2J} - y_c \frac{\delta C}{2J}$$

waaruit K en k onmiddelijk gevonden worden.

Als men in aanmerking neemt dat

$$\delta A + \delta B + \delta C = 0$$

is, dan kan men door een der drie correctiën in de twee andere uit te drukken de gevonden formules nog als volgt schrijven:

$$K \sin k = (x_a - x_c) \frac{\delta A}{2J} + (x_b - x_c) \frac{\delta B}{2J}$$
$$K \cos k = (y_c - y_a) \frac{\delta A}{2J} + (y_c - y_b) \frac{\delta B}{2J}$$

$$K \sin k = (x_a - x_b) \frac{\delta A}{2J} + (x_c - x_b) \frac{\delta C}{2J}$$
$$K \cos k = (y_b - y_a) \frac{\delta A}{2J} + (y_b - y_c) \frac{\delta C}{2J}$$

$$K \sin k = (x_b - x_a) \frac{\delta B}{2J} + (x_c - x_a) \frac{\delta C}{2J}$$
$$K \cos k = (y_a - y_b) \frac{\delta B}{2J} + (y_a - y_c) \frac{\delta C}{2J}.$$

Welk van deze drie stel formules men toepast, is onverschillig; zij zijn niet zoo symetrisch als de eerst afgeleide, maar voor de berekening zijn zij eenvoudiger, omdat men de logarithmen van de verschillen der coördinaten reeds vroeger gebruikt heeft en dus niet meer behoeft op te zoeken.

Heeft men uit een stel dezer formules de twee grootheden K en k berekend, dan volgen uit de hoeken van het driehoeksnet gemakkelijk de hoeken φ, die de verschillende zijden van het net met de richting van projectie maken en

met behulp daarvan vindt men dan de correctiën door middel van de formule

$$K\, l\, sin\, \varphi.$$

Daarna heeft eindelijk de aansluiting aan twee punten van het primaire net op de bekende wijze plaats; de aansluiting aan het derde punt volgt dan van zelf.

§ 5. Ter nadere toelichting volgt hier achter een uitgewerkt voorbeeld, al de berekeningen, die betrekking hebben op de gevraagde correctiën worden hier volledig medegedeeld.

In het primaire net zijn de drie punten *A*, *B* en *C* fig. 4 gegeven door de volgende coördinaten:

	X.	*Y*.
A	1027,329	983,268
B	1570,636	4819,698
C	6148,394	3105,058

waaruit de onderstaande elementen van den aansluitingsdriehoek volgen:

Hoekpunten.	Azimuthen der overstaande zijden.	Hoeken.	Log. overst. zijden.
A	110°32′ 1″,99	59°26′ 2″,41	3,6891613
B	247°29′40″,22	77°31′35″,82	3,7437622
C	8° 3′37″,81	43° 2′21″,77	3,5882392.

De elementen van het sluitend gemaakte secundaire net, dat in fig. 4 is voorgesteld, zijn bevat in de vijf eerste kolommen van den hier achter gevoegden staat. De twee laatste kolommen worden later berekend en ingevuld. De inrichting der tabel is op zich zelf duidelijk; alleen wijzen wij er op, dat de waarden onder de streepen in de kolom *log sin* de logarithmen van de moduli der driehoeken voorstellen, waardoor de berekening der overstaande zijden in de tabel zelve gemakkelijk plaats heeft. Bij de berekening der zijden is uitgegaan van de lengte der zijde *O P* in driehoek 1, welke zijde als eenheid is aangenomen.

De volgorde, waarin de driehoeken en de hoekpunten der driehoeken in den staat voorkomen, is voor het gemak der berekening niet onverschillig. De driehoeken zijn gerangschikt volgens de centrale punten, waaromheen zij gelegen zijn en bij ieder dier punten zijn de driehoeken genomen in de volgorde, waarin zij op elkaar volgen, als men ze doorloopt in de richting, waarin de wijzer van het uurwerk bewegen. Bij de opvolging van de hoekpunten der driehoeken is die zelf volgorde in aanmerking genomen, en is steeds begonnen met het centrale punt waaromheen de driehoeken liggen. Verder zijn in de tabel de verschillende driehoeken, die om hetzelfde centrale punt liggen, door eene dubbele lijn afgescheiden.

Deze volgorde maakt de berekening zoowel van de *log.* der overstaande zijden als van de hoeken in kolom 6 en van de correctiën zeer eenvoudig, zooals straks voor de twee laatsten zal blijken.

Thans vangt de berekening voor de bepaling van de correctiën voor de aansluiting eerst aan, al wat vooraf gaat is noodig bij iedere methode van aansluiting, welke men ook volgen wil.

§ 6. Voor de berekening van de coördinaten van A, B en C in het secundaire net nemen wij de lijn $P\,O$ als y-as en eene lijn loodrecht daarop door P als x-as. De hoek, die de lijn $P\,O$ met de y-as maakt, is dus $0^0 0' 0''$ en voor de lijn $O\,B$ vinden wij:

$$\begin{array}{rl} & 0^0\ 0'\ 0'',00 = P\,O \\ O_6 & = 64^0 24' 19'',37 \\ O_{11} & = 50^0 33' 42'',35 \\ O_{12} & = 70^0 53'\ 2'',78 \\ & \pm\ 180^0 \\ \hline & 5^0 54'\ 4'',50 = O\,B \end{array}$$

en hieruit volgt voor de projectiën van $O\,B$ op de x- en op de y-as:

$$\begin{aligned} \log OB &= 0{,}0277416 \\ \log \sin (OB) &= 9{,}0083709 \\ \log \cos (OB) &= 9{,}9977314 \\ \hline & 9{,}0361125 \\ & 0{,}0254730 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OB \sin (OB) &= 0{,}1086707 \\ OB \cos (OB) &= 1{,}0604080 \end{aligned}$$

waaruit men voor de coördinaten van B vindt:

$$\begin{aligned} x_b &= 0{,}0000000 + 0{,}1086707 = 0{,}1086707, \\ y_b &= 1{,}0000000 + 1{,}0604080 = 2{,}0604080. \end{aligned}$$

Voor de hoeken van PQ en QC met de y-as vindt men:

$$\begin{aligned} & 0^0\ 0'\ 0'',00 = (PO) \\ P_1 &= 69^0 41'\ 7'',00 \\ P_2 &= 51^0 12' 33'',67 \\ \hline & 120^0 53' 40'',67 = (PQ) \\ Q_2 &= 61^0 18'\ 9'',70 \\ Q_{15} &= 58^0 11'\ 1'',91 \\ Q_{16} &= 60^0 50'\ 2'',59 \\ & \pm 180^0 \\ \hline & 121^0 12' 54'',87 = (QC). \end{aligned}$$

Voor de projectiën van PQ en QC op de x- en y-as vindt men nu:

$$\begin{aligned} \log PQ &= 9{,}9664008 & \log QC &= 9{,}8676524 \\ \log \sin (PQ) &= 9{,}9335445 & \log \sin (QC) &= 9{,}9320811 \\ \log \cos (PQ) &= 9{,}7105073_n & \log \cos (QC) &= 9{,}7145431_n \\ \hline & 9{,}8999453 & & 9{,}7997335 \\ & 9{,}6769081_n & & 9{,}5821955_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQ \sin (PQ) &= 0{,}7942282 & QC \sin (QC) &= 0{,}6305703 \\ PQ \cos (PQ) &= -0{,}4752347 & QC \cos (QC) &= -0{,}3821162 \end{aligned}$$

waaruit voor de coördinaten van C volgt:

$$x_c = \quad 0{,}7942282 + 0{,}6305703 = \quad 1{,}4247985$$
$$y_c = -0{,}4752347 - 0{,}3821162 = -0{,}8573509.$$

Op gelijke wijze vindt men de coördinaten van A uit de volgende berekening:

$$
\begin{array}{rl}
 & 120^0 53' 40'',67 \ (P\,Q) \\
P_3 = & 61^0 19' 48'',33 \\
P_4 = & 67^0 46' 49'',00 \\
P_5 = & 56^0 54' \ 1'',67 \\
\hline
 & 306^0 54' 19'',67 = (P\,N) \\
N_5 = & 53^0 \ 9' 51'',70 \\
N_7 = & 47^0 26' 27'',07 \\
N_8 = & 38^0 59' 23'',07 \\
 & \pm 180^0 \\
\hline
 & 266^0 30' \ 1'',51 = (N\,A)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlrl}
\log P\,N = & 0{,}0072162 & \log N\,A = & 0{,}0466427 \\
\log \sin (P\,N) = & 9{,}9028876_n & \log \sin (N\,A) = & 9{,}9991893_n \\
\log \cos (P\,N) = & 9{,}7785105 & \log \cos (N\,A) = & 8{,}7856233_n \\
\hline
 & 9{,}9101038_n & & 0{,}0458320_n \\
 & 9{,}7857267 & & 8{,}8322660_n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlrl}
P\,N \sin (P\,N) = & -0{,}8130248 & N\,A \sin (N\,A) = & -1{,}1113017 \\
P\,N \cos (P\,N) = & \quad 0{,}6105577 & N\,A \cos (N\,A) = & -0{,}0679620
\end{array}
$$

$$x_a = -0{,}8130248 - 1{,}1113017 = -1{,}9243265$$
$$y_a = \quad 0{,}6105577 - 0{,}0679620 = \quad 0{,}5425957$$

§ 7. Voor de berekening van de lengten en de richtingshoeken der zijden van den aansluitingsdriehoek in het secundaire net hebben wij nu:

$$
\begin{array}{rlrl}
x_c = & 1{,}4247985 & y_c = & -0{,}8573509 \\
x_b = & 0{,}1086707 & y_b = & \quad 2{,}0604080 \\
\hline
x_c - x_b = & 1{,}3161278 & y_c - y_b = & -2{,}9177589
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log (x_c - x_b) = & 0{,}1192980 \\
\log (y_c - y_b) = & 0{,}4650494_n \\
\hline
\log tg\, \varphi_a = & 9{,}6542486_n
\end{array}
$$

$$\varphi_a = 155^0 43' 15'',82$$

$$\log (x_c - x_b) = 0,1192980 \qquad \log (y_c - y_b) = 0,4650494_n$$
$$\log \sin \varphi_a = 9.6140312 \qquad \log \cos \varphi_a = 9,9597827_n$$
$$\log a = 0,5052668 \qquad \log a = 0,5052667$$

$$x_a = -\ 1,9243265 \qquad y_a = 0,5425957$$
$$x_c = 1,4247985 \qquad y_c = -\ 0,8573509$$
$$x_a - x_c = -\ 3,3491250 \qquad y_a - y_c = 1,3999466$$

$$\log (x_a - x_c) = 0,5249314_n$$
$$\log (y_a - y_c) = 0,1461115$$
$$\log tg\, \varphi_b = 0,3788199_n$$

$$\varphi_b = 292^0 41' 6'',39$$

$$\log (x_a - x_c) = 0,5249314_n \qquad \log (y_a - y_c) = 0,1461115$$
$$\log \sin \varphi_b = 9,9650315_n \qquad \log \cos \varphi_b = 9,5862116$$
$$\log b = 0,5598999 \qquad \log b = 0,5598999$$

$$x_b = 0,1086707 \qquad y_b = 2,0604080$$
$$x_a = -\ 1,9243265 \qquad y_a = 0,5425957$$
$$x_b - x_a = 2,0329972 \qquad x_b - x_a = 1,5178123$$

$$\log (x_b - x_a) = 0,3081368$$
$$\log (y_b - y_a) = 0,1812180$$
$$\log tg\, \varphi_c = 0,1269188$$

$$\varphi_c = 53^0 15' 19'',48$$

$$\log (x_b - x_a) = 0,3081368 \qquad \log (y_b - y_a) = 0,1812180$$
$$\log \sin \varphi_c = 9,9038008 \qquad \log \cos \varphi_c = 9,7768819$$
$$\log c = 0,4043360 \qquad \log c = 0,4043361$$

Hieruit vindt men het volgende tabeltje van de elementen van den aansluitingsdriehoek in het secundaire net.

	Hoeken der overstaande zijden met de y-as.	Hoeken.	*log. sin.*	Log. overstaande zijden.
A	155°43'15",82	59°25'46",91	9,9350061	0,5052668
B	292°41' 6",39	77°32' 3",66	9,9896391	0,5598998
C	53°15'19",48	43° 2' 9",43	9,8340754	0,4043361
			0,5702607	

In bovenstaande berekening zijn ook opgenomen de lengten der zijden en de *log sin* der hoeken, eensdeels voor de controle op de berekening, anderdeels omdat men ze noodig heeft voor de berekening van den inhoud van den driehoek. De logarithme van het dubbel van dien inhoud vindt men door samen te tellen de logarithmen van twee zijden en die van den sinus van den ingesloten hoek, dus

$$\begin{aligned} log\ a &= 0{,}5052668 \\ lg\ b &= 0{,}5598998 \\ log\ sin\ C &= 9{,}8340754 \\ \hline log\ 2\ J &= 0{,}8992420 \end{aligned}$$

§ 8. Door nu de hoeken van den aansluitingsdriehoek in het secundaire net (§ 7) af te trekken van die in het primaire (§ 5), vinden wij voor de correctiën dier hoeken:

$$\begin{aligned} \delta A &= 59^0 26'\ 2'',41 - 59^0 25' 46'',91 = +\ 15'',50 \\ \delta B &= 77^0 31' 35'',82 - 77^0 32'\ 3'',66 = -\ 27'',84 \\ \delta C &= 43^0\ 2' 21'',77 - 43^0\ 2'\ 9'',43 = +\ 12'',34 \end{aligned}$$

Voor de berekening van K en k passen wij de formules:

$$K\,sin\,k = (x_a - x_b)\frac{\delta A}{2J} + (x_c - x_b)\frac{\delta C}{2J}$$

$$K\,cos\,k = (y_b - y_a)\frac{\delta A}{2J} + (y_b - y_c)\frac{\delta C}{2J}$$

toe en vinden met behulp daarvan;

$$\begin{array}{rl} \log \delta A = 1{,}19033 & \log \delta C = 1{,}09132 \\ \log 2J = 0{,}89924 & \log 2J = 0{,}89924 \\ \hline 0{,}29109 & 0{,}19208 \\ \log(x_a - x_b) = 0{,}30814_n & \log(x_c - x_b) = 0{,}11930 \\ \log(y_b - y_a) = 0{,}18122 & \log(y_b - y_c) = 0{,}46505 \\ \hline 0{,}59923_n & 0{,}31138 \\ 0{,}47231 & 0{,}65713 \end{array}$$

$$(x_a - x_b)\frac{\delta A}{2J} = -3{,}9740 \qquad (x_c - x_b)\frac{\delta C}{2J} = +2{,}0482$$

$$(y_b - y_a)\frac{\delta A}{2J} = +2{,}9669 \qquad (y_b - y_c)\frac{\delta C}{2J} = +4{,}5408$$

$$K \sin k = -3{,}9740 + 2{,}0482 = -1{,}9258$$
$$K \cos k = +2{,}9669 + 4{,}5408 = +7{,}5077$$

$$\begin{array}{rl} \log K \sin k = & 0{,}28461_n \\ \log K \cos k = & 0{,}87551 \\ \hline \log tg\, k = & 9{,}40910_n \end{array}$$

$$k = 345^0 36' 48''$$

$$\begin{array}{rl} \log K \sin k = 0{,}28461_n & \log K \cos k = 0{,}87551 \\ \log \sin k = 9{,}39526_n & \log \cos k = 9{,}98616 \\ \hline \log K = 0{,}88935 & \log K = 0{,}88935. \end{array}$$

§ 9. De berekening van de hoeken, die de zijden van de driehoeken met de richting van projectie vormen, geschiedt nu het gemakkelijkst in den staat van de secundaire driehoeken. De boven gevonden waarde van $k = 345^0 37'$ behoorende bij de lijn $P\,O$ wordt geschreven in kolom 6 op den regel G van driehoek 1. Om de richtingshoeken voor de overige zijden te vinden, heeft men nu slechts telkens op te tellen den hoek, die een regel lager staat, en deze som $\pm\ 180^0$ een regel hooger te schrijven. Overgaande tot den volgenden driehoek heeft men slechts den richtingshoek, die op den middelsten regel staat, vermeerderd of verminderd met 180^0 over te schrijven op den ondersten regel van den volgenden driehoek, en dan hierin weer dezelfde berekening uit

te voeren. Dit gaat zoo voort tot men de geheele groep met het centrale punt *P* heeft berekend. Bij het slot daarvan heeft men de controle dat de richtingshoek op den tweeden regel van den laatsten driehoek vermeerderd of verminderd met 180⁰ gelijk moet zijn aan die op den derden regel van den eersten driehoek. Zooals uit de tabel blijkt, verschilt dit 1′; welk verschil blijkbaar voortspruit uit het verwaarlozen der secunden.

Gaat men nu over tot de tweede groep, dan zoekt men in de eerste groep de richtingshoek, die op den derden regel van den eersten driehoek moet staan. De daarbij behoorende zijde *N L* komt ook voor in driehoek 5. De richtingshoek op den eersten regel van driehoek 5 heeft men dus vermeerderd of verminderd met 180⁰ op den derden regel van driehoek 7 over te schrijven en kan dan de berekening voor de driehoeken om het punt *N* op dezelfde wijze als boven voortzetten. Op het einde van deze berekening moet de richtingshoek op den tweeden regel van 11 vermeerderd of verminderd met 180⁰ met die op regel 1 van driehoek 6 overeenstemmen, hier ook met een verschil van een minuut. Regel 3 van driehoek 12 wordt verder afgeleid uit regel 1 van driehoek 11, terwijl regel 2 van driehoek 14 gecontroleerd wordt door regel 1 van driehoek 1. Eindelijk wordt regel 3 van driehoek 15 afgeleid uit regel 1 van driehoek 2 en ten slotte wordt regel 2 van driehoek 18 gecontroleerd door regel 1 van driehoek 3, hier ook weer met een verschil van een minuut.

Zooals men ziet wordt de berekening bijna geheel machinaal in den staat van het secundaire net uitgevoerd. Alleen, wanneer men tot eene andere groep driehoeken overgaat, moet men een richtingshoek uit een der vorige groepen overnemen; namelijk de richtingshoek van de zijde waarmede beide groepen aan elkaar sluiten.

§ 10. Voor de berekening van de eigenlijke correctiën, heeft men nu slechts onder elkaar op te schrijven de logarithme van *K*, de logarithme der zijde uit den staat en de *log sin* van den daarbij behoorenden richtingshoek uit kolom 6; door samentelling vindt men dan de logarithme van de correctie.

Bij voorbeeld voor hoek P uit driehoek 1:

$$\begin{aligned} \log K &= 0{,}88935 \\ \log l &= 0{,}03263 \\ \log \sin \varphi &= 9{,}95458 \\ \hline & 0{,}87656 \end{aligned}$$

$$\text{Cor.} = 7'',53.$$

Het is echter niet noodig dit voor alle hoeken te doen; omdat de twee hoeken, die tegenover dezelfde zijde staan, dezelfde correctie met omgekeerd teeken verkrijgen. Het is daarom voldoende om van iederen driehoek de correctiën van de twee eerste hoeken te berekenen, die van den derden hoek vindt men dan altijd in een der andere driehoeken.

Deze berekening volgt hieronder voor alle 18 driehoeken.

1.		2.		3.	
0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935
0,03263	9,94391	9,89261	9,96640	9,99045	9,99542
9,95458	9,91495	9,32437	9,98170	9,84151	9,32319
0,87656	0,74821	0,10633	0,83745	0,72131	0,20796
7'',53	5'',60	1'',28	6'',88	5'',26	1'',61

4.		5.		6.	
0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935
0,01698	9,93769	9,95751	0,00722	9,95496	0,00000
9,94839	9,91669	9,39270	9,96551	9,88447	9,39467
0,85472	0,74373	0,23956	0,86208	0,72878	0,28402
7'',16	5'',54	1'',74	7'',28	5'',36	1'',92

7.		8.		9.	
0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935
9,85996	9,95117	9,84577	0,04664	9,93038	0,02754
9,99285	9,73766	9,91105	9,97849	9,14714	9,94560
0,74216	0,57818	0,64617	0,91448	9,96687	0,86249
5'',52	3'',79	4'',43	8'',21	0'',93	7'',29

10.		11.		12.	
0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935
0,00349	9,84565	9,81521	9,95496	0,02208	0,02774
9,99150	8,83996	9,99255	9,88436	9,66295	9,17139
0,88434	9,57496	0,69711	0,72867	0,57438	0,08848
7",66	0",38	4",98	5",35	3",75	1",23

13.		14.		15.	
0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935
0,06143	9,90967	9,92136	0,03263	9,88589	9,90318
9,89223	9,95988	9,44122	9,95458	9,98359	9,85693
0,84301	0,75890	0,25193	0,87656	0,75883	0,64946
6",97	5",74	1",79	7",53	5",74	4",46

16.		17.		18.	
0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935	0,88935
9,89226	9,86765	0,01357	0,01821	9,92223	9,99045
9,22211	9,98098	9,77795	8,92110	9,96201	9,84138
0,00372	0,73798	0,68087	9,82866	0,77359	0,72118
1",01	5",47	4",80	0",67	5",94	5",26

De hier gevonden correctiën worden nu in kolom 7 van den staat van het secundaire driehoeksnet op de twee bovenste regels van iederen driehoek ingevuld en dan ook de correctie voor den derden hoek bijgeschreven. Deze correctie vindt men, met uitzondering van die van den eersten driehoek van elke groep, op den tweeden regel van den voorafgaanden driehoek. Die voor den eersten driehoek van elke groep wordt opgezocht door middel van de overstaande zijde, die ook in een der andere driehoeken voorkomt.

Ten slotte worden de teekens, die bij bovenstaande berekening zijn weggelaten, ingevuld. Dit teeken is *plus* zoolang de richtingshoek in kolom 6 kleiner dan 180° en *min.* als die hoek grooter dan 180° is,

§ 11. De berekening der correctiën is hiermede geheel afgeloopen, de verdere berekening van de coördinaten der

hoekpunten is dezelfde als bij iedere methode voor de aansluiting moet worden uitgevoerd.

In het kort geven wij hier het resultaat dier berekening. Na de correctiën (kolom 7) aan de hoeken (kolom 3) te hebben aangebracht en de logarithmen sinussen te hebben opgezocht, berekent men, bijvoorbeeld uitgaande van de zijde *AN* als eenheid, de lengten van de zijden *NO* en *OB* en tevens de hoeken van deze zijden met *AN*. Met behulp hiervan, worden dan de projectiën berekend op *AN* en op eene loodlijn daarop. Hieruit vinden wij dan voor de projectie van *ANOB* op *AN* de waarde 1,9059236 en op de loodlijn daarop 1,2492869. Uit deze getallen vinden wij voor den hoek *BAN*: $33^0\,14'\,37'', 95$ en voor de *log.* van *AB*: 0,3577202. Uit het primaire net heeft men nu *log* $AB = 3{,}5882392$ (§ 5). Hieruit volgt dus voor de lengte van *AN*:

$$log\ AN = 3{,}5882392 - 0{,}3577202 = 3{,}2305190.$$

Uitgaande van deze waarde worden nu alle zijden van het secundaire net berekend.

In het primaire net hebben wij verder voor het azimuth van *AB*:

$$8^0\,3'\,37'', 81,$$

en dus voor het azimuth van *AN*:

$$8^0\,3'\,37'', 81 + 33^0\,14'\,37'', 95 = 41^0\,18\ 15'', 76,$$

met behulp waarvan de azimuthen van de andere zijden berekend kunnen worden.

Uit de zijden en azimuthen berekent men eindelijk de coördinatenverschillen en hieruit, uitgaande van *A* en *B*, de coördinaten van alle punten.

Op deze wijze vonden wij van *A* uitgaande langs de punten *D* en *E* en langs de punten *N* en *O* voor de coördinaten van *B*:

	1570,6361	4819,6971
en	1570,6365	4519,6979

in plaats van

1570,636 4819,698.

Verder uitgaande van *J* langs de punten *M*, *L*, *K* en *J* en langs de punten *N*, *P* en *Q* en uitgaande van *B* langs *O*, *P* en *Q* en langs *F*, *G* en *H* voor de coördinaten van het derde aansluitingspunt *C* de volgende vier waarden:

6148,3920	3105,0564
6148,3927	3105,0562
6148,3924	3105,0560
6148,3930	3105,0564

in plaats van

6148,394 en 3105,058.

Zoo als blijkt is de aansluiting in het punt *C* verkregen op een klein verschil na van minder dan 2 millimeters, voortspruitende uit de verwaarloosde decimalen.

Ten slotte zij hier nog opgemerkt, dat bij bovenstaande berekening meer decimalen gebruikt zijn, dan noodig is. Wij hebben dit gedaan om duidelijk te laten zien, dat de aansluiting werkelijk volkomen verkregen wordt. In de praktijk zal men meestal kunnen volstaan met de berekening uit te voeren met 5 decimalen voor de logarithmen en met enkele secunden voor de hoeken. Bij de berekening der correctiën in § 10 zal men dan kunnen volstaan met logarithmen met 3 decimalen. De aansluiting zal alsdan, bij niet al te groote driehoeken, tot op enkele centimeters verkregen worden, hetgeen voor de praktijk ruimschoots voldoende is.

Delft, Sept. 1882.

g: 4.

H

G

15

16

C

2

Q

17

3

18

I

K

X

Lith. Geb.[s] [illegible]

STAAT VAN DE SECUNDAIRE DRIEHOEKEN.

Nummers der driehoeken.	Hoekpunten.	Hoeken.	Log. Sin.	Log. overstaande zijden.	Hoeken met de richting van projectie	Correctiën voor de aansluiting.
1	P	69°41′ 7″,00	9,9721102	0,0326269	115°45′	+ 7″,53
	O	49°51′51″,96	9,8833897	9,9439064	235°18′	— 5″,60
	G	60°27′ 1″,04	9,9394833	0,0000000	345°37′	— 1″,92
			0,0605167			+ 0″,01
2	P	51°12′33″,67	9,8917828	9,8926061	167°49′	+ 1″,28
	G	67°29′16″,63	9,9655775	9,9664008	286°31′	— 6″,88
	Q	61°18′ 9″,70	9,9430831	9,9439064	55°18′	+ 5″,60
			0,0008233			0″,00
3	P	61°19′48″,33	9,9431968	9,9904545	223°58′	— 5″,26
	Q	62°33′30″,30	9,9481591	9,9954168	347°51′	— 1″,61
	K	56° 6′41″,37	9,9191431	9,9664008	106°31′	+ 6″,88
			0,0472577			+ 0″,01
4	P	67°46′49″,00	9,9664892	0,0169770	297°23′	— 7″,16
	K	50°28′ 4″,96	9,8872063	9,9376941	55°38′	+ 5″,54
	L	61°45′ 6″,04	9,9449290	9,9954168	167°51′	+ 1″,61
			0,0504878			— 0″,01
5	P	56°54′ 1″,67	9,9231005	9,9575100	345°42′	— 1″,74
	L	69°56′ 6″,63	9,9728067	0,0072162	112°32′	+ 7″,28
	N	53° 9′51″,70	9,9032846	9,9376941	235°38′	— 5″,54
			0,0344095			0″,00
6	P	53° 5′40″,33	9,9028876	9,9549583	50° 2′	+ 5″,36
	N	62°30′ 0″,30	9,9479292	9,9999999	165°38′	+ 1″,92
	O	64°24′19″,37	9,9551455	0,0072162	292°32′	— 7″,28
			0,0520707			0″,00

STAAT VAN DE SECUNDAIRE DRIEHOEKEN.

Nummers der driehoeken.	Hoekpunten.	Hoeken.	Log. Sin.	Log. overstaande zijden.	Hoeken met de richting van projectie.	Correctiën voor de aansluiting.
7	N	47°26′27″,07	9,8672196	9,8599638	280°22′	— 5″,52
	L	65°19′40″,58	9,9584262	9,9511704	33° 8′	+ 3″,79
	M	67°13′52″,35	9,9647658	9,9575100	165°42′	+ 1″,74
			9,9927442			+ 0″,01
8	N	38°59′23″,07	9,7987758	9,8457719	305°26′	— 4″,43
	M	87°41′19″,58	9,9996466	0,0466427	72° 7′	+ 8″,21
	A	53°19′17″,35	9,9041743	9,9511704	213° 8′	— 3″,79
			0,0469961			— 0″,01
9	N	45°57′57″,40	9,8566847	9,9303825	8° 4′	+ 0″,93
	A	64° 2′55″,92	9,9538406	0,0275384	118° 5′	+ 7″,29
	D	69°59′ 6″,68	9,9729449	0,0466427	252° 7′	— 8″,21
			0,0736978			+ 0″,01
10	N	65°52′57″,40	9,9603329	0,0034870	78°42′	+ 7″,66
	D	39°23′24″,92	9,8024995	9,8456536	183°58′	— 0″,38
	E	74°43′37″,68	9,9843843	0,0275384	298° 5′	— 7″,29
			0,0431541			— 0″,01
11	N	46° 3′23″,06	9,8573466	9,8152086	100°35′	+ 4″,98
	E	83°22′54″,59	9,9970963	9,9549583	230° 1′	— 5″,35
	O	50°33′42″,35	9,8877916	9,8456536	3°58′	+ 0″,38
			9,9578620			+ 0″,01
12	O	70°53′ 2″,78	9,9753666	0,0220844	27°24′	+ 3″,75
	E	73°11′ 8″,08	9,9810238	0,0277416	171°28′	+ 1″,23
	B	35°55′49″,14	9,7684908	9,8152086	280°35′	— 4″,98
			0,0467178			0″,00

STAAT VAN DE SECUNDAIRE DRIEHOEKEN.

Nummers der driehoeken.	Hoekpunten.	Hoeken.	Log. Sin.	Log. overstaande zijden.	Hoeken met de richting van projectie.	Correctiën voor de aansluiting.
13	O	74°17′ 6″,77	9,9834557	0,0614301	128°43′	+ 6″,97
	B	42°44′39″,09	9,8316947	9,9096691	245°45′	— 5″,74
	F	62°58′14″,14	9,9497672	0,0277416	351°28′	— 1″,23
			0,0779744			0″,00
14	O	49°59′56″,77	9,8842483	9,9213574	163°58′	+ 1″,79
	F	81°46′56″,09	9,9955177	0,0326268	295°45′	— 7″,53
	G	48°13′ 7″,14	9,8725600	9,9096691	65°45′	+ 5″,74
			0,0371091			0″,00
15	Q	58°11′ 1″,91	9,9292882	9,8858869	105°39′	+ 5″,74
	G	62° 9′42″,44	9,9465848	9,9031835	226° 0′	— 4″,46
	H	59°39′15″,65	9,9360074	9,8926061	347°49′	— 1″,28
			9,9565987			0″,00
16	Q	60°50′ 2″,59	9,9411197	9,8922612	170°24′	+ 1″,01
	H	55°35′58″,10	9,9165109	9,8676524	286°50′	— 5″,47
	C	63°33′59″,31	9,9520420	9,9031835	46° 0′	+ 4″,46
			9,9511415			0″,00
17	Q	68°22′46″,59	9,9683173	0,0135718	216°51′	— 4″,80
	C	69°59′16″,10	9,9729522	0,0182067	355°13′	— 0″,67
	J	41°37′57″,31	9,8223979	9,8676524	106°50′	+ 5″,47
			0,0452545			0″,00
18	Q	48°44′28″,91	9,8760679	9,9222287	293°37′	— 5″,94
	J	61°35′46″,44	9,9442938	9,9904546	43°57′	+ 5″,26
	K	69°39′44″,65	9,9720459	0,0182067	175°13′	+ 0″,67
			0,0461608			— 0″,01

RAPPORT

OVER DE

VERHANDELING VAN DEN HEER J. **BUENO DE MESQUITA**,

GETITELD:

ALGEMEENE VERGELIJKINGEN VOOR EEN GECENTREERD STELSEL VAN LENZEN.

In de Handelingen der Turijnsche Akademie van Wetenschappen van November 1880 verscheen eene verhandeling van FERRARIS, waarin formules ter bepaling van de ligging der cardinale punten van een gecentreerd lenzenstelsel, geldig voor een onbepaald aantal lenzen, werden medegedeeld.

Daarbij werden de onderlinge afstanden der afzonderlijke lenzen en hunne brandpuntsafstanden als gegeven beschouwd, en in die gegevens uitgedrukt: 1°. de afstand van het eerste brandpunt van het stelsel tot het eerste hoofdpunt van de eerste lens, 2°. de afstand van het tweede brandpunt van het stelsel tot het tweede hoofdpunt van de laatste lens, 3°. de brandpuntsafstand van het stelsel.

Zijn nu van een lenzenstelsel de enkele lenzen en hare onderlinge plaatsing eenmaal bekend, dan laten de door fraaien vorm uitmuntende formules van FERRARIS wel niets meer te wenschen over. Iets anders is het echter, wanneer het de vraag is optische stelsels te verkrijgen, die aan bepaalde vooraf gestelde eischen moeten voldoen. Het zijn dan niet de genoemde drie grootheden, die men als onbekenden zal hebben op te lossen, maar dikwijls andere in de formules van FERRARIS ingesloten grootheden, bijv. de brandpunts-

afstanden van een of meer der samenstellende lenzen. Daartoe zijn dan herleidingen noodig die met het aantal lenzen snel in omslachtigheid toenemen.

Dit bracht er den Heer MESQUITA toe, bij het uitwerken van een door hem niet nader omschreven praktisch vraagstuk, nog andere algemeene betrekkingen tusschen de optische grootheden der enkele lenzen en van het resulteerend stelsel op te sporen.

In de vier eerste paragrafen zijner verhandeling herhaalt de schrijver in hoofdzaak de door FERRARIS van diens formules gegevene afleiding. Met het oog op de minder algemeene toegankelijkheid der in de Italiaansche taal geschrevene verhandeling van FERRARIS, is dit, meenen wij, niet af te keuren.

Bij § 5 begint des schrijvers voornaamste zelfstandige arbeid, waarbij hij zich ten doel stelt als onbekenden op te lossen, en in de overige grootheden met inbegrip van die welke op het resulteerende optisch stelsel betrekking hebben, uit te drukken, de brandpuntsafstanden der eerste en laatste lens, benevens den brandpuntsafstand van het stelsel. Het volbrengen van die taak was niet zonder moeilijkheid en de wijze waarop de schrijver daarbij te werk gaat, getuigt van zijne bekwaamheid in het hanteeren der tamelijk ingewikkelde determinanten-vormen. Als uitkomst wordt in § 5 en § 6 een drietal formules verkregen, dat in § 7 tot eene nog overzichtelijkere gedaante wordt gebracht en in § 8 op het geval van vier lenzen wordt toegepast.

Dewijl nu dergelijke algemeene formules, daar hare praktische toepassing uit den aard der zaak tot gevallen van een gering aantal lenzen beperkt blijft, niet volstrekt onmisbaar kunnen worden genoemd, zal hunne waarde voornamelijk afhankelijk zijn van hun sierlijken en overzichtelijken vorm. Daarin nu staat het drietal door MESQUITA gevonden formules niet achter bij die van FERRARIS, en dat het die op welkome wijze aanvult, kan o. a. daaruit blijken, dat FERRARIS, wanneer hij tot de toepassing zijner algemeene formules op stelsels van twee en drie lenzen, die aan bepaalde eischen moeten voldoen, wil overgaan, vooraf

zijne betrekkingen voor dit bepaalde aantal lenzen, omzet in die, waarvoor door den Heer MESQUITA de algemeene vormen gevonden zijn. Stelt men namelijk in de formules (7), (8) en (9) van MESQUITA $n = 3$, dan verkrijgt men de formules (21), (22) en (23) van FERRARIS, welke deze (blz. 64 zijner verhandeling) ten grondslag legt aan zijne praktische toepassingen.

Wij bevelen der Akademie de opneming van de verhandeling van den Heer MESQUITA in hare werken aan.

D. J. KORTEWEG.
J. A. C. OUDEMANS.

ALGEMEENE VERGELIJKINGEN

VOOR EEN

GECENTREERD LENZENSTELSEL.

DOOR

J. BUENO DE MESQUITA.

---

1. Door FERRARIS *) zijn zeer elegante formules tot bepaling van de cardinale punten van een lenzenstelsel afgeleid.

In deze formules zijn de afstand h van het eerste hoofdpunt van de eerste lens tot het eerste hoofdbrandpunt van het stelsel, de afstand k van het tweede hoofdpunt van de laatste lens tot het tweede hoofdbrandpunt van het stelsel en de hoofdbrandpuntsafstand Φ van het stelsel uitgedrukt in de hoofdbrandpuntsafstanden φ der samenstellende lenzen en de afstanden δ, waarop deze lenzen zich van elkander bevinden.

Is het lenzenstelsel gegeven, dan kunnen de cardinale punten op hoogst eenvoudige wijze, met behulp van de vergelijkingen, worden gevonden.

Zoekt men daarentegen naar een optisch stelsel, dat aan gegeven voorwaarden voldoet, dan zal het meestal verkieslijk zijn φ_1, φ_n en Φ als onbekenden te beschouwen en uit de vergelijkingen op te lossen.

Tot toelichting behoef ik slechts te verwijzen naar de

---

*) Atti della R. Accademia delle Scienza di Torino. Vol. XVI. Nov.— Dic. 1880, p. 45.

POGG., *Ann.* Beibl. 1881. Bd. V, S. 500.

toepassingen, die FERRARIS zelf van zijne vergelijkingen heeft gemaakt.

De oplossing van φ_1, φ_n en Φ uit de formules van FERRARIS gaat echter met zeer omslachtige en tijdroovende berekeningen gepaard, vooral wanneer het stelsel uit meer dan drie lenzen bestaat.

Om dit bezwaar te ontgaan, heb ik, bij het uitwerken van een practisch vraagstuk, voor deze oplossingen algemeene vormen trachten te vinden, die in deze verhandeling zullen worden ontwikkeld.

2. In de eerste plaats beschouwen wij een stelsel van twee gecentreerde lenzen. Wij noemen F_1 en F_1' resp. het eerste en het tweede hoofdbrandpunt, H_1 en H_1' resp. het eerste en het tweede hoofdpunt van de eerste lens; F_2 en F_2' de hoofdbrandpunten, H_2 en H_2' de hoofdpunten van de tweede lens; verder F, F', H, H' de hoofdbrandpunten en hoofdpunten van het resulteerend stelsel.

De richting van het invallende licht nemen wij steeds als positief aan, terwijl telkens, wanneer een afstand door twee letters wordt aangeduid, de volgorde der letters tevens de richting aangeeft, waarin de afstand gemeten wordt.

Bepalen wij ons tot het bijzondere geval, dat de eerste en laatste middenstoffen aan elkander gelijk zijn, en stellen wij

$$F_1 H_1 = \varphi_1$$

$$F_2 H_2 = \varphi_2$$

$$H_1' H_2 = \delta_2 ,$$

dan is:

$$H_1 F = -\varphi_1 - \frac{\varphi_1^2}{\delta_2 - \varphi_2 - \varphi_1} \ldots\ldots (1)$$

$$H_2' F' = \varphi_2 + \frac{\varphi_2^2}{\delta_2 - \varphi_2 - \varphi_1} \ldots\ldots (2)$$

$$F H = - \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\delta_2 - \varphi_2 - \varphi_1} \ldots\ldots (3)$$

3. Van een gecentreerd lenzenstelsel beschouwen wij nu het stelsel, bestaande uit de m^e, $m+1^e \ldots n^e$ lens.

Wij berekenen eerst den afstand van het tweede hoofdpunt van de n^e lens tot het tweede hoofdbrandpunt van het resulteerend stelsel, alsmede den eersten hoofdbrandpuntsafstand van dit stelsel.

Hiertoe moeten wij de formules (2) en (3) eerst toepassen op de m^e en $m+1^e$ lens, daarna op het gevonden stelsel en de $m+2^e$ lens en zoo voortgaan, totdat wij al de lenzen hebben gehad.

Zij φ_m, $\varphi_{m+1} \ldots \varphi_n$ de eerste hoofdbrandpuntsafstanden der lenzen *). Wij stellen δ_{m+1}, $\delta_{m+2} \ldots \delta_n$ den afstand van het tweede hoofdpunt van de m^e lens tot het eerste hoofdpunt van de $m+1^e$ lens, den afstand van het tweede hoofdpunt van de $m+1^e$ lens tot het eerste hoofdpunt van de $m+2^e$ lens, enz. en noemen $D_{m+1}, D_{m+2} \ldots D_n$ den afstand van het tweede hoofdbrandpunt van de m^e lens tot het eerste hoofdbrandpunt van de $m+1^e$ lens, den afstand van het tweede hoofdbrandpunt van de $m+1^e$ lens tot het eerste hoofdbrandpunt van de $m+2^e$ lens, enz.

Stellen wij nu $k_{p.q}$ den afstand van het tweede hoofdpunt van de q^e lens tot het tweede hoofdbrandpunt van het stelsel, bestaande uit de p^e, $p+1^e \ldots q^e$ lens, en $\Phi_{p.q}$ den eersten hoofdbrandpuntsafstand van dit stelsel, dan vinden wij, met behulp van de formules (2) en (3), achtereenvolgens:

$$k_{m.m+1} = \varphi_{m+1} + \frac{\varphi^2_{m+1}}{\delta_{m+1} - \varphi_{m+1} - \varphi_m} =$$
$$= \varphi_{m+1} + \frac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}$$

$$k_{m.m+2} = \varphi_{m+2} + \frac{\varphi^2_{m+2}}{\delta_{m+2} - \varphi_{m+2} - k_{m.m+1}} =$$
$$= \varphi_{m+2} + \frac{\varphi^2_{m+2}}{D_{m+2} - \frac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}}$$

*) De tweede hoofdbrandpuntsafstand heeft een teeken, tegengesteld aan dat van den eersten hoofdbrandpuntsafstand.

$$k_{m.m+3} = \varphi_{m+3} + \frac{\varphi^2_{m+3}}{\delta_{m+3} - \varphi_{m+3} - k_{m.m+2}} =$$

$$= \varphi_{m+3} + \cfrac{\varphi^2_{m+3}}{D_{m+3} - \cfrac{\varphi^2_{m+2}}{D_{m+2} - \cfrac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}}}$$

enz.

en

$$\Phi_{m.m+1} = - \frac{\varphi_m \varphi_{m+1}}{\delta_{m+1} - \varphi_{m+1} - \varphi_m} =$$

$$= - \frac{\varphi_m \varphi_{m+1}}{D_{m+1}}$$

$$\Phi_{m.m+2} = - \frac{\Phi_{m.m+1}\, \varphi_{m+2}}{\delta_{m+2} - \varphi_{m+2} - k_{m.m+1}} =$$

$$= \frac{\varphi_m \varphi_{m+1} \varphi_{m+2}}{D_{m+1}\left(D_{m+2} - \frac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}\right)}$$

$$\Phi_{m.m+3} = - \frac{\Phi_{m.m+2}\, \varphi_{m+3}}{\delta_{m+3} - \varphi_{m+3} - k_{m.m+2}} =$$

$$= - \frac{\varphi_m \varphi_{m+1} \varphi_{m+2} \varphi_{m+3}}{D_{m+1}\left(D_{m+2} - \frac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}\right)\left(D_{m+3} - \cfrac{\varphi^2_{m+2}}{D_{m+2} - \cfrac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+1}}}\right)}$$

enz.

Stellen wij verder:

$$R'_{m+1.n} = \begin{vmatrix} D_n & \varphi_{n-1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \varphi_{m+2} & & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & & \varphi_{m+1} & D_{m+1} \end{vmatrix}$$

en

$$R''_{m+1.n} = \begin{vmatrix} \delta_n - \varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & D_{m+1} \end{vmatrix}$$

dan heeft men voor het stelsel der m^e, $m+1^e \ldots n^e$ lenzen:

$$k_{m.n} = \varphi_n + \frac{\varphi_n^2 R'_{m+1.n-1}}{R'_{m+1.n}} = \varphi_n \frac{R''_{m+1.n}}{R'_{m+1.n}}, \quad \ldots \quad (4)$$

$$\Phi_{m.n} = (-1)^{n-m} \frac{\varphi_m \varphi_{m+1} \ldots \varphi_n}{R'_{m+1.n}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

4. Om den afstand te vinden van het eerste hoofdpunt van de m^e lens tot het eerste hoofdbrandpunt van het resulteerend stelsel, passen wij de formule (1) toe, eerst op de n^e en $n-1^e$ lens, daarna op het verkregen stelsel en de $n-2^e$ lens en gaan op dezelfde wijze voort, totdat wij al de lenzen in onze beschouwing hebben opgenomen.

Wij stellen $h_{p.q}$ den afstand van het eerste hoofdpunt van de p^e lens tot het eerste hoofdbrandpunt van het stelsel, bestaande uit de p^e, $p+1^e \ldots q^e$ lens.

Door toepassing van formule (1) vindt men nu:

$$h_{n-1.n} = -\varphi_{n-1} - \frac{\varphi^2_{n-1}}{\delta_n - \varphi_{n-1} - \varphi_n} = -\varphi_{n-1} - \frac{\varphi^2_{n-1}}{D_n}$$

$$h_{n-2.n} = -\varphi_{n-2} - \frac{\varphi^2_{n-2}}{\delta_{n-1} - \varphi_{n-2} + h_{n-1.n}} =$$

$$= -\varphi_{n-2} - \frac{\varphi^2_{n-2}}{D_{n-1} - \frac{\varphi^2_{n-1}}{D_n}}$$

$$h_{n-3.n} = -\varphi_{n-3} - \frac{\varphi^2_{n-3}}{\delta_{n-2} - \varphi_{n-3} + h_{n-2.n}} =$$

$$= -\varphi_{n-3} - \cfrac{\varphi^2_{n-3}}{D_{n-2} - \cfrac{\varphi^2_{n-2}}{D_{n-1} - \cfrac{\varphi^2_{n-1}}{D_n}}}$$

. . . .

$$h_{m.n} = -\varphi_m - \cfrac{\varphi^2_m}{D_{m+1} - \cfrac{\varphi^2_{m+1}}{D_{m+2} - \cfrac{\varphi^2_{m+2}}{D_{m+3} \ldots\ldots}}}$$

$$\ldots\ldots - \frac{\varphi^2_{n-1}}{D_n}.$$

Stellen wij nu:

$$R'''_{m+1.n} = \begin{vmatrix} D_n & \varphi_{n-1} & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1} - \varphi_{m+1} \end{vmatrix}$$

dan zien wij, dat

$$h_{m.n} = -\varphi_m - \frac{\varphi^2_m R'_{m+2.n}}{R'_{m+1.n}} = -\varphi_m \frac{R'''_{m+1.n}}{R'_{m+1.n}} \quad \ldots\ldots (6)$$

5. Wij zullen nu φ_m, φ_n en Φ_{mn} als onbekenden beschouwen en uit de vergelijkingen (4), (5) en (6) oplossen.

Merken wij op dat $R''_{m+1.n}$ implicite φ_m bevat (namelijk in $D_{m+1} = \delta_{m+1} - \varphi_{m+1} - \varphi_m$) en dat evenzoo in $R'''_{m+1.n}$ nog φ_n, in $R'_{m+1.n}$ zoowel φ_m als φ_n voorkomen, dan ontstaat de behoefte voor deze uitdrukkingen vormen te vinden, waarin de onbekenden explicite optreden.

Men heeft:

$$R''_{m+1.n} = \begin{vmatrix} \delta_n - \varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & D_{m+1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \delta_n - \varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1} - \varphi_{m+1} \end{vmatrix} - \varphi_m R''_{m+2.n}$$

Door beurtelings de rijen en de kolommen bij elkander op te tellen, gaat de eerste term van het laatste lid over in den vorm:

$$\ldots_{+1.n} = \begin{vmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} + \delta_n & \ldots & \delta_{m+2} + \delta_{m+3} \ldots + \delta_n & \delta_{m+1} + \delta_{m+2} \ldots + \delta_n \\ \varphi_{n-1} & \delta_{n-1} & \ldots & \delta_{m+2} + \delta_{m+3} \ldots + \delta_{n-1} & \delta_{m+1} + \delta_{m+2} \ldots + \delta_{n-1} \\ 0 & \varphi_{n-2} & \ldots & \delta_{m+2} + \delta_{m+3} \ldots + \delta_{n-2} & \delta_{m+1} + \delta_{m+2} \ldots + \delta_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots 0 & \varphi_{m+2} & \delta_{m+2} & \delta_{m+1} + \delta_{m+2} \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1} \end{vmatrix}$$

zoodat men vindt:

$$R''_{m+1.n} = R_{m+1.n} - \varphi_m R''_{m+2.n} \ldots\ldots (\alpha)$$

Evenzoo is:

$$R'''_{m+1.n} = \begin{vmatrix} D_n & \varphi_{n-1} & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1} - \varphi_{m+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_n - \varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1} - \varphi_{m+1} \end{vmatrix} - \varphi_n R'''_{m+1.n-1}$$

of

$$R'''_{m+1.n} = R_{m+1.n} - \varphi_n R'''_{m+1.n-1} \dots\dots \quad (\beta)$$

$$R'_{m+1.n} = \begin{vmatrix} D_n & \varphi_{n-1} & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & D_{m+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_n - \varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & D_{m+1} \end{vmatrix} - \varphi_n R'_{m+1.n-1} =$$

$$= R_{m+1.n} - \varphi_m R''_{m+2.n} - \varphi_n (R'''_{m+1.n-1} - \varphi_m R'_{m+2.n-1})$$

of

$$R'_{m+1.n} = R_{m+1.n} - \varphi_m R''_{m+2.n} - \varphi_n R'''_{m+1.n-1} +$$
$$+ \varphi_m \varphi_n R'_{m+2.n-1} \dots\dots\dots\dots (\gamma)$$

Wij deelen nu (4) en (6) door (5); in de verkregen vergelijkingen substitueeren wij de waarden van $R''_{m+1.n}$ en $R'''_{m+1.n}$ uit (α) en (β) en daarna lossen wij φ_m en φ_n uit de vergelijkingen op.

Men heeft dan:

$$\varphi_m = \Phi_{m.n} \frac{R_{m+1.n}}{\Phi_{m.n} R''_{m+2.n} + (-1)^{n-m} k_{m.n} \varphi_{m+1} \varphi_{m+2} \dots \varphi_{n-1}} \dots (7)$$

$$\varphi_n = \Phi_{m.n} \frac{R_{m+1.n}}{\Phi_{m.n} R'''_{m+1.n-1} - (-1)^{n-m} h_{m.n} \varphi_{m+1} \varphi_{m+2} \dots \varphi_{n-1}} \dots (8)$$

6. De grootheden φ_m en φ_n zijn nu uitgedrukt in $\Phi_{m.n}$ en het komt er slechts op aan $\Phi_{m.n}$ te vinden.

Substitueert men in (5) eerst de waarde van $R'_{m+1.n}$ uit (γ) en daarna de waarden van φ_m en φ_n uit (7) en (8), dan vindt men:

$$\Phi^2_{m.n} (R_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R''_{m+2.n} R'''_{m+1.n-1}) -$$
$$- (-1)^{n-m} \Phi_{m.n} R_{m+1.n} \varphi_{m+1} \varphi_{m+2} \dots \varphi_{n-1} -$$
$$- h_{m.n} k_{m.n} \varphi^2_{m+1} \varphi^2_{m+2} \dots \varphi^2_{n-1} = 0.$$

In de uitdrukking

$$R_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R''_{m+2.n} R'''_{m+1.n-1}$$

substitueeren wij

$$R''_{m+2.n} = R'_{m+2.n} + \varphi_n R'_{m+2.n-1}$$

$$R'''_{m+1.n-1} = R'_{m+1.n-1} + \varphi_m R'_{m+2.n-1}$$

$$R_{m+1.n} = R'_{m+1.n} + \varphi_m R''_{m+2.n} + \varphi_n R'''_{m+1.n-1} - \varphi_m \varphi_n R'_{m+2.n-1} =$$
$$= R'_{m+1.n} + \varphi_m R'_{m+2.n} + \varphi_n R'_{m+1.n-1} + \varphi_m \varphi_n R'_{m+2.n-1}.$$

Men vindt dan:

$$R_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R''_{m+2.n} R'''_{m+1.n-1} =$$
$$= R'_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R'_{m+2.n} R'_{m+1.n-1} \dots\dots (\delta)$$

Verder is:

$$R'_{m+1.n} = D_{m+1} R'_{m+2.n} - \varphi^2_{m+1} R'_{m+3.n}$$
$$R'_{m+1.n-1} = D_{m+1} R'_{m+2.n-1} - \varphi^2_{m+1} R'_{m+3.n-1}$$

waaruit volgt:

$$R'_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R'_{m+2.n} R'_{m+1.n-1} =$$
$$= \varphi^2_{m+1} (R'_{m+2.n} R'_{m+3.n-1} - R'_{m+3.n} R'_{m+2.n-1}).$$

Stellen wij nu:

$$\lambda_{m+1.n-1} = R'_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R'_{m+2.n} R'_{m+1.n-1},$$

dan heeft men:

$$\lambda_{m+1.n-1} = \varphi^2_{m+1} \lambda_{m+2.n-1}$$
$$\lambda_{m+2.n-1} = \varphi^2_{m+2} \lambda_{m+3.n-1}$$
$$\lambda_{m+3.n-1} = \varphi^2_{m+3} \lambda_{m+4.n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_{n-3.n-1} = \varphi^2_{n-3} \lambda_{n-2.n-1}$$
$$\lambda_{n-2.n-1} = - \varphi^2_{n-2} \varphi^2_{n-1} \quad *).$$

Hieruit wordt onmiddellijk afgeleid:

$$R'_{m+1.n} R'_{m+2.n-1} - R'_{m+2.n} R'_{m+1.n-1} =$$
$$= - \varphi^2_{m+1} \varphi^2_{m+2} \ldots \varphi^2_{n-1} \ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$$

Door invoering van de betrekkingen (δ) en (ε) gaat nu bovenstaande vergelijking over in den vorm:

$$\Phi^2_{m.n} + (-1)^{n-m} \Phi_{m.n} \frac{R_{m+1.n}}{\varphi_{m+1} \varphi_{m+2} \cdots \varphi_{n-1}} + h_{m.n} k_{m.n} = 0 \ldots (9)$$

7. De vergelijkingen (7), (8) en (9) kunnen nog een meer elegante gedaante aannemen.

---

*) Deze vergelijking wordt gevonden door de waarde te berekenen van:

$$\lambda_{n-2.n-1} = R'_{n-2.n} R'_{n-1.n-1} - R'_{n-1.n} R'_{n-2.n-1}.$$

Men heeft namelijk:

$$R''_{m+2.n} = \begin{vmatrix} \delta_n - \varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & 1 \end{vmatrix}$$

Telt men de rijen en ook de kolommen van dezen determinant bij elkander op, dan vindt men:

$$R''_{m+2.n} = \begin{vmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} + \delta_n \ldots\ldots & \delta_{m+2} + \delta_{m+3} \ldots + \delta_n & 1 \\ \varphi_{n-1} & \delta_{n-1} \ldots\ldots & \delta_{m+2} + \delta_{m+3} \ldots + \delta_{n-1} & 1 \\ 0 & \varphi_{n-2} \ldots\ldots & \delta_{m+2} + \delta_{m+3} \ldots + \delta_{n-2} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots 0 \;\; \varphi_{m+2} & \delta_{m+2} & 1 \\ 0 & 0 \ldots 0 \;\; 0 & \varphi_{m+1} & 1 \end{vmatrix}$$

Evenzoo is:

$$R'''_{m+1.n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} \ldots\ldots\ldots & & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} \ldots\ldots\ldots & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \varphi_{m+2} & D_{m+2} & \varphi_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1} - \varphi_{m+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots & 1 & 1 \\ \varphi_{n-1} & \delta_{n-1} \ldots\ldots & \delta_{m+2} + \delta_{m+3} \ldots + \delta_{n-1} & \delta_{m+1} + \delta_{m+2} \ldots + \delta_n \\ 0 & \varphi_{n-2} \ldots\ldots & \delta_{m+2} + \delta_{m+3} \ldots + \delta_{n-2} & \delta_{m+1} + \delta_{m+2} \ldots + \delta_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots 0 \;\; \varphi_{m+2} & \delta_{m+2} & \delta_{m+1} + \delta_{m+2} \\ 0 & 0 \ldots 0 \;\; 0 & \varphi_{m+1} & \delta_{m+1} \end{vmatrix}$$

Stellen wij nu:

$$\delta_r + \delta_{r+1} \ldots\ldots + \delta_s = \sum_r^s \delta\,,$$

dan gaan de bovenstaande uitdrukkingen over in:

$$R'_{m+2.n} = \frac{d R_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{m+1} \delta} + \frac{d R_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{m+2} \delta} \ldots\ldots + \frac{d R_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{n} \delta}$$

$$R'''_{m+1.n-1} = \frac{d R_{m+1.n}}{d \sum\limits_{n}^{n} \delta} + \frac{d R_{m+1.n}}{d \sum\limits_{n-1}^{n} \delta} \ldots\ldots + \frac{d R_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{n} \delta}\,,$$

terwijl men heeft:

$$(-1)^{n-m} \varphi_{m+1} \varphi_{m+2} \ldots\ldots \varphi_{n-1} = - \frac{d R_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{n} \delta}\,.$$

De vergelijkingen (7), (8) en (9) kunnen nu geschreven worden:

$$\varphi_m = \Phi_{m.n} \frac{R_{m+1.n}}{\Phi_{m.n}\left(\frac{dR_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{n} \delta} + \frac{dR_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{m+2} \delta} \ldots + \frac{dR_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{n-1} \delta}\right) + (\Phi_{m.n} - k_{m.n}) \frac{dR_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{n} \delta}} \ldots (10)$$

$$\varphi_n = \Phi_{m.n} \frac{R_{m+1.n}}{\Phi_{m.n}\left(\frac{dR_{m+1.n}}{d \sum\limits_{n}^{n} \delta} + \frac{dR_{m+1.n}}{d \sum\limits_{n-1}^{n} \delta} \ldots + \frac{dR_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{n} \delta}\right) + (\Phi_{m.n} + h_{m.n}) \frac{dR_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{n} \delta}} \ldots (11)$$

$$\Phi^2_{m.n} - \Phi_{m.n} \frac{R_{m+1.n}}{\frac{dR_{m+1.n}}{d \sum\limits_{m+1}^{n} \delta}} + h_{m.n}\, k_{m.n} = 0. \quad \ldots . \; (12)$$

De vergelijkingen (10), (11) en (12) geven drie betrek-

kingen tusschen de $2(n-m+1)$ elementen $\varphi_m, \varphi_{m+1} \ldots \varphi_n$, δ_{m+1}, $\delta_{m+2} \ldots \delta_n$, $h_{m.n}$, $k_{m.n}$, $\Phi_{m.n}$. Men kan dus een lenzenstelsel nog aan $2(n-m)+1$ voorwaarden laten voldoen.

8. Passen wij de gevonden formules toe op eén stelsel van b. v. 4 lenzen, dan is:

$$R = \begin{vmatrix} \delta_4 & \delta_3 + \delta_4 & \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \\ \varphi_3 & \delta_3 & \delta_2 + \delta_3 \\ 0 & \varphi_2 & \delta_2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{dR}{d\sum\limits_2^2 \delta} = \delta_3\delta_4 - (\delta_3 + \delta_4)\varphi_3, \quad \frac{dR}{d\sum\limits_2^3 \delta} = -\delta_4\varphi_2,$$

$$\frac{dR}{d\sum\limits_2^4 \delta} = \varphi_2\varphi_3,$$

$$\frac{dR}{d\sum\limits_4^4 \delta} = \delta_2\delta_3 - (\delta_2 + \delta_3)\varphi_2, \quad \frac{dR}{d\sum\limits_3^4 \delta} = -\delta_2\varphi_3,$$

zoodat de vergelijkingen (10), (11) en (12) overgaan in:

$$\varphi_1 = \Phi \frac{\delta_2\delta_3\delta_4 - (\delta_2+\delta_3)\delta_4\varphi_2 - \delta_2(\delta_3+\delta_4)\varphi_3 + (\delta_2+\delta_3+\delta_4)\varphi_2\varphi_3}{\Phi\{\delta_3\delta_4 - (\delta_3+\delta_4)\varphi_3 - \delta_4\varphi_2\} + (\Phi - k)\varphi_2\varphi_3}$$

$$\varphi_4 = \Phi \frac{\delta_2\delta_3\delta_4 - (\delta_2+\delta_3)\delta_4\varphi_2 - \delta_2(\delta_3+\delta_4)\varphi_3 + (\delta_2+\delta_3+\delta_4)\varphi_2\varphi_3}{\Phi\{\delta_2\delta_3 - (\delta_2+\delta_3)\varphi_2 - \delta_2\varphi_3\} + (\Phi + h)\varphi_2\varphi_3}$$

$$\Phi^2 - \Phi \frac{\delta_2\delta_3\delta_4 - (\delta_2+\delta_3)\delta_4\varphi_2 - \delta_2(\delta_3+\delta_4)\varphi_3 + (\delta_2+\delta_3+\delta_4)\varphi_2\varphi_3}{\varphi_2\varphi_3} + hk = 0.$$

Uit de formules van FERRARIS kunnen deze drie vergelijkingen ook worden afgeleid. Maar wanneer men dit tracht te doen volgens de gewone methoden, dan stuit men op

zulke lange berekeningen, dat zij bijna onuitvoerbaar zijn. FERRARIS zelf heeft zich dan ook tot de behandeling van een stelsel van drie lenzen bepaald. De toepassing van de vergelijkingen (10), (11) en (12) levert daarentegen, zelfs voor stelsels van een veel grooter aantal lenzen, geen bezwaren op.

Breda, Augustus 1882.

ALGEMEENE STELLINGEN

BETREFFENDE DE

STATIONAIRE BEWEGING EENER ONSAMENDRUKBARE, WRIJVENDE VLOEISTOF.

DOOR

D. J. KORTEWEG.

---

1. Het is bekend, dat de studie der vloeistofbeweging, die ontstaat, wanneer een lichaam van gegeven vorm zich met eenparige snelheid door eene naar alle richtingen onbegrensde, met vloeistof gevulde, ruimte heenbeweegt, kan worden teruggebracht tot die eener stationaire vloeistofbeweging. Bezit de vloeistof inwendige wrijving, dan kan de weerstand, dien de vloeistof aan de voortbeweging van het lichaam biedt, berekend worden uit den per eenheid van tijd bij die stationaire beweging in de vloeistof verbruikten wrijvingsarbeid of uit de aan de oppervlakte van het lichaam werkzame krachten. Door STOKES is die berekening voor het eerst, in de onderstelling dat de vloeistof aan het lichaam vastkleeft, voor den *bol*, door OBERBECK voor de *ellipsoïde* uitgevoerd, beiden evenwel met verwaarloozing van alle machten der stroomsnelheden, die de eerste te boven gaan, dus alleen geldig voor geringe snelheden.

Het was door de nadere beschouwing van de uitdrukking voor den wrijvingsarbeid, dat ik tot eenige algemeene theorema's omtrent de stationaire beweging eener onsamendrukbare wrijvende vloeistof geraakte, welke ik hier wensch te ontwikkelen.

2. Voor onsamendrukbare, wrijvende vloeistoffen gelden de algemeene bewegingsvergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l}
\varrho\frac{\delta u}{\delta t}+\varrho u\frac{\delta u}{\delta x}+\varrho v\frac{\delta u}{\delta y}+\varrho w\frac{\delta u}{\delta z}-\mu\Delta^2 u+\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta x}=0\\
\varrho\frac{\delta v}{\delta t}+\varrho u\frac{\delta v}{\delta x}+\varrho v\frac{\delta v}{\delta y}+\varrho w\frac{\delta v}{\delta z}-\mu\Delta^2 v+\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta y}=0\\
\varrho\frac{\delta w}{\delta t}+\varrho u\frac{\delta w}{\delta x}+\varrho v\frac{\delta w}{\delta y}+\varrho w\frac{\delta w}{\delta z}-\mu\Delta^2 w+\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta z}=0\\
\qquad\qquad\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}=0
\end{array}\right\}\ldots\text{(I)}$$

alwaar u, v, w de ontbondenen der snelheid in de richting der drie coördinaten-assen, V de potentiaal der van buiten op de vloeistofdeeltjes inwerkende krachten, p de vloeistofdruk, ϱ de soortelijke massa der vloeistof, μ haar wrijvingscoëfficiënt voorstellen.

Voor stationaire beweging gaan deze vergelijkingen over in:

$$\left.\begin{array}{l}
\varrho u\frac{\delta u}{\delta x}+\varrho v\frac{\delta u}{\delta y}+\varrho w\frac{\delta u}{\delta z}-\mu\Delta^2 u+\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta x}=0\\
\varrho u\frac{\delta v}{\delta x}+\varrho v\frac{\delta v}{\delta y}+\varrho w\frac{\delta v}{\delta z}-\mu\Delta^2 v+\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta y}=0\\
\varrho u\frac{\delta w}{\delta x}+\varrho v\frac{\delta w}{\delta y}+\varrho w\frac{\delta w}{\delta z}-\mu\Delta^2 w+\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta z}=0\\
\qquad\qquad\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}=0
\end{array}\right\}\ldots\text{(II)}$$

Zijn behalve deze vergelijkingen, voor een omgrensd met vloeistof gevuld gedeelte der ruimte, alle snelheden aan het begrenzend oppervlak naar richting en grootte bekend, dan is daardoor de vloeistofbeweging bepaald en het komt slechts aan op het integreeren der partieele differentiaal-verg. (II) en het invoeren der grenscondities.

Verwaarloost men de tweede en hoogere machten der snelheid, dan vereenvoudigen zich de vergelijkingen tot:

$$\left.\begin{array}{r}\mu \Delta^2 u = \dfrac{\delta (V\varrho + p)}{\delta x} \\[2ex] \mu \Delta^2 v = \dfrac{\delta (V\varrho + p)}{\delta y} \\[2ex] \mu \Delta^2 w = \dfrac{\delta (V\varrho + p)}{\delta z} \\[2ex] \dfrac{\delta u}{\delta x} + \dfrac{\delta v}{\delta y} + \dfrac{\delta w}{\delta z} = 0\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Alvorens nu verder te gaan willen wij opmerken, dat het zoo vereenvoudigde stel formules, dat voor physische vloeistoffen slechts voor oneindig kleine, of bij benadering voor geringe stroomsnelheden geldt, voor vloeistoffen, die een eindigen wrijvingscoëfficiënt bij oneindig kleine dichtheid bezitten, geldig blijft ook bij de grootste stroomsnelheden. Daar tusschen de soortelijke massa eener vloeistof en haar wrijvingscoëfficiënt geen noodzakelijk verband bestaat, zijn dergelijke vloeistoffen zonder traagheid allezins denkbaar. Wil men daarbij van het invoeren van van buiten inwerkende krachten geen afstand doen, dan kan men zich voorstellen, dat met het afnemen van ϱ gepaard gaat eene toeneming van V en in de formules (III) onder $V\varrho$ de limiet van dit produkt verstaan.

Uit deze omstandigheid blijkt, dat het in aanmerking nemen *uitsluitend* van de eerste macht der in de vloeistof optredende snelheden neerkomt op het verwaarloozen van de

traagheid der vloeistof. Inderdaad wijzen de vergelijkingen (III) aan, dat er voor ieder vloeistofdeeltje voor elk punt zijner baan *evenwicht* bestaat tusschen wrijvingskrachten en vloeistofdrukkingen plus de van buiten inwerkende krachten.

Denken wij ons bij zulk eene vloeistof zonder traagheid alle grenssnelheden, met behoud hunner richting in dezelfde reden k vergroot, dan zal men aan de vergelijkingen (III) kunnen blijven voldoen door ook in het inwendige der vloeistof alle snelheden k maal te vergrooten en tevens de drukkingsverschillen zoodanig te wijzigen, dat alle verschillen in de waarde der functie: $(lim.\ V\varrho) + p$ ook k maal grooter worden. De stroomlijnen, die bij stationaire beweging met de banen der vloeistofdeeltjes samenvallen, zullen daarbij volkomen denzelfden loop behouden. De verbruikte wrijvingsarbeid zal k^2 maal grooter worden. Beweegt zich een lichaam met eenparige snelheid door de naar alle kanten oneindig ver uitgestrekte vloeistof heen. dan zal de ondervonden weerstand evenredig met de snelheid veranderen.

3. Keert men daarentegen terug tot het meer algemeene geval, dat ook de tweede en hoogere machten der snelheden in rekening gebracht, dat dus aan de vloeistof traagheid wordt toegekend, dan bestaat, bij evenredige aangroeijing van alle grenssnelheden, geene zoodanige eenvoudige wet voor de toeneming van den wrijvingsarbeid. Men zal zich dan, zooals blijkt uit de verg. (II), van den nieuwen bewegingstoestand geen rekenschap kunnen geven, door ook alle inwendige snelheden in dezelfde reden te vergrooten. Integendeel, er zal eene andere snelheidsverdeeling intreden en de vloeistofdeeltjes zullen andere stroombanen gaan doorloopen.

Voor zoover mij bekend is, is het wel somtijds gebleken dat de oplossing uit de verg. (III) verkregen, dus voor eene vloeistof zonder traagheid geldende, bleek door te blijven gaan ook voor het meer algemeene geval dat aan de vloeistof traagheid wordt toegekend, zooals in 't geval van een oneindig langen cylinder, wentelende in eene concentrische uitholling, maar werd tot heden nooit eene oplossing der verg. (II) aangegeven, die niet reeds in de verg. (III) opgesloten lag. Daarentegen werden enkele malen de verg. (III)

voor gegeven grenscondities opgelost, waar eene ook voor trage vloeistof geldige oplossing eene zeer ingewikkelde gedaante zoude moeten aannemen.

De stellingen, die wij in het volgende ontwikkelen zullen, hebben meerendeels betrekking op stationaire bewegingstoestanden, die aan de verg. (III) beantwoorden, dus voorkomen bij vloeistoffen zonder traagheid of bij benadering bij physische vloeistoffen, die zich langzaam bewegen.

Een punt van onderzoek heeft het daarbij uitgemaakt of de bewegingsvergelijkingen, verkregen door alle machten der stroomsnelheid boven de eerste te verwaarloozen, ook tot *labiele* bewegingstoestanden kunnen voeren. De mogelijkheid daarvan is somtijds vermoed. Dat zulke labiele bewegingstoestanden bij *physische* vloeistoffen inderdaad intreden kunnen, wordt mijns inziens in hooge mate waarschijnlijk gemaakt door het bestaan, der in snelstroomende vloeistoffen zoo vaak voorkomende eigenaardige wervelbewegingen (draaikolkjes, Engelsch: *eddies*). Indien bijv. water stroomt uit eene sluisopening, die zich plotseling verwijdt, dan neemt op de meeste plaatsen de stroomsnelheid eene standvastige grootte en richting aan, maar in een bepaald gedeelte der met vloeistof gevulde ruimte en wel in de nabijheid der beide meer of minder scherpe ribben, waar de verwijding aanvangt, vormen zich telkens opnieuw wervelkringen, die dan met den stroom afdrijven. Naar 't mij voorkomt, bewijst dit, dat de bewegingstoestand daar *labiel* is; zonder dat toch zoude een beginnende wervelbeweging worden vernietigd, zooals dat later gebeurt, nadat zij de plaatsen bereikt heeft, waar de bewegingstoestand stabiel is. In stede daarvan ziet men de beginnende wervelbeweging aangroeijen, tot eene zeer merkbare depressie der wateroppervlakte, enz., optreedt. Zoolang die aangroeijing plaats heeft, moet de bewegingstoestand der watermassa, waarin men de wervelbeweging waarneemt, naar 't mij voorkomt, labiel zijn.

Het scheen mij nu, als gezegd, de moeite waard te onderzoeken of de verg. (III) reeds tot zulke labiele bewegingstoestanden voeren, als dus bij physische vloeistoffen, bij aanwezigheid van een vrij oppervlak, en waarschijnlijk ook zon-

der die aanwezigheid, zullen kunnen optreden. Neemt men als hypothese aan, dat er bij gegeven grenscondities, althans één *stabiele* stationaire bewegingstoestand mogelijk is, dan is het ontbreken van labiele bewegingstoestanden voor de verg. (III), althans bij afwezigheid van een vrij oppervlak, reeds met *Stelling III* aangetoond. Het kwam mij echter voor, dat, waar het mogelijk is, buiten die hypothese om, een streng wiskundig betoog te leveren, dit verre de voorkeur verdient, vooral daar, als mijne beschouwingen omtrent waarneembare labiele bewegingstoestanden bij physische vloeistoffen juist zijn, de hypothese zelve niet van bedenking vrij is.

4. STELLING *I. Stelt A de op de eenheid van tijd herleide hoeveelheid wrijvingsarbeid voor, die in een omgrensd gedeelte eener met onsamendrukbare vloeistof gevulde ruimte bij gegeven willekeurige snelheidsverdeeling verbruikt wordt, en* A_0 *de hoeveelheid die per eenheid van tijd verbruikt zoude worden, indien dezelfde ruimte met behoud, naar richting en grootte, van dezelfde stroomsnelheden aan de omgrenzing, gevuld ware met vloeistof gehoorzamende aan de bewegingsverg. (III) voor de stationaire beweging van vloeistoffen zonder traagheid, dan is:*

$$A = A_0 + 4\mu \int (\Omega')^2 . dI \quad . \; . \; , \; . \; . \; . \qquad \text{(VI)}$$

waarin dI *een volume-element der ruimte en* Ω' *de rotatiesnelheid voorstelt, die daar heerschen zoude voor den bewegingstoestand, die gelijk is aan het verschil tusschen de omschreven bewegingstoestanden.*

BEWIJS. Blijkens eene bekende formule *) mag, als u, v, w de ontbondenen voorstellen der snelheden, die bij den eerst omschreven bewegingstoestand voorkomen, voor den in den tijd dt verbruikten wrijvingsarbeid geschreven worden:

*) LAMB, *a treatise on the math. theory of the motion of fluids*, Cambridge. University Press., 1879, p. 220.

$$A\,dt = \mu\,dt \int \Big[2\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta w}{\delta z}\right)^2 + \left(\frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 \Big] dI$$

derhalve:

$$A = \mu \int \Big[2\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta w}{\delta z}\right)^2 + \left(\frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 \Big] dI \;\; \ldots . \;(1)$$

Wijzen wij voorts met u_0, v_0, w_0 de ontbondenen der snelheden bij den tweeden bewegingstoestand, met u', v', w', die behoorende bij het verschil van beide bewegingstoestanden aan, dan is:

$$u = u_0 + u'; \quad v = v_0 + v'; \quad w = w_0 + w' \;\; \ldots \;(2)$$

waarbij dus u', v', w' de snelheden voorstellen, die overblijven, als men de bij den eersten willekeurigen bewegingstoestand behoorende snelheden samenstelt met de tegengestelden der snelheden, die optreden zouden als de vloeistof haar inertie verloor met behoud derzelfde snelheden aan de omgrenzing en na intreding van den stationairen toestand.

Aan de grenzen heeft men:

$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = 0 \;\; \ldots\ldots \;(3)$$

Stelt men nu:

$$A' = \mu \int \Big[2\left(\frac{\delta u'}{\delta w}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta v'}{\delta y}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta w'}{\delta z}\right)^2 + \left(\frac{\delta w'}{\delta y} + \frac{\delta v'}{\delta z}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\delta u'}{\delta z} + \frac{\delta w'}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta v'}{\delta x} + \frac{\delta u'}{\delta y}\right)^2 \Big] dI \;\; \ldots\ldots \;(4)$$

dan zullen wij eerst aantoonen dat:

$$A = A_0 + A'.$$

Ten duidelijkste is:

$$A = A_0 + A' + 2\mu \int \Big[2 \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \cdot \frac{\partial w'}{\partial z} \right\} +$$
$$+ \left\{ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right\} +$$
$$+ \left\{ \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right\} \Big] dI \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Wij zullen dus slechts aan te toonen hebben dat de derde term van het tweede lid noodzakelijk wegvalt. Daarbij mogen wij, blijkens (III), wat u_0, v_0, w_0 betreft, gebruik maken van de betrekking:

$$\left.\begin{aligned} \mu \Delta^2 u_0 &= \frac{\partial (p_0 + lim.\ V\varrho)}{\partial x} \\ \mu \Delta^2 v_0 &= \frac{\partial (p_0 + lim.\ V\varrho)}{\partial y} \\ \mu \Delta^2 w_0 &= \frac{\partial (p_0 + lim.\ V\varrho)}{\partial z} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (6)$$

alwaar p_0 voorstelt de druk, die heerschen zoude, als de vloeistof hare traagheid verloor. Voorts is:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

en dus:

$$\Delta^2 (p_0 + lim.\ V\varrho) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

terwijl eindelijk

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Wij beginnen dezen derden term te brengen onder den vorm:

$$4\mu\int\left[\left\{\frac{\delta u_0}{\delta x}.\frac{\delta u'}{\delta x}+\frac{\delta u_0}{\delta y}.\frac{\delta u'}{\delta y}+\frac{\delta u_0}{\delta z}.\frac{\delta u'}{\delta z}\right\}+\left\{\frac{\delta v_0}{\delta x}.\frac{\delta v'}{\delta x}+\frac{\delta v_0}{\delta y}.\frac{\delta v'}{\delta y}+\frac{\delta v_0}{\delta z}.\frac{\delta v'}{\delta z}\right\}+\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{\delta w_0}{\delta x}.\frac{\delta w'}{\delta x}+\frac{\delta w_0}{\delta y}.\frac{\delta w'}{\delta y}+\frac{\delta w_0}{\delta z}.\frac{\delta w'}{\delta z}\right\}\right]dI-$$
$$-2\mu\int\left[\left\{\frac{\delta w_0}{\delta y}-\frac{\delta v_0}{\delta z}\right\}\left\{\frac{\delta w'}{\delta y}-\frac{\delta v'}{\delta z}\right\}+\left\{\frac{\delta u_0}{\delta z}-\frac{\delta w_0}{\delta x}\right\}\left\{\frac{\delta u'}{\delta z}-\frac{\delta w'}{\delta z}\right\}+\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{\delta v_0}{\delta x}-\frac{\delta u_0}{\delta y}\right\}\left\{\frac{\delta v'}{\delta x}-\frac{\delta u'}{\delta y}\right\}\right]dI. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Op de eerste der beide integralen, waarin de uitdrukking gesplitst werd, passen wij nu het theorema van GREEN toe. Denken wij daarbij aan de grensconditics (3), dan vallen de beide oppervlakte-integralen weg en onder toepassing van (6) gaat die eerste integraal over in:

$$-\frac{1}{\mu}\int\left\{u'\frac{\delta(p_0+lim.\ V\varrho)}{\delta x}+v'\frac{\delta(p_0+lim.\ V\varrho)}{\delta y}+\right.$$
$$\left.+w'\frac{\delta(p_0+lim.\ V\varrho)}{\delta z}\right\}dI, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

maar deze integraal reduceert zich onder toepassing der bekende formule

$$\int U\frac{\delta V}{\delta x}dI=-\int\frac{\delta x}{\delta \nu}UV dS-\int V\frac{\delta U}{\delta x}dI, \ldots (12)$$

waarin U en V willekeurige functies der coördinaten, ν de normaal op, dS een element van het omgrenzend oppervlak voorstellen, tot:

$$+\frac{1}{\mu}\int(p_0+lim.\ V\varrho)\left(\frac{\delta u'}{\delta x}+\frac{\delta v'}{\delta y}+\frac{\delta w'}{\delta z}\right)dI \quad . . (13)$$

dus blijkens (9) tot *nul.*

Wat de tweede integraal betreft, die in de uitdrukking (10) voorkomt, wij kunnen de vermenigvuldigingen uitvoeren en op ieder der termen, waarin de uitdrukking binnen het integraalteeken dan gesplitst wordt, de formule (12) of eene

der beide anderen, die daaruit door verwisseling van x met y of z ontstaan, toepassen. Men vindt dan:

$$\int\left[u'\left(\frac{\delta^2 w_0}{\delta x \delta z}+\frac{\delta^2 v_0}{\delta x \delta y}-\frac{\delta^2 u_0}{\delta z^2}-\frac{\delta^2 u_0}{\delta y^2}\right)+v'\left(\frac{\delta^2 u_0}{\delta y \delta x}+\frac{\delta^2 w_0}{\delta y \delta z}-\frac{\delta^2 v_0}{\delta x^2}-\frac{\delta^2 v_0}{\delta z^2}\right)+\right.$$
$$\left.+w'\left(\frac{\delta^2 v_0}{\delta z \delta y}+\frac{\delta^2 u_0}{\delta z \delta x}-\frac{\delta^2 w_0}{\delta y^2}-\frac{\delta^2 w_0}{\delta x^2}\right)\right] d I \;.\;.\;.\; (14)$$

Denkt men nu echter aan de betrekking (7), dan ziet men in, dat hiervoor geschreven worden kan:

$$-\int\left[u' \Delta^2 u_0 + v' \Delta^2 v_0 + w' \Delta^2 w_0\right] d I, \;.\;.\; (15)$$

maar deze uitdrukking gaat, onder toepassing der betrekkingen (6), wederom over in (11) en is dus *nul.*

Men heeft dus inderdaad:

$$A = A_0 + A' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (16)$$

en wij behoeven nog slechts aan te toonen dat:

$$A' = 4\,\mu \int (\Omega')^2 \, d I.$$

Ten einde daartoe te geraken, schrijven wij A' onder den vorm:

$$A' = 2\,\mu \int \left\{\left[\left(\frac{\delta u'}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u'}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta u'}{\delta z}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{\delta v'}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta v'}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta v'}{\delta z}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{\delta w'}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta w'}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta w'}{\delta z}\right)^2\right]\right\} dI -$$
$$-\mu \int \left[\left(\frac{\delta w'}{\delta y} - \frac{\delta v'}{\delta z}\right)^2 + \left(\frac{\delta u'}{\delta z} - \frac{\delta w'}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta v'}{\delta x} - \frac{\delta u'}{\delta y}\right)^2\right] d I \;.\; (17)$$

Vervolgens kan men weder op de eerste integraal het theorema van GREEN toepassen. Men vindt dan daarvoor

$$-\int (u' \Delta^2 u' + v' \Delta^2 v' + w' \Delta^2 w') \, d I \;.\;.\;.\;.\; (18)$$

Verder vindt men door ontwikkeling der vierkanten, toepassing van het theorema (12), onder inachtneming der voorwaarde (9) en van de grensconditiес (3), alles zooals bij het afleiden der formule (14) is geschied:

$$\int\left[\left(\frac{\delta w'}{\delta y}-\frac{\delta v'}{\delta z}\right)^2+\left(\frac{\delta u'}{\delta z}-\frac{\delta w'}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta v'}{\delta x}-\frac{\delta u'}{\delta y}\right)^2\right]dI=$$

$$=-\int(u'\,\Delta^2 u'+v'\,\Delta^2 v'+w'\,\Delta^2 w')\,dI, \quad .\;.\;.\;. \quad (19)$$

maar dan is het duidelijk, dat A' naar willekeur gebracht kan worden onder eene der beide vormen:

$$A'=-\mu\int(u'\,\Delta^2 u'+v'\,\Delta^2 v'+w'\,\Delta^2 w')\,dI \;..(20)$$

of:

$$A'=\mu\int\left[\left(\frac{\delta w'}{\delta y}-\frac{\delta v'}{\delta z}\right)^2+\left(\frac{\delta u'}{\delta z}-\frac{\delta w'}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta v'}{\delta x}-\frac{\delta u'}{\delta y}\right)^2\right]dI=$$

$$=4\,\mu\int\Omega'^2\,.\,dI. \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (21)$$

5. STELLING II. *In elk willekeurig omgrensd gedeelte eener den stationairen bewegingstoestand bereikt hebbende onsamendrukbare vloeistof zonder traagheid, is de verbruikte wrijvingsarbeid* MINIMAAL, *d. w. z. zij is geringer dan bij iederen anderen bewegingstoestand, waarbij dezelfde snelheden aan de omgrenzing, wat richting en grootte betreft, behouden blijven.*

Deze stelling is een onmiddellijk gevolg der voorgaande. Immers A' blijkt steeds positief te zijn, dus

$$A > A_0 .$$

Wij behoeven er wel niet op te wijzen, dat ook van die oplossingen der algemeene bewegingsvergelijkingen (II), welke onafhankelijk zijn van de traagheid der vloeistof, en dus, zooals bij het in § 3 besproken voorbeeld, geldig blijven

ook voor eene vloeistof zonder traagheid, de verbruikte wrijvingsarbeid minimaal is.

Indien men zich dus bij de wenteling van een oneindig langen cylinder in een concentrisch omhulsel, in de tusschengelegen vloeistof wervelbewegingen aanwezig denkt, dan zal die aanwezigheid slechts *vermeerdering* van den wrijvingsarbeid tengevolge kunnen hebben. Naar het mij voorkomt, kon dit moeilijk *a priori* worden ingezien, daar, indien de wervelbeweging plaats heeft in den zin, waarin de cylinder wentelt, *plaatselijk* de wrijvingsarbeid hier en daar ongetwijfeld aanzienlijk zoude verminderen.

Een ander gevolg van de gevonden wet is, dat wanneer in een of andere door vaste wanden begrensde ruimte op de eene plaats, bijv. door eene pijp, vloeistof *in-*, op eene andere *uitstroomt*, de invloed der wrijvingskrachten — waarin zij door de inertie der vloeistof kunnen worden tegengewerkt — daarheen strekken zal, de richting van den hoofdstroom, waarin de grootste snelheden optreden, zoo te wijzigen, dat deze van de wanden zooveel mogelijk verwijderd blijft.

6. Stelling III. *Bij in richting en grootte gegeven grenssnelheden bestaat er slechts één enkele bewegingstoestand, die aan de vergelijkingen voor wrijvende vloeistoffen zonder traagheid voldoet.*

Stel, er waren twee bewegingstoestanden mogelijk, dan zoude bij beiden gelijke wrijvingsarbeid moeten worden verbruikt, daar die arbeid voor beiden de kleinste met de gegevene grenssnelheden bestaanbare moet zijn. Men zoude dus overal moeten hebben

$$\Omega' = 0,$$

d. w. z. het verschil tusschen beide bewegingstoestanden zoude moeten zijn eene beweging met snelheidspotentiaal. Wij weten echter dat zulk eene beweging onmogelijk is, wanneer, zooals hier, langs de gansche omgrenzing de snelheden gelijk *nul* moeten zijn.

7. Stelling IV. *Wanneer eene onsamendrukbare wrijvende*

vloeistof aanvankelijk eene beweging bezit, welke niet met den stationairen bewegingstoestand, zooals die onder verwaarloozing der vierkanten en hoogere machten der snelheden gevonden wordt, strookt, dan zal — altijd met verwaarloozing dier machten — de verandering, die in den bewegingstoestand plaats heeft, als de grenssnelheden onveranderd gehouden worden, van dien aard bevonden worden, dat op ELK *oogenblik de op de eenheid van tijd herleide wrijvingsarbeid afneemt.*

Wij spreken hier opzettelijk niet van eene vloeistof zonder traagheid, omdat de stelling dan geen zin hebben zoude, dewijl de vloeistof dan *onmiddellijk* den blijvenden toestand aanneemt. Behandelt men daarentegen eene physische vloeistof, evenwel onder verwaarloozing van alle machten der snelheid boven de eerste, dan is dit *niet* het geval en men kan ook vergelijkingen opstellen voor de periode, die aan den stationairen toestand voorafgaat, al zijn het dan ook slechts benaderingsvergelijkingen.

Wij zullen nu te bewijzen hebben, dat de uitdrukking: $\frac{dA}{dt}$ voor iedere, van den stationairen toestand afwijkenden bewegingstoestand noodzakelijk negatief is. Daartoe zullen wij gebruik mogen maken van de betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned}
&\varrho\frac{\delta u}{\delta t}-\mu\Delta^2 u+\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta x}=0\\
&\varrho\frac{\delta v}{\delta t}-\mu\Delta^2 v+\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta y}=0\\
&\varrho\frac{\delta w}{\delta t}-\mu\Delta^2 w+\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta z}=0\\
&\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}=0
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (\mathrm{V})$$

Men heeft:

$$\frac{\delta A}{\delta t} = 2\mu \int \Big[2\frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta x\,\delta t} + 2\frac{\delta v}{\delta y}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta y\,\delta t} + 2\frac{\delta w}{\delta z}\cdot\frac{\delta^2 w}{\delta z\,\delta t} +$$

$$+ \left(\frac{\delta w}{\delta y}+\frac{\delta v}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta^2 w}{\delta y\,\delta t}+\frac{\delta^2 v}{\delta z\,\delta t}\right) + \left(\frac{\delta u}{\delta z}+\frac{\delta w}{\delta x}\right)\left(\frac{\delta^2 u}{\delta z\,\delta t}+\frac{\delta^2 w}{\delta x\,\delta t}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\delta v}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta y}\right)\left(\frac{\delta^2 v}{\delta x\,\delta t}+\frac{\delta^2 u}{\delta y\,\delta t}\right)\Big] dI =$$

$$= 4\mu \int \Big[\left\{ \frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta t} + \frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta t} + \frac{\delta u}{\delta z}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta z\delta t} \right\} + \left\{ \frac{\delta v}{\delta x}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta x\delta t} + \frac{\delta v}{\delta y}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta y\delta t} +\right.$$

$$\left. + \frac{\delta v}{\delta z}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta z\,\delta t} \right\} + \left\{ \frac{\delta w}{\delta x}\cdot\frac{\delta^2 w}{\delta x\,\delta t} + \frac{\delta w}{\delta y}\cdot\frac{\delta^2 w}{\delta y\,\delta t} + \frac{\delta w}{\delta z}\cdot\frac{\delta^2 w}{\delta z\,\delta t} \right\}\Big] dI -$$

$$-2\mu \int \Big[\left\{ \frac{\delta w}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta z} \right\} \left\{ \frac{\delta^2 w}{\delta y\delta t} - \frac{\delta^2 v}{\delta z\delta t} \right\} + \left\{ \frac{\delta u}{\delta z} - \frac{\delta w}{\delta x} \right\} \left\{ \frac{\delta^2 u}{\delta z\delta t} - \frac{\delta^2 w}{\delta x\delta t} \right\} +$$

$$+ \left\{ \frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} \right\} \left\{ \frac{\delta^2 v}{\delta x\,\delta t} - \frac{\delta^2 u}{\delta y\,\delta t} \right\}\Big] dI. \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (22)$$

Op de eerste integraal passen wij wederom toe het theorema van GREEN. Bedenken wij, dat aan de omgrenzing de snelheden onveranderlijk gedacht worden en dat dus aan die omgrenzing overal:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{\delta w}{\delta t} = 0 \,,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (23)$$

dan vallen de oppervlakte-integralen weg, en de eerste term van de bovenstaande uitdrukking gaat over in:

$$-\,4\mu \int \Big[\frac{\delta u}{\delta t}\Delta^2 u + \frac{\delta v}{\delta t}\Delta^2 v + \frac{\delta w}{\delta t}\Delta^2 w \Big] dI ,\,.\,. \quad 24)$$

of als wij toepassen de betrekkingen (V) in:

$$-\,4\varrho \int \Big[\left(\frac{\delta u}{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{\delta w}{\delta t}\right)^2 \Big] dI -$$

$$-4 \int \left(\frac{\delta u}{\delta t}\cdot\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta t}\cdot\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta t}\cdot\frac{\delta(V\varrho+p)}{\delta z} \right) dI \,.\,. (25)$$

Het eerste lid laten wij hier onveranderd. Het tweede gaat onder toepassing van (12) over in:

$$4\int(V\varrho+p)\frac{\delta\left(\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}\right)}{\delta t}dI\,.\;.\;.\;.\quad(26)$$

en is dus *nul*.

Wat de tweede term van de uitdrukking voor $\frac{\delta A}{\delta t}$ betreft, wij behandelen de daarin voorkomende integraal op geheel overeenkomstige wijze als met de integraal in den tweeden term van (10) is geschied. Die term wordt daardoor omgezet in den vorm:

$$+2\mu\int\left[\frac{\delta u}{\delta t}\Delta^2 u+\frac{\delta v}{\delta t}\Delta^2 v+\frac{\delta w}{\delta t}\Delta^2 w\right]dI,\;.\;.\quad(27)$$

zoodat men ten slotte verkrijgt:

$$\frac{\delta A}{\delta t}=-2\varrho\int\left[\left(\frac{\delta u}{\delta t}\right)^2+\left(\frac{\delta v}{\delta t}\right)^2+\left(\frac{\delta w}{\delta t}\right)^2\right]dI,\,.\quad(\mathrm{VI})$$

welke uitdrukking ten duidelijkste voortdurend eene negatieve waarde blijft bezitten en alleen voor den stationairen toestand *nul* wordt.

Na iedere verstoring van den stationairen toestand, die noodzakelijk met eene vermeerdering der wrijvingsarbeid gepaard gaat, is dus een streven aanwezig dien toestand te herstellen. Van oplossingen der bewegingsvergelijkingen, die zouden voeren tot onstabiele bewegingstoestanden, op de mogelijkheid van wier bestaan STOKES *) zinspeelt, kan geen

---

*) *Trans. of the Camb. phil. Soc.* Vol. IX, 1849, p. 56, reg. 5—9 v. o. Overigens stem ik geheel in met de beschouwingen van STOKES omtrent de beweging van een oneindig langen cylinder in eene wrijvende vloeistof. Maar de door hem bedoelde beweging kan nooit labiel zijn, want is de wrijvingsarbeid eenmaal beneden eene zekere waarde gedaald, dan kan geen nieuwe bewegingstoestand ontstaan, waarbij zij weder grooter worden zoude.

sprake zijn, *zoolang de tweede en hoogere machten der snelheid buiten rekening gelaten worden, en geene vrije oppervlakte aanwezig is.*

8. Volledigheidshalve voegen wij hier nog toe eene laatste algemeene stelling omtrent de beweging van vloeistoffen zonder traagheid, die wij nergens uitdrukkelijk uitgesproken vonden, maar wier bewijs slechts eene herhaling behoeft te zijn van eene door KIRCHHOF *) bij eene soortgelijke gelegenheid gebruikte bewijsvoering.

9. STELLING V. *Bij de stationaire beweging eener vloeistof zonder traagheid, kan de rotatiesnelheid Ω binnen de vloeistof nergens eene maximum-waarde bezitten.*

Stellen wij met:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta w}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta z}\right);\ \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta u}{\delta z} - \frac{\delta w}{\delta x}\right);\ \zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y}\right) \quad ..(28)$$

de ontbondenen der rotatiesnelheid voor, dan wordt met behulp der verg. (III) gemakkelijk gevonden:

$$\Delta^2 \xi = 0, \qquad \Delta^2 \eta = 0, \qquad \Delta^2 \zeta = 0. \quad . \ . \ . \ . \ (29)$$

Daaruit volgt dan dat *noch* ξ, *noch* η, *noch* ζ binnen de vloeistof ooit eene maximum of minimum-waarde kunnen bereiken. Bedenkt men dat de coördinaten-assen willekeurig gekozen kunnen worden, dan zal derhalve de projectie der rotatiesnelheid (op de rotatie-as uitgezet) op iedere willekeurig gerichte lijn *noch* maximum, *noch* minimum kunnen worden. Maar dan kan de rotatiessnelheid zelve nimmer *maximum* zijn, want dan zoude hare projectie op eene aan de rotatie-as evenwijdige lijn evenzeer maximum moeten zijn. Alleen aan de omgrenzing kan zij eene maximum waarde bereiken. Hetzelfde geldt voor de projectie $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ der rotatiesnelheid op een willekeurig vlak, of van die op een willekeurige lijn.

---

*) KIRCHHOF, *Vorlesungen über math. Physik. Merhanik*, p. 186 en 187.

Hiermede schijnt mij het bewijs geleverd te zijn, dat het ontstaan van wervelkringen bij vloeistofbewegingen, die tot den stationairen bewegingstoestand kunnen worden teruggebracht, zooals wanneer een lichaam zich door wrijvende vloeistof heen beweegt, slechts verklaard kan worden *òf* door de aanwezigheid van een vrij oppervlak, *òf* door de hoogere machten der snelheden. dus de traagheid der vloeistof, in rekening te brengen, zooals dan ook wel te verwachten was.

Amsterdam, 16 November 1882.

BIJDRAGE

TOT DE

FLORA MYCOLOGICA VAN NEDERLAND.

IX *)

DOOR

C. A. J. A. OUDEMANS.

I. SPORIFERA.

A. Hymenomycetes.

AGARICINI.

1. Ag. Amanita virosus Fr. (*Epicr.* II, 18). In naaldbosschen te Driebergen. Aug. 1882. Oudemans. — Aanvankelijk volkomen wit en daardoor spoedig in het oog loopend, verandert de kleur van dezen kloeken fungus spoedig eenigszins van aard, en ziet men eerst den top des hoeds en later een grooter gedeelte zijner oppervlakte lichtgrijs worden. Genoemde hoed is eerst kegelvormig, doch wordt spoedig vlakker (flauw-convex) en onderscheidt zich dan door een zekeren glans, die wellicht aan gedroogd slijm is toe te schrijven. Zijn rand is volkomen glad, maar onregelmatig van omtrek en gelobd of gegolfd. Steel onder den hooggezeten, slap neêrhangenden, breeden, aan de bovenzijde gestreepten, vergan-

*) De eerste 8 bijdragen hebben in het *Ned. Kruidk. Archief*, 2e Reeks, het licht gezien. In aansluiting aan dit achttal, bleef de verdeeling der Fungi naar Cooke's *Handbook* gehandhaafd.

kelijken ring in opstaande schubben uiteengescheurd, rolrond, doch aan zijn voet knolvormig-gezwollen, inwendig gevuld. Beurs in dikke sponzige stukken verbrokkeld en daardoor vergankelijk, geene aanhangselen op den hoed achterlatend. Lamellen vrij, smal-lancetvormig, met vlokkige randen.

AG. VIROSUS behoort tot de groote soorten, met een hoed van $1^1/_2$ decim. middellijn. Op de plaats waar de fungus naar buiten komt, vindt men dan ook eene vrij ruime holte in den grond. Opmerkelijk mag het heeten, dat de meeste exemplaren er asymmetrisch uitzien, doordien de steel excentrisch of de hoed wanstaltig ontwikkeld is. De fungus verspreidt een flauw walgelijken geur.

Behalve in Nederland, groeit A. VIROSUS ook in Engeland, Zweden, Finland, Frankrijk, Oostenrijk, Zwitserland. Van andere landen stonden mij geene opgaven ten dienste.

Eene goede afbeelding dezer soort leverde COOKE in zijne *Illustrations of British Fungi*, tab. I.

2. AG. LEPIOTA MELEAGRIS SOW. (FR. *Epicr.* II, 31) behoort, afgaande op de afbeelding van COOKE's *Illustrations of British Fungi* (t. 26), de plaats in te nemen van AG. L. CLYPEOLARIUS, vroeger door mij bekend gemaakt en op run in warme plantenkassen te Amsterdam gevonden. Plaat 1214 der *Flora Batava*, verkeerdelijk AG. CEPAESTIPES geheeten, houd ik voor denzelfden champignon.

3. AG. LEPIOTA STRAMINELLUS BAGL. (FR. *Epicr.* II, 35). Op run in eene der plantenkassen van den kruidtuin te Amsterdam. Oct. 1881. OUDEMANS. — Een buitengewoon fraaie, hooggele, kleine fungus, bij eene oppervlakkige beschouwing niet ongelijk aan gele exemplaren van AG. L. CEPAESTIPES. Hoed ongeveer $2^1/_2$ centim. breed, vliezig, in 't midden een weinig vleeziger, eerst klokvormig, later bijna vlak, gesleufd, met ragfijne draden en schubbetjes bezet, die aan de vingers of andere voorwerpen blijven kleven. Steel stroogeel, eveneens vlokkig bepoederd, naar beneden bolvormig gezwollen, inwendig hol. Ring, dicht bij den top des steels, uit opstaande draden gevormd. doch zoo weinig ontwikkeld, dat hij afwezig schijnt te zijn Lamellen dicht opeen, vrij, bij den steel tot een ring vereenigd, buikig, geel. Volgens FRIES

werd deze soort door Baglietto het eerst, en wel in den kruidtuin te Genua, gevonden en beschreven. Behalve in de *Epicrisis*, vond ik er elders geen gewag van gemaakt.

4. Ag. Tricholoma luridus Schaeff. (*Ic. Fung.*, t. LXIX; Fr. *Epicr.* II, 54). Hoed vleezig, eerst bol, later vlak, tot 1 decim. in middellijn, golvend van omtrek, zeer lichtbruin of ook wel geelachtig of geelachtiggroen, in het midden een weinig donkerder, soms ook wel lichtbruin met een geelachtigen gordel aan den rand. Oppervlakte droog, glanzig, met fibrillen bezet, die later in zeer fijne schubbetjes loslaten. Oudere hoeden meest radiaal ingescheurd. Steel rolrond, naar beneden ietwat dikker, gevuld, wit, met zeer fijne vlokjes bezet. Lamellen gedrongen, wit, zonder vlekken en zonder donkerder rand. (Cooke *Illustr.* t. 214).

5. Ag. Tricholoma gambosus Fr. (*Epicr.* II, 66). St. Pietersberg bij Maastricht, Mei 1882; 1e luitenant Clumper. — Hoed vleezig, vast, droog, eerst bol, later vlak, hier en daar even ingedrukt, meest onregelmatig van vorm en met een golfswijs op- en neêrgaanden, naar binnen gekrulden rand. Kleur van onze exemplaren zeer-bleekgeel. Middellijn tot 8 centim. Steel kort en dik of langer en rolrond, inwendig vast, aan den top fijnvlokkig, wit. Lamellen bros, wit, bij den steel buikig, vrij dicht op elkaâr; velen aanzienlijk korter dan de overigen. Grootste breedte 8—10 millim.

Bij de vele afbeeldingen, van dezen zeer smakelijken fungus door Fries vermeld, voegen wij die van Cooke *Illustrations*, t. 63. Onze exemplaren, welke daarmede, wat den habitus en de kleur betreft, zeer goed overeenkwamen, hadden echter veel breedere lamellen.

6. Ag. Tricholoma panaeolus Fr. (*Epicr.* II, 73). St. Pietersberg bij Maastricht, 5 Oct. 1882; 1e luit. Clumper. — Hoed glad, vlak of in het midden een weinig ingedeukt, tot 7 cent. in middellijn, centrisch of excentrisch gesteeld, middelmatig-vleezig, met vocht doortrokken, hoewel niet doorzichtig, eenigszins golvend gebogen en met den rand naar binnen gekruld. Op de vuil aschgelë (onder het drogen verbleekende) oppervlakte vindt men bij vele (hoewel niet bij alle) exemplaren zeer duidelijke, volkomen cirkelronde, als

door het vallen van een druppel veroorzaakte bruine vlekken, en aan den rand dicht op elkander geplaatste en den loop der lamellen volgende strepen. — Steel vast, circa 3 cent. hoog, vezelig gestreept, vuilgrijs. Lamellen dicht op elkander, vuilgrijs, circa 5 mill. breed. Sporen op wit papier zeer licht rozerood, onder den mikroskoop kleurloos, breed-ovaal of eirond, $5 \times 2^1/_3$ (= 5 μ lang, $2^1/_3$ μ breed).

Deze soort vindt men afgebeeld in de *Icon. sel.* van FRIES (t. 36 f. 2) en in de *Illustrations* van COOKE (t. 97). Onze exemplaren hielden tusschen beide afbeeldingen het midden.

7. AG. CLITOCYBE INORNATUS SOW. (*Engl. bot.* t. 342; FRIES, *Epicr.* II, 80). Hartekamp bij Bennenbroek, Oct. 1879; F. W. VAN EEDEN (*Flora Batava*, t. 1250).

8. AG. COLLYBIA AQUOSUS BULL. (*Ch. de Fr.*, t. 12; FR. *Epicr.* II, 122; *Icon. sel. Fung.* t. 66, f. 2). Onder eene spar te Hilversum; Juli 1882. OUDEMANS.

9. AG. MYCENA ROSELLUS FR. (*Epicr.* II, 132). Bij Hilversum ('s Gravelandsche weg), op heigrond, tusschen gras, onder Berken. 20 Aug. 1879. OUDEMANS.

Afgebeeld in de *Flora Danica* t. 2025, f. 2; bij GONNERMANN et RABENHORST, *Mycologia Europaea* t. 7, f. 11; bij PERSOON *Myc. Eur.*, t. 5, f. 3 en bij COOKE *Illustr.* t. 131.

10. AG. PLEUROTUS STARINGII OUD. (*Hedw.* 1881, p. 183). Excentricus, velo nullo, lamellis decurrentibus, pileo laterali, postice in stipitem brevem obliquum producto. Pileo suborbiculari vel subreniformi, carnoso, valde compacto, parum elastico, convexo-plano, postice depresso, glaberrimo, nitidulo, margine *involuto;* stipite curto, crasso; lamellis subdistantibus, albis, postice anastomosantibus, *integerrimis.* Pilei majores (lati 4 cent., longi $2^1/_2$ cent.) cum minoribus caespitosi, partim imbricati, fuligineo-fusci, centro dilutiores. Stipes niveus, subtomentosus. Lamellae siccando sordidescentes.

Accedit ad AG. PL. REVOLUTUM KX. (*Fl. crypt. des Flandres* II, 158; FR. *Epicr.* 174), sed ab eo differt margine plus quam incurvo, imo involuto et lamellis integerrimis.

Legit ad truncum WHISTARIAE CHINENSIS, prope Lochem Neerlandiae, domina JOH STARING, in cujus memoriam speciem dixi.

11. AG. PLEUROTUS AMBIGUUS OUD. (*Fl. Batava*, t. 1295). Excentricus, velo nullo, lamellis longe decurrentibus, pileo postice in basin stipitiformem obliquam brevem producto. Lamellis sporisque dilute lilacinis ab AG. OSTREATO cui affinis videtur distinctus. Absentia odoris Artemisiae Dracunculi tempusque autumnale — neque vernale — quo viget, vetant quominus exempla nostra, in trunco decorticato Populi Italicae Horti bot. Amstelaed. crescentia, cum AG. EUOSMO BERK. confundamus.

Pilei imbricati sessiles vel breviter pedunculati, carnosi, molles, utplurimum pulvinati, nitidi, recentes tactu adiposi, nigricantes vel saturate violacei, obsoleti fuscescescentes, margine incurvo, stipite firmo elastico, sursum incrassato, basi strigoso; lamellis eglandulosis, postice anastomosantibus.

Legi exempla m. Dec. a° 1881.

12. AG. LEPTONIA SOLSTITIALIS FR. (*Epicr.* II, 202). Bij Hilversum, 20 Aug. 1879, tusschen gras langs wegen.

13. AG. HYPHOLOMA DISPERSUS FR. (*Epicr.* II, 292). Tusschen Polytricha en Dicrana in Beukenbosschen na veelvuldige regens; 22 Aug. 1882. Driebergen. OUDEMANS.

Deze soort is uiterst goed te herkennen. Zij heeft het voorkomen en de kleur van AG. FASCICULARIS, doch de individuen zijn kleiner en staan altijd afzonderlijk. Hoe hooger het mos is, waartusschen zij voorkomen, des te langer worden hunne stelen. Zeer lange stelen werden afgebeeld door SAUNDERS en SMITH (*Mycological Illustrations*, t. 24, f. 1, 2, 3).

Onze exemplaren hadden hoeden van $1^1/_2$—2 centim. breed en stelen van 7—9 centim. lang. Na regen, waren gene duidelijk kleverig en licht rosachtig-geelbruin, met lichter gekleurden eenigszins glanzigen rand, waaraan met het vergrootglas zeer fijne, glanzige, liggende haren waren waar te nemen. De stelen vond ik vast en taai, glanzig en golvend van oppervlakte, naar boven voor $^3/_4$ geel-, naar onder voor $^1/_4$ bruinachtig, overal eenigszins vezelig. Lamellen aangewassen, dicht opeen, zeer-lichtgeel, doch door de sporen kleikleurig. De kleur der hoeden is bij SAUNDERS en SMITH veel donkerder dan wij ze ooit zagen.

14. AG. PSATHYRELLA SUBTILIS FR. (*Epicr.* II, 316). Op koe-

meest, Mei 1882. OUDEMANS. Het uiterlijk is goed weêrgegeven door PERSOON (*Mycologia Europaea* III, t. 26, f. 1).

15. CORTINARIUS (INOLOMA) BOLARIS FR. (*Epicr.* II, 364). Tusschen afgevallen bladeren onder Eikenhakhout. Driebergen, Aug. 1882. — Een der fraaist gekleurde Cortinarii, doch meest niet anders dan in verwrongen toestand te vinden, d. i. met kronkelenden of gebogen (brozen) steel en asymmetrischen, golfswijs verbogen, rand des hoeds. Hoed en steel beiden met saffraanroode, kleine, aangedrukte schubbetjes bezet, later ietwat verbleekend. Lamellen licht-kaneelbruin, aan den steel afloopend, vrij dicht opeen.

De afbeelding van PERSOON (*Icones pictae*, t. XIV, f. 1) geeft een zeer slecht denkbeeld van deze soort. Veel beter is die van COOKE in *Grevillea* V, t. 79.

16. CORTINARIUS (DERMOCYBE) CROCEOCONUS FR. (*Epicr.* II, 371). Gezellig in Dennenbosschen; Aug. 1882, Driebergen. Eene door FRIES niet vermelde afbeelding dezer soort vindt men bij COOKE, in *Grevillea* VII, t. III, f. 3.

17. CORTINARIUS (DERMOCYBE) FUCATOPHYLLUS LASCH. (FR. *Epicr.* II, 372). In Dennenbosschen; Hilversum, Juli, 1879. Zeer kennelijk aan de citroengele, scharlakenrood gevlekte, fijn getande lamellen.

18. LACTARIUS HELVUS FR. (*Epicr.* II, 433). In Dennenbosschen. Driebergen; Aug. 1882. — Zeer veel gelijkend op L. RUFUS, doch lichter van kleur, minder duidelijk umbonaat en onder het drogen een Melilotusgeur verspreidend. Volwassen hoed $3^1/_2$ centim. breed, fraai, roodbruin, fraai cirkelrond, in het midden ingedrukt, met een kleinen umbo, aan den rand naar binnen gekromd en geplooid (dit laatste vooral duidelijk bij jonge exemplaren) en fijn-donzig behaard. Lamellen dicht op elkander, rosachtig vleeschkleurig, later bruinachtig, een weinig afloopend. Steel rolrond, een weinig bleeker dan de hoed, naar boven fijn-donzig behaard. De oppervlakte des hoeds is korrelig-ruw en splijt onder het drogen in schubvormige facetjes.

19. RUSSULA CYANOXANTHA FR. (*Epicr.* II, 446). In Beukenbosschen. Driebergen; Aug. 1882. — Hoed jong zeer donkerpaars, sterk kleverig; later vuilgroen aan den omtrek en vuilgeel

in 't midden, eerst met gladden, daarna met gestreepten, niet zelden blauwen rand. Lamellen wit, eindelijk geelachtig, veelvuldig gevorkt, hier en daar met kortere afwisselend, vrij dicht op elkander en ten slotte elkander van ter zijde bedekkend. Steel zeer krachtig, vast, wit, inwendig sponzig, ten laatste caverneus.

20. Russula fellea Fr. (*Epicr.* II, 447). In Beukenbosschen. Driebergen; Aug. 1882. — Deze fungus, die door Fries onder de afdeeling der »Heterophyllae" gerangschikt werd, niettestaande hare lamellen door hem »subaequales" genoemd worden, en die men veeleer zoude meenen onder de »Fragiles" te moeten vinden, is bijzonder kennelijk. Vooreerst hebben hoed, steel en lamellen — de steel echter in mindere mate — eene gele kleur; ten tweede riekt de fungus, doorgebroken, naar inkt, en ten derde heeft hij bijzondere smalle lamellen (3 mill.). Verder schijnt R. fellea bij voorkeur onder Beuken voor te komen. Ik vermoed dat deze soort vroeger wel meer gevonden is, doch verkeerdelijk bepaald werd.

De hoed der grootste door mij gevonden exemplaren was niet breeder dan 4—5 centim., bol, in 't midden schijfvormig-afgeplat en met een rossigen gloed bedeeld, verder kleverig (na regen) of dof-glanzig (bij droogte). In tegenstelling met de opgave van Fries, vond ik reeds bij pas te voorschijn gekomen individuen een min of meer knobbelig gestreepten (naar binnen omgebogen) rand. Lamellen bijkans allen even lang, dicht bij den steel kort-gevorkt, in de diepte met elkander anastomoseerend en daardoor niet gemakkelijk loslatend van het scherp smakende hoedvleesch. Steel tot 4 cent. hoog, 10—12 mill. dik, eerst inwendig sponzig, later hol, dikwerf met een zeer fijn meel bepoederd.

POLYPOREI.

21. Boletus luridiformis Rostk. (*Monogr. Boletorum*, t. 35; Fr. *Epicr.* II, 512). Tusschen gras onder Beuken. Oosterbeek; Aug. 1881. — Onder hare verwanten te herkennen aan de gezwollene, samengestelde, oranjeroode poriën en aan den volkomen gladden, in de laagte rooden, naar

boven scherp afgebakend gelen steel. De hoed was bij onze exemplaren zuiver olijfkleurig.

Ik vermeld onder dit nummer, dat ik na hevige regens, in Aug. 1882, onder Beuken tusschen het gras, aan den weg tusschen Driebergen en Zeist, zeer fraaie exemplaren van BOLETUS RADICATUS gevonden heb. De versch gegroeide exemplaren hadden een zeer donkeren, bijna zwarten, doch duidelijk bedauwden hoed, die onder het drogen hier en daar berstte en dan een rozerood vleesch deed zien, met een dunnen, naar binnen gekrulden rand; verder een rolronden, naar beneden buikig-gezwollen en daarna tot een — onder den grond voortkruipend — strengvormig stuk saamgetrokken, gelen steel, met fijne roode korreltjes aan zijn voet; eindelijk vrij kleine, eerst witte, daarna lichtgele, aanvankelijk heen- en weêrgebogen, later in grootte van elkander afwijkende poriën.

22. POLYPORUS LEPRODES ROSTK. (*Monogr. Polyporum*, t. 15; FR. *Epicr.* II, 535). Pileis imbricatis, subsemicircularibus vel reniformibus, carnoso-lentis, superficie inaequalibus, in exemplis adultis latitud. transv. 2 decim., altera $1^1/_2$ decim., distinctissime zonatis, ad zonarum limites praesertim rimoso-squamosis, fuligineo-fusco-lutescentibus, ad marginem tenuiorem acutum sinuato-lobatis, lobis passim grosse crenatis; stipitibus lateralibus brevissimis, concoloribus, basi nigricantibus; tubulis brevissimis ($1—1^1/_2$ millim. longis), aperturis minutissimis, albidoflavis, rotundis, aequalibus, tactu violascentibus. Legi post fluvia copiosa in trunci vetustioris Fagi residuis, m. Aug. a^0 1881 prope Arnhem.

23. POLYPORUS INTYBACEUS FR. (*Epicr.* II, 538; *Fl. Bat.* t. 1270). In den Haarlemmerhout aan den voet van Eiken; 1881. CH. LAURENT.

HYDNEI.

24. HYDNUM SCABROSUM FR. (*Epicr.* II, 599). In Dennenbosschen; Driebergen, Aug., 1882. — Hoed vleezig, bros, bol, cirkelrond of eenigszins gelobd, licht-bruinachtig-aschgrauw, over de geheele oppervlakte in concentrische gordels van schubben verdeeld Aan den rand zijn deze schubben kleiner

en niet verheven, meer in 't midden echter uitpuilend, plomper en hoekiger. Tusschen de gordels ontdekt men het witte hoedvleesch. In het midden is de hoed veelal in verschillende richtingen gescheurd. Stekels grijsbruin, aan den top wit, 2—5 cent. lang. Steel $3\frac{1}{2}$—$4\frac{1}{2}$ cent. hoog, $1\frac{1}{2}$—$2\frac{1}{2}$ cent. dik, rolrond of onregelmatig-hoekig en afgeplat; aan den top licht- of grijsbruin en met kleine ruwe puntjes (niet tot ontwikkeling gekomen stekels) bezet, naar beneden duidelijk staalblauwachtig-zwart, al of niet vlokkig geschubd.

Hoedvleesch wit; steelvleesch donkergrijs; geen van beiden met gordels geteekend.

Deze soort kan door hare veel lichtere kleur en door den bijzonderen aard des steels, die in de hoogte ruw en aan den voet blauwzwart van kleur is, niet met H. IMBRICATUM, SQUAMOSUM en SUBSQUAMOSUM verwisseld worden.

25. HYDNUM VELUTINUM FR. (*Epicr.* II, 604). In Dennenbosschen; Driebergen, Aug. 1882. — Hoed zonder gordels, in het midden roodachtig-bruin, aan den naar binnen eenigszins omgekrulden rand wit en golvend, door bobbels en scheuren oneffen van oppervlakte. Steel plomp, bruinachtig, vlokkig. Stekels eerst wit, later aschkleurig, 3 centim. lang. Vleesch des hoeds inwendig wit, dat des steels bruinachtig, beiden zonder gordels. Gedroogd, riekt de fungus eenigszins naar Melilotus.

26. HYDNUM SCROBICULATUM FR. (*Epicr.* II, 604). In Dennenbosschen; Eerbeek, Sept. 1880. Dr. J. W. MOLL. — In alle opzichten overeenstemmend met FRIES *Icon. Sel.* t. 5, f. 1. Vleesch taai, leerachtig, in- en uitwendig roestkleurig, bij het doorsnijden doordringend van reuk, sterk water opzuigend. — Hoed in het midden zeer oneffen door opstaande kammen, die elkander in alle richtingen kruisen, en daardoor aanleiding geven tot het ontstaan van groefjes; naar den omtrek snel dun toeloopend. Randen der kammen eenigermate vlokkig. Stekels 2—3 millim. lang, het langst bij den steel, eerst grijs, later licht- en eindelijk donkerbruin. Steel kort, glad en onbehaard.

Hoed inwendig zeer duidelijk gordelswijs geteekend.

27. RADULUM ORBICULARE FR. (*Epicr.* II, 623). Op Eiken-

takken. Baarnsche Bosch; Maart 1882. Student WAKKER.

AURICULARINI.

28. CYPHELLA MUSAE OUD. (n. sp.). Legi in trunco putrescente Musae Ensetes in horto botanico Amstelaedamensi, m. Martio, a⁰ 1880.

Cupulae membranaceae, pedicellatae, pendulae, oblique digitaliformes, dilute glaucescentes, ad aperturam 1—2 mill. latae, extus pulveraceae, pedicello pubescente, 1 mill. longo, basi floccoso. Basidia brevi-cylindrica, apice subincrassata, sterigmatibus subtilissimis 4 (?), singulis sporulam ovalem ferentibus.

TREMELLINI.

29. TREMELLA FRONDOSA FR. (*Epicr.* II, 690). Op afgevallen takken, Baarn, Dec. 1881. — Mijn exemplaar had groote afmetingen en eene vuilgele, in het lila spelende, kleur en was sterk gekronkeld. De sporen vond ik kogelrond en volstrekt niet »subelliptic", zooals COOKE (British Fungi, p. 345) zulks opgeeft voor T. FOLIACEA.

B. GASTEROMYCETES.

HYPOGAEI.

30. MELANOGASTER VARIEGATUS TUL. var. BROOMEIANUS BERK. (*Ann. Nat. Hist.*, 1st Series, XIII, n⁰. 301; COOKE *Brit. Fungi* p. 356). In Dennenbosschen bij Laag-Soeren; Aug. 1882. Gevonden door den Heer J. J. COUTURIER. — Deze fungus werd ontdekt, doordien hij met een gedeelte zijner oppervlakte boven den grond kwam. Hij groeide op de aangewezen plaats menigvuldig. Versch vond ik hem volkomen reukeloos; exemplaren, in ontbinding overgegaan, verspreidden daarentegen een hoogst onaangenamen stank. De grootste exemplaren,

mij toegezonden, waren 4—5 cent. in middellijn en wogen 30 gram.

Uiterlijk voorkomen eenigszins met dat van aardappelen overeenkomend, doch de kleur meer naar 't gele overhellend. Oppervlakte der kogelronde, elliptische of eivormige, exemplaren volkomen vrij, d. w. z. niet, zooals bij Rhizopogon, door middel van een bundel draden in den grond vastzittend; desniettemin in een net van kraakbeenachtige, lichtbruine, vertakte en anastomoseerende draden besloten. Mazen van het netwerk donzig, d. i. met zachte, liggende, licht-okergele, grof ineengeweven haren bezet. Vleesch op 't gevoel eenigszins veerkrachtig, indrukbaar, doch den oorspronkelijken vorm terugbekomend, gemakkelijk te klieven. Peridium op de doorsnede licht-okergeel. Gleba terstond na het klieven vuil-bruinachtig, met een groenen weerschijn, nergens met openingen. Trama, in de gedaante van lichtgele kronkelende lamellen, in alle richtingen heenloopend, hier wat dunner, elders wat meer gezwollen. Sporen uiterst klein, langwerpig-ovaal, 7 μ lang, $2^1/_5$ μ breed, zeer-lichtbruin, afzonderlijk gezien bijna kleurloos, volkomen glad en doorschijnend. Met eene zeer sterke vergrooting, ontwaart men bij in water ondergedoken sporen gewoonlijk twee glanzige plekjes (vacuolen?): een aan elke pool.

De figuur van Vittadini (*Monogr. Tuberacearum*, t. III. f. IV), gewijd aan Octaviania (= Melanogaster variegata, past, wat de afdeelding der gleba betreft, volkomen op onze exemplaren. De dikte van het peridium is echter bij Vittadini zoo goed als nul, terwijl de draden aan de oppervlakte niet werden medegeteekend. De beschrijving van Vittadini verschilt in zooverre van onze voorwerpen, als deze reukeloos, en de sporen volstrekt niet niervormig waren.

C. Coniomycetes.

SPHAERONEMEI:

31. Coniothyrium Fragariae Oud. (n. sp). In receptaculis

maturis Fragariae vescae. Amstelaedami, m. Julio, a⁰ 1882 det. VAN LEDDEN HULSEBOSCH. — Perithecia membranacea, fuliginea, apice irregulariter dehiscentia. Sporidia fuliginea, late-elliptica, $11^2/_3$ μ longa, $9^1/_3$ μ lata, utrinque vel uno alterove apice acutata, basi saepe sterigmatis portiunculo superstite achromo, hyalino, appendiculata.

32. DOTHIORA GALLARUM OUD. (n. sp.). In superficie gallae cujusdam, in pagina inferiore folii Quercus Roboris ortae et in terram delapsae. Legit mihique obtulit Ds. M. W. BEYERINCK.

Pustulae plurimae nigrae, variae dimensionis, e superficie gallae inter epidermidis ejus ruptae lacinias dentiformes emergunt. Majores semiglobosae, 1 mill. in diametro metientes, cum aliis: partim minoribus, imo punctiformibus, partim majoribus, e duabus vel pluribus globulis conflatis, ideoque forma parum irregulari gaudentibus, mixtae vivunt. Superficies omnium pustularum obscure nitens, majorum insuper verruculis prominentibus (non autem peritheciorum ostiolis) inaequalis. Caro pustularum ceracea, cultro facillime in lacinias tenuissimas scindenda, intus alba, plurimis notis itaque cum carne sclerotiorum plurimorum comparanda.

Medium pustularum — columellae ad instar — occupat axis parenchymatosa, ex qua septa plurima radiatim versus periphaeriam sese expandunt spatiumque columellam inter et parietem pustularum in plurima loculamenta dividunt. Loculamentorum superficies tota sterigmatibus tecta, singulis sporidio achromo, hyalino, continuo onusta. Sporidia longa 20 μ, lata 7—8 μ, utrinque obtusa ideoque anguste-ovalia, basi p. m. excentrice cicatrisata.

Alvorens een naam aan den beschreven fungus te geven, was het wenschelijk eerst na te gaan, welke fungi tot hiertoe op galnoten waren aangetroffen. Het onderzoek daaromtrent leverde schrale uitkomsten. Slechts twee soorten toch bleken mij op voornoemde uitwassen ontdekt te zijn, en wel TUBERCULARIA GALLARUM LÉV. (*Ann. Sc. Nat.*, 3e Série, V, 273) en SPHAERIA GALLAE SCHWEIN. (*Fgi Amer. bor.*, n⁰. 1446). De Heer M. C. COOKE, te London, had de welwillendheid,

mij, op mijn verzoek om inlichting, mede te deelen dat een exemplaar van SPHAERIA GALLAE, van SCHWEINITZ afkomstig en in het bezit van Dr. CURTIS, gebleken was tot het geslacht DIPLODIA te behooren, en bruine, elliptische, ten laatste door een tusschenschot in 2 gelijke helften gescheiden, 30 μ lange en 15 μ breede sporen bevattede. Hij voegde er bij, dat de naam van SPHAEROPSIS GALLAE, in der tijd door BERKELEY en CURTIS gekozen om den fungus aan te duiden (zie RAVENEL, *Fungi Americani*, n°. 148), zeer waarschijnlijk in de wereld gekomen was, doordien deze mycoloog geene rijpe, doch onrijpe exemplaren aan een onderzoek onderworpen had.

LÉVEILLÉ's diagnose, die ik zelf konde raadplegen, luidde als volgt: »TUBERCULARIA GALLARUM, nov. sp. Receptaculis erumpentibus gregariis hemisphaericis sessilibus rugosis atris, sporis elliptico-linearibus obtusis continuis. — Hab. Vincennes ad gallas Quercus (herb. *Mus. Par.*). Obs. Cette espèce forme sur les galles des Chênes de petits tubercules noirs, plus ou moins rapprochés, dont la surface est rugueuse. Les spores, examinés au microscope, sont presque linéaires, obtuses aux deux extrémités." — Daarentegen was de beschrijving van BERKELEY en CURTIS, die de Heer COOKE mij in afschrift mededeelde, in de volgende bewoordingen vervat: »Caespitulis sparsis, nigerrimis, valde elevatis, superficialiter innatis. Peritheciis primum omnino confluentibus ambitu quasi-lobato. Demum semiliberis assurgentibus difformibus regularioribus immixtis rugosis, majusculis, manifestim papillatis, intus albofarctis."

Ofschoon het niet twijfelachtig is, dat vele dezer zinsneden ook op onzen fungus toepasselijk zijn, zoo is toch het onderscheid tusschen eene TUBERCULARIA, met hare naakte conidiën, eene DIPLODIA, met donker gekleurde tweecellige sporen, en eene SPHAEROPSIS, met eene niet in kamertjes verdeelde vruchtholte, aan den eenen kant, en den door ons beschreven vorm, aan den anderen, zoo groot, dat wij ons niet gerechtigd gevoelden de fungi van LÉVEILLÉ, SCHWEINITZ en BERKELEY met den onzen identisch te noemen. En het is om deze reden, dat wij een anderen naam op den laatsten hebben toegepast.

33. PHOMA MALVACEARUM WEST. (5e *Not.*, p. 21). Op gedroogde stengels van Althaea rosea. Utrecht, Dec. 1879. Dr. J. W. MOLL.

34. SEPTORIA CERASTII ROB. et DESM. (*Ann. Sc. nat.* 3e S., XI, 347). Op de bladeren van Cerastium triviale. Amsterdam, Mei 1878. OUDEMANS.

35. SEPTORIA RAMEALIS ROB. et DESM. (*Ann. Sc. nat.* 3e S., XX, 94; KICKX, *Crypt. des Flandres* I, 433 = Sept. Ruborum WEST. *Herb.* n°. 934 = Ascochyta Ruborum LIB. *Cr. Ard.* n°. 247). Op doode takken van een Rubus. Hilversum, Aug. 1879; OUDEMANS.

Ofschoon Mad. LIBERT, DESMAZIÈRES en KICKX opgeven, dat deze SEPTORIA op levende takken groeit, trof ik ze toch, zeer krachtig ontwikkeld, ook op doode aan. Mijne exemplaren gelijken zeer veel op die van Mad. LIBERT, minder op die van DESMAZIÈRES, doch deze schijnen op jongere takken gezeten te zijn. De perithecia zijn koolzwart, min of meer op rijen geplaatst, stevig, en de sporen kleurloos, draadvormig, ongeveer 25 μ lang en 1.5 μ breed. Tusschenschotten of vacuolen nam ik evenmin in de sporen waar als KICKX.

MELANCONIEI.

36. CORYNEUM MACROSPORUM BERK. (in HOOKER's *Eng. Flora*, V, 355; COOKE *Brit. Fungi*, 469). Op Beukentakken. Haarlem, Juni 1878. OUDEMANS. — In FRESENIUS *Beiträge*, p. 51, vindt men, onder den titel van SPORIDESMIUM VERMIFORME, eene uitvoerige en door afbeeldingen opgehelderde beschrijving van deze soort.

TORULACEI.

37. TORULA MURORUM CDA (*Icon. Fung.* II, 9). Op de witkalk van vochtig geworden muren. Amsterdam, April 1882. OUDEMANS.

38. SPORIDESMIUM ALTERNARIAE COOKE (*Brit. Fungi*, 483). Aan de binnenzijde der kartons van een nat geworden gebonden boek. Amsterdam, April 1882. OUDEMANS.

USTILAGINEI.

39. Urocystis sorosporioides Körnicke (Fuckel, *Symb. Myc.* 3er Nachtr., 10; Fischer de Waldheim, *Aperçu syst. des Ustilaginées*, 41 en *Ann. Sc. nat.* 6e S., IV, 241). Op de bladeren van Thalictrum sylvaticum. Haarlem, in den zomer van 1882. Groll.

40. Entyloma Ungerianum de Bary (*Bot. Zeit.* a^0^ 1874, p. 105; Fisch. de Waldh. *Aperçu* etc. 46; *Ann. S. nat.* 6e S., IV, 248). Op de bladeren van Ranunculus repens. In den herfst van 1882, bij Amsterdam. Stud. Wakker.

41. Protomyces Bizzozerianus Sacc. (*Michelia* I, 14; *Fgi Ital.* tab. 103; Mycotheca Veneta n^0^. 889). Op de bladeren van Sagittaria sagittifolia. Baarn, 1882. Stud. Wakker.

AECIDIACEI.

42. Cronartium Ribicolum Dietr. (*Arch. f. d. Naturkunde Liv-, Esth- und Kurlands*, II Ser., Bd. I, p. 287; Winter *Krypt. Fl.* 236). Op de bladeren van Ribes nigrum. Baarn, 1882. Stud. Wakker.

43. Endophyllum Sedi Lév. (sec. Schneider, in Rab. *Fgi Eur.* n^0^. 1499; Winter *Krypt. Fl.*, 252). Op de bladeren van Sedum acre in de Haarlemmer duinen. Stud. Calkoen.

44. Aecidium Pini P. (in Gmel. *Syst. nat. Linn.* 2, p. 1473 et *Syn.* 213 = Peridermium Pini Wallr. *Fl. Crypt.* 262). Op den stam en de takken van Pinus Strobus. — Hort. bot. te Amsterdam, Juli 1879, Oudemans; Eerbeek, Dec. 1879, Dr. J. W. Moll.

Deze fungus wordt tegenwoordig beschouwd als de aecidium-toestand van Coleosporium Senecionis.

D. Hyphomycetes.

STILBACEI.

45. Stilbum fimetarium B. Br. (*Ann. Nat. Hist.* 2^d^ S., V, n^0^. 494; Cooke *Brit. Fgi* 553 = Helotium fimetarium P.

Syn. 678 = Leotia fimetaria P. *Obs Myc.* II, 21 et tab. V, f. 4 et 5). Op de excrementen van konijnen en andere Herbivoren. Amsterdam, 1882. OUDEMANS.

46. STILBUM ERYTHROCEPHALUM DITMAR (in STURM *Pilze*, Bd. 1, p. 91, tab. 45). Op de excrementen van konijnen en andere Herbivoren. Amsterdam, 1882. OUDEMANS.

47. CHAETOSTROMA STIPITATUM CDA (*Icon. Fung.* III, 32; tab. V, fig. 83 = Volutella ciliata FR. var. stipitata SACC. *Mich.* II, 366 et *Fgi Ital.* tab. 730). Op konijnenkeutels. Amsterdam, Nov. 1882. OUDEMANS.

48. FUSARIUM EQUISETORUM DESM. (*Ann. Sc. nat.* 3e S., XI, 363 et *Pl. Crypt. de France* 1e Ed., n°. 1846, 2e Ed., n°. 1646 = Hymenula Equiseti LIB. *Crypt. Ard.* n°. 236). Op oude stengels van Equisetum limosum. Apeldoorn, Aug. 1880. OUDEMANS.

49. MYROTHECIUM INUNDATUM TODE (*Fgi Mecklenb.* I, 25 et tab. V. f. 39). Op gedroogde exemplaren van Russula nigricans. Driebergen, Aug. 1882. OUDEMANS.

MUCEDINES.

50. CEPHALOSPORIUM ROSEUM OUD. Mycelium repens, e hyphis subtilissimis, achromis, ramosis, continuis contextum, ramulos sporiferos breves erectos emittens, conidiorum capitulo vertice ornatos. Conidia dilute rosea, ovalia, achroma, protoplasmate granuloso dense repleta, 7 μ longa, 3 μ lata. Fungus maculas format dilute roseas in calce diutius humectata ad superficiem murorum. Amstelaedami, m. Apr., a° 1882. OUDEMANS.

51. STERIGMATOCYSTIS DUBIA SACC. (*Michelia* I, 91 et *Fgi Ital.* tab. 902 = Aspergillus dubius CDA. *Icon. Fg.* II, 18; tab. XI. fig. 77). Op een bedorven stuk kaas. Amsterdam, 1882. VAN LEDDEN HULSEBOSCH.

52. STERIGMATOCYSTIS NIGRA VAN TIEGHEM (*Bulletin de la Soc. bot. de France*, XXIV, a° 1877, p. 102). Op eene bedorven citroenschil. Amsterdam, Jan. 1879. Prof. HUGO DE VRIES.

53 STERIGMATOCYSTIS PHAEOCEPHALA SACC. (*Fgi Ital.* tab.

903 = Aspergillus phaeocephalus DUR. ET MONT. *Fl. Alg.* 324; MONT. *Sylloge* 301; SACC. *Fgi Ven.* V, 194). Op bedorven gekookte gelatine. Amsterdam, 1882. VAN LEDDEN HULSEBOSCH.

Het is wellicht niet overbodig te dezer plaatse te herinneren, dat het geslacht STERIGMATOCYSTIS ingevoerd werd door CRAMER, die de eerste soort daarvan, afkomstig uit den uitwendigen gehoorgang van een doove, onder den naam van S. ANTACUSTICA, in 1859 beschreef in het *Vierteljahrschrift der naturf. Gesellschaft* in Zürich. Eene tweede soort, onder den titel van ST. SULPHUREA door FRESENIUS in de wetenschap ingevoerd (*Beiträge zur Mycologie*, a⁰ 1850—1863, p. 83), groeide op de uitwerpselen van een sijsje. Hem volgde VAN TIEGHEM met een opstel (*Bull. de la Soc. bot. de France*, XXIV, p. 101—104), o. a. gewijd aan de optelling der volgende 7 nieuwe soorten: ST. ALBA (op brood, bladeren, uitwerpselen), ST. CARNEA (aan de binnenvlakte eens zaaddops van Bertholletia excelsa), ST. LUTEA (op zaden van Phoenix dactylifera), ST. OLIVACEA (op konzenieljepoeder), ST. VIRENS (op leder), ST. NIGRA (op aardappelschijven) en ST. CORONATA. SACCARDO eindelijk maakte ons met ST. CANDIDA (*Michelia* I, 91 en *Fgi Ital.* tab. 80), ST. ITALICA (*Mich.* I, 91 en *Fgi Ital.* tab. 901) en ST. PHAEOCEPHALA (*Fgi Veneti* V, 194 en *Fgi Ital.* tab. 903) bekend, en toonde aan, dat *Aspergillus niger* CDA naar het geslacht STERIGMATOCYSTIS moest worden overgebracht.

Het verschil nu tusschen de geslachten ASPERGILLUS en STERIGMATOCYSTIS is hierin gelegen, dat de blaas aan het einde der overeindstaande hyphen bij het eerste eene dichte opeenhooping van sterigmata draagt, waaruit de snoeren van conidiën terstond ontspringen, bij het tweede daarentegen uit de primaire sterigmata — die daardoor dan ook eenigermate aan basidiën doen denken — twee tot vier secundaire sterigmata voortbrengt, die zich als de dragers der snoeren voornoemd doen kennen. Het gevolg dezer wijziging in den bouw openbaart zich voor den oppervlakkigen waarnemer reeds hierin, dat de conidiënhoofdjes bij STERIGMATOCYSTIS grooter omvang hebben dan bij ASPERGILLUS, en dat

de overeindstaande hyphen, welke aan die hoofdjes tot steun verstrekken, bij eerstgenoemd geslacht zich door een forscheren bouw onderscheiden.

54. Penicillium brevicaule Sacc. (*Fgi Ital.* tab. 890). Op bedorven papier. Amsterdam, 1882. Oudemans.

55. Botrytis pilulifera Sacc. (*Mich.* II, 122; *Fgi Ital.* tab. 695). Op muizenkeutels. Amsterdam, 1882. v. Ledden Hulsebosch.

56. Polyactis fascicularis Cda (*Flore illustrée*, p. 33, tab. XVI). Op rottende plantendeelen. Amsterdam, 1882. v. L. Hulsebosch.

57. Verticillium pyramidale Bon. (*Handb.* 97 et tab. VIII, fig. 179; Sacc. *Fgi Ital.* tab. 842). Op rottende bladeren en bedorven run in plantenkassen. Amsterdam, 1882. Oudemans.

58. Polyscytalum murinum Oud. (*Hedwigia* 1882, n^{0}. 11). Op muizenkeutels. Amsterdam, Juli 1882. v. Ledden Hulsebosch.

59. Ramularia destructiva Phill. et Plowr. (in Rab. *Fgi Eur.* n^{0}. 2267). Op bladeren van Myrica Gale. Oisterwijk, Aug. 1880. Oudemans.

60. Kickxella alabastrina Coemans (*Bull. Soc. royale de bot. de Belgique* I, 155; v. Tieghem in *Ann. des Sc. nat.*, 5e Série, XVII, 385). Op paardenvijgen. Amsterdam; Mei 1882. Oudemans.

II. SPORIDIIFERA.

A. Physomycetes.

MUCORINI.

61. Mucor racemosus Fres. (*Beitr. zur Mycologie*, 12). Op bedorven chocolademelk. April 1881. Oudemans.

62. Mucor oosporus Lk. (*Spec.* I, 84; Fr. *S. M.* III, 321). Op paardenmest. Mei 1882. v. L. Hulsebosch. Mid-

dellijn der conidiënblaas = $^3/_4$ millim. Conidiën langwerpig-ovaal, kleurloos, 30 μ lang, 14 μ breed.

63. THAMNIDIUM ELEGANS LK. (*Obs. in ord. nat. plant. Dissert.* I, 1816, p. 28 et *Spec.* I, 95 = Ascophora elegans CDA. *Ic. F.* III, 14 = Mucor elegans FR. *S. M.* III, 322. Vergelijk ook VAN TIEGHEM, *Ann. d. Sc. Nat.* 5e S., XVII, 321). Op paardenmest. Juli 1882. OUDEMANS.

64. CIRCINELLA UMBELLATA V. TIEGHEM (*Ann. d. Sc. Nat.*, 5e S., XVII, 298). Op paardenmest. Nov. 1882. Stud. WAKKER.

65. CHAETOSTYLUM FRESENII V. TIEGHEM (*Ann. d. Sc. Nat.* 5e S., XVII, 329). Op paardenmest. Mei 1882. OUDEMANS.

66. CHAETOCLADIUM JONESII FRES. (*Beitr. zur Mycol.* 97; VAN TIEGHEM in *Ann. d. Sc. Nat.* 5e S., XVII, 332). Op paardenmest. Mei 1882. OUDEMANS.

67. PIPTOCEPHALIS FRESENIANA DE BARY et WORONIN (*Beitr. zur Morph. u. Phys. d. Pilze*, 2e Reihe, a⁰. 1866, p. 24). Op paardenmest. Mei 1882. OUDEMANS

68. PILOBOLUS KLEINII VAN TIEGHEM (*Ann. d. Sc. Nat.*, 6e S., IV, 337). Op paardenmest. Mei 1882. OUDEMANS.

ENTOMOPHTHOREAE.

69. EMPUSA MUSCAE COHN (*Hedwigia* a⁰. 1855, p. 57; BREFELD, *Abh. d. Naturf. Ges. zu Halle*, XII). Op kamervliegen. OUDEMANS.

B. ASCOMYCETES.

PERISPORIACEI.

70. CHAETOMIUM SPIRALE ZOPF (*Zur Entwges. der Ascom.*; Chaetomium; in *Nov. Act. Leop. Carol.* XLII, 275; afzonderlijke brochure p. 79). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

71. CHAETOMIUM BOSTRYCHODES ZOPF (ibid. 277; afzonderlijke brochure p. 81). Op konijnenmest, Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

72. CHAETOMIUM KUNZEANUM ZOPF (ibid. 278; afz. brochure p. 13 = Ch. chartarum *Ehrb. Sylv. myc. Ber.* 27). Op vochtig bedorven papier; Juli 1882. OUDEMANS.

HELVELLACEI.

73. HELVELLA MONACHELLA FR. (*Syst. Myc.* II, 18; MICH. *Gen.* t. 86 fig. 8; BATTARA *Arim.* p. 24 et t. 2 fig. H; SCHAEFF. t. 283; KROMBH. t. 21 fig. 12 et 15; COOKE *Mycogr.* t. 93 fig. 1). Bij Maastricht, Mei 1882. Luit. CLUMPER.

74. GEOGLOSSUM WALTERI BERK. (in *Hedwigia*, a°. 1875, p. 39; COOKE, *Mycographia* tab. I, fig. 4). — Lochem, 20 Sept. 1879; Mej. JOH. STARING. De diagnose van COOKE luidt aldus: Hirsutum, atro-fuscum, nigrescens. Clavula spathulata, compressa, vix distincta; stipite gracili. Ascis cylindraceo-clavatis. Sporidiis linearibus rectis vel leniter curvulis, 3—7 septatis, brunneis. Paraphysibus septatis, vix incrassatis, superne curvulis, vel circinatis.

De mij toegezonden exemplaren, twee in getal, waren niet hooger dan 2 centim. Steel en knots even lang, sterk afgeplat, met korte zwarte haren bezet. Asci, sporen en paraphysen volkomen zooals bij COOKE. Sporen meest gekromd, nooit met meer dan 7 tusschenschotten, bruin, aan het eene uiteinde een weinig smaller dan aan het andere, ongeveer $^1/_{10}$ mill. lang en 7 μ breed. Paraphysen aan de toppen voorover gebogen en bruin.

75. PEZIZA (MOLLISIA) ALICULARIAE n. sp. Detexi in exemplis ALICULARIAE SCALARIS. — Cupulae $^1/_3$—$^1/_4$ millim. in diametro metientes, depresso-orbiculares, sessiles, basi in plantulae nutrientis parenchymate absconditae, extus dilute, intus saturatius aurantiacae, ostio nitidissime circulari praeditae. Asci numerosissimi, perfecte cylindracei, versus apicem tantum paullulum incrassati, 70 μ c^a^ longi, 5 μ lati, achromi, membrana tenerrima Paraphyses achromae, subtilissime filiformes. Sporidia disticha, 23—30 μ longa, 2 μ lata, achroma, bacilliformia, 5—septata. Deurne, m. Febr., a° 1872.

Fungus noster neutiquam confundendus cum 1° PEZIZA JUNGERMANNIAE Nees (= P. bryopbila P. in *Myc. Eur.* I, 305 = Ascobolus Jungermanniae B. Br. in COOKE *Brit. Fungi*, 726 = Pseudopeziza Jungermanniae FUCK in *Symb.* 271); 2°. PEZIZA ERYTHROSTIGMATE MONT. *Syll.*, 186; 3°. PEZIZA MARCHANTIAE BERK. in HOOK, *Eng. Fl.* V, 204 (= Helotium Marchantiae COOKE *Brit. Fungi*, 715), quae omnes in Hepaticis variis crescunt. P. JUNGERMANNIAE minutissimus vocatur, obscure viridis, exsiccando nigrescens et crispata; P. ERYTHROSTIGMA punctiformis dicitur, cupulis gaudens carnoso-tremellosis, clausis, e basi angustiore ovatis, extus subvillosis; P. MARCHANTIAE adscribuntur cupulae obconicae, flavofuscae, crispatae et sporae ellipticae.

76. HELOTIUM CALYCINUM KARSTEN (*Mycol. Fennica* I, 154 = Peziza calycina γ Laricis COOKE *Brit. Fungi*, 685). Op Lorkentakken. Oosterbeek, Aug. 1880. OUDEMANS. Cupulae imo tempore sicco semper apertae, neque clausae uti in PEZ. BICOLORE. Exempla nostra lusum sistunt cupulis fere sessilibus, tomentellis (KARSTEN l. c). Hymenium aurantiacum. Asci cylindracei, versus basin paullulum contracti, 50—55 μ. longi, $4^1/_2$—5 μ. lati. Sporidia 8, oblongata, eguttulata, una extremitate paullulum angustiora quam altera, 5—10 μ longa, $1^1/_2$—3 μ crassa. Paraphyses apice paullo incrassatae achromae.

77. PATELLARIA PARVULA COOKE (*Brit. Fgi*, 720). Op ontschorste Eikentakken. Baarnsche Bosch. Maart 1882. Stud. WAKKER.

78. ASCOBOLUS VINOSUS BERK. (in HOOK. *Eng. Fl.* V, 209; BOUDIER *Mém. sur les Ascobolées*, 31). Op konijnenkeutels; Juli 1882. OUDEMANS.

79. ASCOBOLUS AERUGINEUS FR. (*Syst. Myc.* II, 165; BOUDIER l. c. 32). Op koemest; Juli 1882. OUDEMANS.

80. ASCOBOLUS GLABER P. (*Observ. Mycol.* I, 34, p. p.; FR. *Syst. Myc.* II, 164; BOUDIER l. c. 33). Op paardenmest; Juli 1882. OUDEMANS.

81. ASCOBOLUS IMMERSUS P. (*Obs. Mycol.* I, 35; FR. *Syst. Mycol.* II, 164; BOUDIER, l. c. 36). Op paarden- en koemest; Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

82. ASCOBOLUS AMOENUS OUD. (*Hedwigia* 1882, n°. 11). In stercore Cameli Bactriani. — Amstelaed., aestate a° 1882. — v. LEDDEN HULSEBOSCH. — Cupulae sparsae, minutae (0.4 mill. in diametro), parum prominentes, extus pallide ochraceae, glabrae, laeves, floccorum tenerum stratui insidentes, epithecio ex ascis valde emergentibus nigro-punctato. — Asci plurimi in quavis cupula, ampli, clavati, breve pedunculati, 230 μ c^a longi, 35 μ c^a lati, toto ambitu ejusdem parietum tenuitatis, 8-spori, paraphysibus quamplurimis tenerrimis, septulatis, apice rectis obvallati. Sporidia disticha, primitus achroma, postea violacea, denique fuscescentia, elliptica, 30 μ longa, 15 μ lata, statu colorato tantum densissime subtilissimeque granulata (verruculosa).

Het is niet gemakkelijk, onder de 35—40 soorten van ASCOBOLUS (in beperkten zin, d. i. dus met violette vrije sporen), die voor het meerendeel in verschillende tijdschriften bekend gemaakt en beschreven werden, den weg te vinden. Ondertusschen blijkt die taak niet zoo bezwarend te zijn, als men met korrelig-ruwe sporen te maken heeft. En dit was voor ASC. AMOENUS het geval. Niet meer dan drie soorten bleken mij, na een nauwkeurig onderzoek, tot hiertoe onber die rubriek te zijn saamgebracht, nl: ASC. BRUNNEUS COOKE (*Brit. Fgi*, 728), ASC. STICTOIDEUS SPEGAZZINI (*Michelia* I, 474) en ASC. ATROFUSCUS PHILLIPS and PLOWRIGHT (*Grevillea* II, 186, t. 24, f. 1). De beschrijvingen, daarvan gegeven, waren echter op den door ons onderzochten vorm niet toepasselijk, en van daar de noodzakelijkheid, dezen door een nieuwen naam te onderscheiden.

ASC. BRUNNEUS wijkt van onze soort af door behaarde perithecia of ascomata (»Cups pilose"), en verder daardoor, dat hare sporen, reeds in ongekleurden staat, de korrelig-ruwe oppervlakte doen zien, en van kleurloos bruin worden, zonder den overgang in het violet te doorloopen »sporidia at first hyaline, and granular, at length brown"). Deze ASC. BRUNNEUS werd op koemest gevonden, doch komt, wat de afmetingen harer sporen betreft, met ASC. AMOENUS volkomen overeen.

ASC. STICTOIDEUS werd door SPEGAZZINI uitwendig als »aquose

albidus" en, wat de hymeniale laag of het epithecium betreft, als »dilute-olivaceus" beschreven. Bovendien bleek elk perithecium dezer soort niet meer dan 5—10 asci te bevatten en de wand dezer laatsten naar boven iets dikker te wezen dan lager. Ook werden de paraphysen gekromd, en niet recht geheeten.

Aan Asc. ATRORUFUS eindelijk werden zwartbruine perithecia toegeschreven en sporen, wier lengte op 40 μ en wier breedte op 20 μ geschat werd.

83. ASCOPHANUS SUBFUSCUS BOUD. (*Mém. sur les Ascobolées*, 52). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

84. ASCOPHANUS MINUTISSIMUS BOUD. (*Mém. sur les Ascob.* 53). Op geitenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

85. ASCOPHANUS SEXDECIMSPORUS BOUD. (*Mém. sur les Ascob.* 53). Op geitenkeutels. Juli 1882. OUDEMANS.

86. ASCOPHANUS CARNEUS BOUD. (*Mém. sur les Ascob.* 60). Op koemest. Driebergen, Aug. 1882. OUDEMANS.

87. ASCOPHANUS PILOSUS BOUD. (*Mém. sur les Ascob.*, 64). Op mest van verschillende Herbivoren. Aug. 1882. OUDEMANS.

88. ASCOPHANUS PAPILLATUS BOUD. (*Mém. sur les Ascobol.* 62). Op geitenkeutels. Aug. 1882. OUDEMANS.

89. SACCOBOLUS KERVERNI BOUD. (*Mém. sur les Ascob.*, 39). Op geitenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

90. SACCOBOLUS NEGLECTUS BOUD. (*Mém. sur les Ascob.*, 41). Op paardenmest. Juli 1882. OUDEMANS. — Kluwen van sporen 30 μ lang. Sporen 10—11 μ lang, 6 μ breed.

91. SACCOBOLUS BOUDIERII OUD. (in *Hedwigia*, a⁰ 1882, n⁰ 11). Perithecia sive ascomata minima, glabra, laevia. Asci clavati, 100 μ cᵃ longi, 18 μ cᵃ lati. Sporidia singula violacea, in glomerulum ovalem vel oblongo-ovalem conglutinata, mutua pressione trigona, facie externa verrucis minutissimis exasperata, 16 μ longa, 7 μ lata. — In fimo cuniculorum; a⁰ 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

Onder de 10 soorten van SACCOBOLUS, die ik leerde kennen, waren er slechts twee: S. OBSCURUS COOKE (*Grevillea* IV, 112) en S. GLOBULIFER BOUD. (*Mémoire sur les Asc.*, 42), welke eenige overeenkomst met deze nieuwe soort deden zien. De

sporen van S. OBSCURUS echter — welke fungus volgens COOKE »on old sacking" gevonden was — bleken niet langer dan 12—14 μ te wezen, terwijl als kenmerk van S. GLOBULIFER werd opgegeven, dat de sporen niet tot een ovaal, maar tot een kogelrond kluwen waren aaneengekleefd.

92. RYPAROBIUS BRUNNEUS BOUD. (*Mém. sur les Ascob.*, 47). Op mest van verschillende Herbivoren. Aug. 1882. OUDEMANS.

93. EXOASCUS PRUNI FUCK. (*Symb. Mycol.* 252; DE BARY, *Beitr. z. Morph. d. Pilze* I, 33; SORAUER *Handb.*, 379; FRANK, *die Krankh. der Pfl.* 524). Op de vruchten van Prunus domestica. Veenendaal, 1882. OUDEMANS.

SPHAERIACEI.

94. VALSA PROFUSA FR. (*Summa Veget. Scandin.* 411; COOKE *Brit. Fgi.* 838 = Sphaeria profusa FR. *Syst. Myc.* II, 392 = Aglaospora profusa TUL. *Sel. Fungor. Carp.* II, 159). Op takken van Robinia Pseudacacia. Hilversum, 1879. OUDEMANS.

95. GNOMONIA ERYTHROSTOMA FUCK. (*Symb. Myc.* 123 = Sphaeria erythrostoma P. *Obs. Myc.* II, 70; *Syn.* 81; FR. *Syst. Myc.* II, 521). Op bladeren van Prunus Cerasus. Eerbeek, Dec. 1879. Dr. J. W. MOLL.

96. CERATOSTOMA PILIFERUM FUCK. (*Symb. Myc.* 128 = Sphaeria pilifera FR. *Syst. Myc.* II, 472). Op rottenden bast van Pinus Strobus, te gelijk met Aecidium Pini et Sporidesmium polymorphum. Eerbeek, Dec. 1879. Dr. J. W. MOLL.

97. SORDARIA COPROPHILA CES. et DE NOT. (*Schem. Sfer.* 52; *Sfer. Ital.* 22, tab. XX; SACC. *Syll.* 230; = Sphaeria coprophila FR. *S. M.* II, 342; WINTER *Sord.* 26, t. IX f. 14 = Cercophora mirabilis FUCK. *Symb. Myc.* 245 [Status immaturus]). Op koemest. Rijzenburger bosch; Aug. 1882. OUDEMANS.

98. SORDARIA MINUTA FUCK. (*Symb. Myc.*, 2[er] N. 6, 44; WINTER *Sord.* 36, t. XI f. 21; SACC. *Syll.* 231). Op konijnenkeutels. Juni 1882. OUDEMANS.

Variat apud nos quoque 8-spora et 4-spora. Porro distinximus:

formam 8-sporam platysporam (sporis 23 μ lg., 16 μ lat.).
» » leptosporam (sporis 18—21 μ lg., 11—12 μ lat.).
» 4 » platysporam (sporis 20—23 μ lg., 14 μ lat.).
» » leptosporam (sporis 12—14 μ lg., 7 μ lat.).

99. Sordaria curvula de Bary (*Morph. d. Pilze* 209; Winter *Sord.* 37, t. XI, f. 22; Sacc. *Syll.* 233 = Cercophora conica Fuck. *Symb. Myc.* 245). Op mest van verschillende Herbivoren. Mei 1882. Oudemans. — S. curvula var. coronata Wint. (*Sord.* 38; Sacc. *Syll.* 234). Op koemest. Mei 1882. v. Ledden Hulsebosch.

100. Sordaria fimiseda Ces. et de Not. (*Schema Sfer.* 52; *Sfer. Ital.* 22, t. XIX; Winter *Sord.* 25, t. IX. f. 13; Sacc. *Syll.* 232 = Cercospora fimiseda Fuck. *Symb. Myc.* 245). Op konijnenkeutels. Juni 1882. Oudemans.

101. Sordaria decipiens Winter (*Sord.* 28, t. IX, f. 16; Fuck. *Symb. Myc.* 2[er] N., 44, t. I, f. 33; Sacc. *Syll.* 235). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. Oudemans.

102. Sordaria anserina Wint. (*Sord.* 35; t. XI, f. 30; Sacc. *Syll.* 238). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. Ledden Hulsebosch.

103. Hypocopra fimicola Sacc. (*Syll.* 240 = Sordaria fimicola Ces. et de Not. *Schem. Sfer.* 52; Winter *Sord.* 17, t. VII, f. 6 = H. fimeti Fuck. *Symb. Myc.* 240 et H. stercoraria Fuck. ibid. 241 = Sphaeria fimicola Roberge in Desmaz. *Ann. Sc. nat.* 3[e] S., XI, 353). Op paarden- en geitenmest, 1 Aug. 1882. Oudemans.

104. Hypocopra Winterii Oud. (*Hedwigia* a[0] 1882, p. 160 = Sordaria Winterii Oud. *Hedw.*, a[0] 1882, p. 123). Perithecia sparsa, usque ad collum immersa, subglobosa, fusconigra, translucentia, glabra, absque collo glabro, recto, conico-obtuso, 150 μ longo, 425 μ in diametro metientia. Asci 8-spori, perfecte cylindracei, breviter pedunculati, apice truncati, membrana duplici apice incrassata et resupinata, 150 μ longi, 9—10 μ crassi, paraphysibus nullis. Sporae monostichae, primitus ellipticae, denique elliptico-oblongae vel oblon-

gae, brevi ante maturitatem 23—25 μ longae, 15—20 μ latae, post ascorum destructionem, itaque prorsus maturae, 21—22 μ longae, 10—11 latae, nigrae, lucidae, vacuolo centrali, neque appendiculatae neque zona mucilaginis circumdatae. L. in fimo Cameli Bactriani, aestate a⁰ 1882. OUDEMANS. — Accedit ad H. humanam, sed differt sporarum forma, paraphysium absentia, peritheciorum dimensione et collo.

105. HYPOCOPRA DISCOSPORA FUCK. (*Symb. Mycol.* 2ᵉʳ N., 43; SACC. *Syll.* 240 = Sordaria discospora Auersw. in NIESSL's *Beitr.* 42, t. VI, f. 44; WINTER *Sord.* 19, t. VIII. f. 8). Op konijnenkeutels. Mei 1882. OUDEMANS.

106. HYPOCOPRA PLATYSPORA SACC. (*Syll.* 241 = Sordaria platyspora PLOWRIGHT in *Grevillea* VI, 28, t. 94. f. 2). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

107. HYPOCOPRA MICROSPORA SACC. (*Syll.* 241 = Sordaria microspora PLOWR. in *Grevillea* VI, 28, t. 94, f. 3). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

108. HYPOCOPRA MACROSPORA SACC. (*Syll.* 241 = Sordaria macrospora Auersw. in RAB. *Fgi. Europ.* n⁰ 954; NIESSL *Beitr.* 39, t. VI, f. 43 = Hypocopra Stercoris FUCK. (*Symb. Myc.* 241). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

109. HYPOCOPRA BOMBARDOIDES SACC. (*Syll.* 243 = Sordaria bombardoides Auersw. in NIESSL's *Beitr.* 37, t. VI, f. 4; WINTER *Sord.* 22, t. VIII, f. 11) Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

110. HYPOCOPRA MINIMA SACC. (*Syll* 244 = Sordaria minima Sacc. et Spegazini *Michelia* I, 373 et *Fgi Ital.* t. 617). Op konijnenkeutels. Aug 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

111. HYPOCOPRA STERCORARIA SACC. (*Syll.* 244 = Sphaeria stercoraria Sow. *Eng. Fl.* t. 357; CURREY in *Linn. Transact.* XXII, t. 57, f. 38; FR. *Syst. Myc.* II, 455). Op konijnenkeutels. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

Ik meen hier de opmerking niet te mogen achterwege houden, dat SACCARDO de lengte der sporen te gering opgeeft, daar hij ze op 30 μ schat. Dit is te meer te verwonderen, daar deze soort tot hiertoe in Italië niet, doch, volgens den

S. zelven, slechts in Zweden en Engeland gevonden werd. Niets ware nu natuurlijker geweest, dan dat de beschrijving van CURREY ware geraadpleegd geworden, wat echter het geval niet schijnt geweest te zijn. CURREY toch noemt de sporen van H. STERCORARIA 0.0016—0.002 inch lang, wat, als men de »inch" met 25 millim. gelijkstelt, met eene waarde van 40—50 en niet van 30 mikrons (μ) gelijkstaat. — In de door mijzelven gevonden exemplaren werd dan ook altijd deze lengtemaat, en niet die van SACCARDO aangetroffen.

112. HYPOCOPRA SERIGNANENSIS FABRE (*Ann. Sc. Nat.* 6e S., IX, 77; SACC. *Syll.* 244). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

113. HYPOCOPRA MAXIMA SACC. (*Syll.* 245 = Sordaria maxima Niessl *Beitr.* 38, t. VI, f. 42). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

114. HYPOCOPRA PAPYRICOLA SACC. (*Syll* 245 = Sordaria papyricola WINTER, *Sord.* 18, t. VIII, f. 7). Op papier, dat met aftreksel van mest doortrokken was. Juli 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

115. COPROLEPA MERDARIA FUCK. (*Symb. Myc.* 240; SACC. *Syll.* 248 = Sordaria merdaria Fr., Auersw.. Winter, *Sord.* 13, t. VII, f. 1 = Sphaeria merdaria Fr. *El.* II, 100). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

116. COPROLEPA EQUORUM FUCK. (*Symb. Myc.* 240; SACC. *Syll.* 249 = Sordaria equorum Winter, *Sord.* 13, t. VII, f. 2). Op paardenmest. Aug 1882. OUDEMANS.

117. COPROLEPA SACCARDOI OUD. (*Hedwigia*, a⁰ 1882, n⁰ 11). Perithecia in crusta stromatica e hyphis fuscescentibus ramosis contexta nidulantia, immersa, majuscula, globosa, glabra, ostiolo papillari tantum prominentia, atra. Asci cylindracei, longiuscule pedunculati, ad sporarum intervalla constricti, apice in rostrum cylindricum, truncatum, pachydermum, protoplasmate granuloso repletum, vulgo ca 14 μ longum, 16 μ latum, contracti, absque pedunculo 450—500 μ longi, 35 μ lati, paraphysibus subtilissimis, ramosis, septatis, multiguttulatis obvallati. Sporae oblique-monostichae, atro-nitentes, ovoideae, 50 μ longae, 25 μ latae, basi glo-

bulo minutissimo achromo appendiculata, in involucro mucilaginoso, sub aqua viso 10 μ lato, nidulantia. Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

118. PHILOCOPRA DUBIA SACC. (*Syll.* 251 = Sordaria dubia Hansen in »*les Champ. stercoraires du Danemark, Résumé* p. 23 vel 59; tab. VIII, fig. 4—8). Op konijnenmest. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

119. PHILOCOPRA HANSENII OUD. (*Hedwigia*, 1882, p. 160 = Sordaria Hansenii OUD. in *Hedw.* 1882, p. 123). Perithecia sparsa, in fimo cuniculorum siccato inter straminis fibrillas collo tantum prominentia, subglobosa, 350 μ in diametro metientia, in collum breve-conicum, 23 μ longum, setoso-hirtum desinentia, glabra, fusco-nigra, subtranslucentia. Asci lanceolati, 150 μ longi, 12 μ lati, antrorsum breviter, retrorsum longius contracti, polyspori, breviter pedunculati. Sporae disciformes, a fronte visae perfecte orbiculares, a latere visae biconvexiusculae, e viridescenti-fuscescentes, tandem atrofusci, 7—9 μ in diametro, absque appendicibus et halone mucilaginoso. Detexi fungum in fimo cuniculorum a° 1882. OUDEMANS.

120. DELITSCHIA AUERSWALDII FUCK. (*Symb. Myc.* 241 et SACC. *Syll.* I, 732 = D. didyma Auersw. in *Hedwigia* 1866, p. 49 et 1868 tab. I. f. XI). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

121. DELITSCHIA BISPORULA HANSEN (*Fgi fimicoli danici* p. 107, tab. IX, f. 7—11; *Résumé* tab. IX. f. 7—11; *Grevillea* VI, t. 94 f. 4 = Hormospora bisporula Crouan, *Finist.* p. 21). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. OUDEMANS

122. DELITSCHIA WINTERI PLOWRIGHT (*Grevillea*, II, p. 188, t. 25, f. 1; SACC. *Syll.* 734). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. OUDEMANS.

123. DELITSCHIA LEPTOSPORA OUD. (*Hedwigia* 1882, n°. 11). Perithecia sparsa, ad herbarum residua in fimo cuniculorum vetusto superficialia, minuta, subgloboso conica, atrofusca, glabra, laevia. Asci subsessiles, breves, 60—70 μ longi, 11—12 μ lati, cylindraceo-oblongi, paraphysibus subtilissimis, ramosissimis obvallati, 8-spori. Sporae tristichae, fusiformes, utrinque obtusiusculae, 22—23 μ longae,

4—5 μ latae, fuscae, ad septum valde constrictae ideoque facillime in partes suas dimidias dilabentes. In fimo cuniculorum a⁰ 1882, l. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

124. DELITSCHIA NIESSLII OUD. (*Hedwigia* 1882, n⁰. 11). Perithecia sparsa, ad herbarum residua in fimo cuniculorum vetusto superficialia, minuta, subglobosa, fusca, glabra, laevia. Asci cylindracei, 70—80 μ longi, 7 μ lati, paraphysibus subtilissimis ramosissimis obvallati, 8-spori. Sporae nitidissime monostichae, ellipticae, 14 μ longae, 6 μ latae, utrinque obtusae, ad septum vix et ne vix quidem constrictae, maturae non aut saltem difficile in partes suas dimidias dilabentes. In fimo cuniculorum, a⁰ 1882, l. v. LEDDEN HULSEBOSCH.

130. DELITSCHIA MICROSPOPA OUD. (*Hedwigia* 1882, n⁰. 11). In stercore caprearum legi a⁰ 1882. — Sporae minutissimae, 9—10 μ longae, $3^1/_2$ μ latae, utrinque obtusiusculae, medio vix et ne vix quidem constrictae, dilute fuscescentes. Ascos nondum vidi. OUDEMANS.

Tabula analytica, cujus ope determinatio specierum Delitschiae generis facilior redditur, hic sequitur.

A. Sporae bicaudatae (14—15 × 7—8)	1. D. SORDARIOIDES SPEGAZZINI (*Fgi Arg.* II, n⁰. 73; SACCARDO *Syll.* I, 734).
B. Sporae strato mucilaginoso p. m. crasso obductae.	
† Perithecia vertice (collo) setis rigidis opacis instructa.	
a. Sporae 20—21 × 8	2. D. MORAVICA NIESSL (*Not. ü. neue Pyren.* 47, tab. IV, f. 24; SACC. *Syll.* I, 733).
b. Sporae 27 × 10 . .	3. D. BISPORULA HANSEN (*Fgi Daniae fimic. Résumé* p. 16, t. IX f. 7—11; SACC. *Syll.* 733).
†† Perithecia non setosa sed villo obducta.	

a. Villo fusco. Sporae 38 —50 × 17—20. . . 4. D. CHAETOMOIDES KARST. (*Myc. Fennica* II, 60; SACC. *Syll.* I, 733).

b. Villo fere achromo. Sporae 63—66 × 28 . . 5. D. WINTERI PLOWR. (*Grevillea* II, 188; t. 25 f. 1; SACC. *Syll.* I, 734).

††† Perithecia glabra.

Sporae 10 μ longae (vel minus?), obscure distichae, constrictae, utrinque acutae . . . . 6. D. ELEPHANTINA PASS. (*Fgi Abyss.* 190, t. V, f. 14; SACC. *Syll.* I, 734).

Sporae 9—10 × $3^1/_2$, vix constrictae, utrinque obtusae . . . . 7. D. MICROSPORA OUD. (*Hedw.* 1882, n⁰. 11).

Sporae 14 × 6, nitidissime monostichae, vix constrictae . . . . 8. D. NIESSLII OUD. (*Hedw.* 1882, n⁰. 11).

Sporae 22 × 8, monostichae, vix constrictae . 9. D. MINUTA FUCK. (*Symb.* 242; *Grevillea* VI, t. 94, f. 5; SACC. *Syll.* I, 733).

Sporae 22 × 4—5, di- ad tristichae, valde constrictae . . . . 10. D. LEPTOSPORA OUD. (*Hedw.* 1882, n⁰. 11).

Sporae 28 × 16, monostichae, constrictae . . . 11. D. AUERSWALDII FUCK. (*Symb. Myc.* 241; SACC. *Syll.* I, 732).

[Sporae 38— 50 × 17—20 = D. CHAETOMOIDES KARST.]
[Sporae 63—66 × 28 = D. WINTERI PLOWR.].

127. Sporormia minima Awd. (*Hedw.* VII, 66, tab. I, f. 3; *Grevillea* V, 52, t. VIII, f. 108; Fuck. *Symb. Myc.* 242; Karst. *Mycol. Fenn.* II, 110; Sacc. *Michelia* I, 230). Op konijnenkeutels, Aug. 1882. v. Ledden Hulsebosch.

128. Sporormia intermedia Awd. (*Hedw.* VII, 67, tab. I, f. 4; Cooke *Brit. F.* 866; Fuck. *Symb. Myc.* 242; Karst. *Mycol. Fenn.* II, 110; Sacc. *Michelia* I, 230). Op mest van verschillende Herbivoren. Aug. 1882. Oudemans.

129. Sporormia ambigua Niessl (*Oesterr. bot. Zeits.* 1878, p. 41). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. Ledden Hulsebosch.

130. Sporormia lageniformis Fuck. (*Symb. Myc.* 242; Sacc. *Michelia* I, 231). Op paardenmest. Aug. 1882. Oudemans.

131. Sporormia megalospora Awd. (*Hedw.* VII, 68, tab. I, f. 5; *Grevillea* VI, 29). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. Oudemans.

132. Sporormia gigantea Hansen (*Champ. Stercor. du Danemark. Résumé,* p. 16 [52], t. VI, f. 46 et 47; *Hedwigia* XVII, 92; Sacc. *Michelia* I, 231; Sacc. *Icon. Fg. Ital.* t. 616). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. Oudemans.

133. Sporormia pulchra Hansen (*Champ. Stercor. du Danemark. Résumé* p. 17 [53], t. IX, f. 1—6; *Grevillea* VIII, 108). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. Oudemans.

134. Sporormia variabilis Wint. (*Hedw.* XIII, 50, tab. I (unica) f. 1). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. Ledden Hulsebosch.

135. Sporormia leptosphaerioides Spegazini (Sacc. *Michelia* I, 459; Sacc. *Fgi Ital.* t. 613). Op konijnenkeutels. Aug. 1882. v. Ledden Hulsebosch.

RAPPORT

IN ZAKE

DE VASTSTELLING VAN EEN EERSTEN MERIDIAAN.

(Voorgedragen in de Vergadering van 24 Februari 1883).

Door den Minister van Binnenlandsche Zaken wordt, naar aanleiding eener circulaire van de regeering der Vereenigde Staten van Noord-Amerika, het gevoelen van de natuurkundige Afdeeling der Akademie gevraagd over twee punten:

1° of het wenschelijk is dat onze regeering eene uitnoodiging aanneme voor eene internationale conferentie te Washington, waar men tot overeenstemming zal trachten te geraken omtrent de invoering van eenzelfden eersten meridiaan; 2° welke medidiaan door onze regeering, indien zij zich op die conferentie liet vertegenwoordigen, zou moeten worden aanbevolen.

In de genoemde circulaire wordt vooral gewezen op het practische belang van het onderwerp. Trouwens, het wetenschappelijk belang er van is zoo gering, dat dit het bijeenroepen van eene internationale conferentie zeker niet zou rechtvaardigen. Uwe Commissie heeft zich dan ook in haar advies alleen door overwegingen van practischen aard laten leiden. De voornaamste gronden welke, naar haar gevoelen, voor de algemeene invoering van eenzelfden eersten meridiaan pleiten, zijn de volgende:

In de eerste plaats is het wenschelijk dat, bij opgaven omtrent de geografische ligging en op kaarten, de lengte van eenzelfde aanvangspunt gesteld worde. Vooral is dit van belang bij de zeekaarten. Op de meerderheid van deze wordt de lengte voorzeker van Greenwich af gerekend; toch zijn er niet weinige, waarop een andere eerste meridiaan voorkomt; zoo o. a. die over Parijs op de Fransche zeekaarten. Deze verschillende tellingen kunnen tot vergissingen leiden en daardoor soms nadeelige gevolgen hebben.

In de tweede plaats is het wenschelijk, dat in de zeevaartkundige almanakken de tijdsopgaven naar eenzelfden meridiaan gerekend worden. Gelukkig geschiedt dit in de beide almanakken, die het meest gebruikt worden, n. l. de Engelsche Nautical Almanac en de American Ephemeris, ten minste in dat gedeelte, hetwelk voor de zeevaart van belang is. In de Connaissance des temps, de Spaansche Almanaque nautico en nog enkele, wordt eene andere tijdrekening gevolgd, en het is duidelijk dat over en weêr het gebruik dier almanakken lastig is voor hen, die aan deze rekening niet gewoon zijn.

In de derde plaats is het voor de zeevaart van belang dat, bij de regeling van de tijdstippen, waarop in de zeehavens de tijdseinen gegeven worden, éénzelfde stelsel gevolgd worde. Het zou aanbeveling verdienen, hieraan den tijd volgens den eersten meridiaan ten grondslag te leggen.

Eindelijk is het thans, nu het verkeer met spoortreinen en stoombooten, en het net van telegrafen, zulk eene groote uitbreiding verkregen hebben, van belang, bij de opgaven van het vertrek en de aankomst van telegrammen, treinen en booten, den tijd te rekenen: hetzij volgens den eersten, hetzij volgens andere meridianen, welke met dien eersten in een eenvoudig verband staan. In een land als het onze doet zich deze behoefte niet sterk gevoelen, maar in landen met eene groote uitgestrektheid in de richting van het Oosten naar het Westen, kan in deze gevallen eene ongelijksoortige tijdrekening hinderlijk zijn.

Naar het gevoelen uwer Commissie, zijn de aangevoerde gronden voor de algemeene invoering van eenzelfden eersten meridiaan geenszins van groot gewicht; maar het is voor ons land, als zeevarende en koloniale mogendheid, toch niet van belang ontbloot dat het doel, hetwelk de regeering der Vereenigde Staten zich met het bijeenroepen van eene internationale conferentie voorstelt, bereikt worde, en wij geven dus de natuurkundige Afdeeling der Akademie in overweging, aan Z. E den Minister van Binnenlandsche Zaken het voorstel te doen, dat onze regeering eene eventueele uitnoodiging van het Amerikaansche gouvernement aanneme, en zich op de conferentie, op grond van het boven medegedeelde, in het algemeen voor de invoering van eenzelfden eersten meridiaan verklare.

In antwoord op de tweede vraag des Ministers: welke meridiaan als eerste zou moeten worden aangenomen, merken wij op dat, zoo er een algemeene wordt ingevoerd, natuurlijk eenige belangen gekwetst, en toestanden, die reeds sedert jaren bestaan hebben, zullen gewijzigd worden. Men moet nu trachten de hieraan verbonden bezwaren zoo gering mogelijk te maken, en dit zal ongetwijfeld het best geschieden door als eersten meridiaan dien over Greenwich te kiezen, daar deze reeds als zoodanig bij de twee grootste zeevarende mogendheden: Engeland en Amerika, en bij verschillende andere volken, in gebruik is. Ook voor ons land in het bijzonder, zullen die bezwaren uiterst gering zijn, en zeker door de voordeelen worden opgewogen, daar aan boord der Nederlandsche schepen bijna algemeen de lengte en de tijd ten opzichte van Greenwich gerekend worden.

Mocht de conferentie te Washington onverhoopt besluiten, den eersten meridiaan niet over Greenwich te doen loopen, dan zou het een punt van latere overweging kunnen uitmaken of onze regeering zich aan dat besluit zou behooren te onderwerpen.

J. A. C. OUDEMANS.
H. G. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN.

RAPPORT

DER

RIJKSCOMMISSIE VOOR GRAADMETING EN WATERPASSING

OVER HET

AL OF NIET BESTENDIGEN

DER

AKADEMISCHE COMMISSIE VOOR DE DALING VAN DEN BODEM VAN NEDERLAND.

(Voorgedragen in de Vergadering van 24 Februari 1883).

Als vervolg op ons schrijven van 25 Mei 1882 N° 91, en als antwoord op Uwe missive van 4 Mei 1882 afd. Natuurkunde N°. 48, hebben wij de eer hiernevens aan te bieden een Verslag van de werkzaamheden, door de voormalige Commissie voor de daling van den bodem van Nederland verricht, geput, 1° uit de stukken, gevonden in de nalatenschap van wijlen den Heer F. J. Stamkart, 2° uit de stukken betreffende de Commissie, die in het archief der Akademie berusten en, bij besluit van de Vergadering van 27 Mei 1882, ter onzer beschikking gesteld werden, en 3° uit de werken, door de Akademie uitgegeven.

Op grond van dat verslag, hebben wij de eer aan de Afdeeling het volgende in overweging te geven.

De werkzaamheden, aan de voormalige Commissie voor de daling van den bodem van Nederland opgedragen, kunnen in twee scherp van elkaâr gescheiden deelen verdeeld worden, namelijk: 1°. het verzamelen van de noodige gegevens en 2°. het daaruit afleiden van het al of niet plaats hebben van eene daling van den bodem.

Aan het tweede punt is uit den aard der zaak door de Commissie nog niets gedaan en daaraan kan ook voorshands

niets gedaan worden, zoolang de noodige gegevens niet verzameld zijn.

Het eerste punt heeft dus hoofdzakelijk het onderwerp van de bemoeiingen der Commissie uitgemaakt. Zij is intusschen slechts gedeeltelijk in die taak geslaagd. Van de zelfregistreerende peilschalen, waarvan zij de oprichting voorstelde — aan welke voorstellen de Akademie hare goedkeuring hechtte — is door hare onmiddellijke bemoeiingen alleen die te Urk tot stand gekomen. De daarvan afkomstige bladen zijn geregeld ingekomen, maar nog niet berekend. De waarnemingen, te Amsterdam verricht, zijn in tabellen vereenigd, en de waarnemingen van de zelfregistreerende peilschaal te Helder zijn voor een groot gedeelte berekend. Dit is alles wat tot nu toe door de Commissie verzameld is.

Intusschen verkeeren wij thans in de zeer gunstige omstandigheid, dat de gegevens, die de Commissie noodig achtte en in het bijgaande verslag uitvoerig zijn opgegeven, voor andere doeleinden verzameld worden. Sedert 1873 zijn de meeste van de indertijd door de Commissie voorgestelde zelfregistreerende peilschalen door den Waterstaat, eene enkele ook door het bestuur van Rijnland aangelegd, en worden de graphische opteekeningen daarvan bewaard. Aan ons is, ingevolge het advies der Akademie van 17 December 1878 aan Zijne Excellentie den Minister van Binnenlandsche Zaken — welk advies aan onze benoeming tot Commissie ten grondslag heeft gelegen — de bewerking der getijwaarnemingen opgedragen. Met die bewerking is door ons wel is waar nog geen aanvang gemaakt, doch wij hopen spoedig daartoe te kunnen overgaan. De waterpassingen eindelijk zijn, ten dienste der Europeesche Graadmeting, door wijlen Dr. L. Cohen Stuart aangevangen en door ons voortgezet, voor een groot deel reeds uitgevoerd, en gaan binnen enkele jaren hare voltooiing te gemoet.

Deze gunstige omstandigheden maken, dat de Akademie over eenige jaren de noodige bouwstoffen verzameld zal vinden om, met meer kans van slagen dan vroeger, de vraag omtrent de daling van den bodem van Nederland in ernstige overweging te nemen.

Tot dien tijd achten wij het benoemen van eene nieuwe Commissie voor het onderzoek omtrent de daling van den bodem overbodig; de Commissie toch zou zich moeten bepalen tot het verzamelen en bewerken van de opteekeningen aan de peilschalen te Helder, Urk en Amsterdam, hetgeen voor het beoogde doel niet voldoende is. Aangezien dezelfde waarnemingen op veel ruimer schaal door anderen verzameld en bewerkt worden, achten wij het wenschelijk, dat de Akademie hare bemoeiingen in deze richting voorloopig stake, en eerst wanneer de noodige gegevens verzameld zijn, werkzaam optrede om de vraag, in der tijd door den Heer Harting aan het oordeel der Akademie onderworpen, te beantwoorden. Het overdragen van deze taak, die de Akademie in der tijd op zich genomen heeft, aan eene andere — aan de Akademie vreemde — Rijks-Commissie of Instelling, achten wij niet wenschelijk, omdat voor het volbrengen van die taak de samenwerking noodig is van mannen, die op zeer verschillend wetenschappelijk gebied werkzaam zijn, en die alleen gevonden worden in eene Instelling als de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Op grond van bovenstaande beschouwingen hebben wij de eer aan de Akademie voor te stellen:

1°. Het hierbij gevoegde verslag, bevattende de geschiedenis van hetgeen tot hiertoe door de Commissie voor de daling van den bodem van Nederland verricht is, in de Verslagen en Mededeelingen op te nemen.

2°. Voorshands niet over te gaan tot het benoemen van eene nieuwe Commissie, maar die benoeming uit te stellen tot tijd en wijle de noodige gegevens bijeen zullen zijn om, met meer kans van slagen dan vroeger, de beantwoording der vraag omtrent de daling van den bodem ter hand te kunnen nemen.

3°. Van de tot nu toe door de Commissie verzamelde bescheiden een inventaris te doen opmaken, en die bescheiden in het archief der Akademie te bewaren.

4°. Wanneer de Rijks-Commissie voor Graadmeting en Waterpassing of eene andere Rijks-Commissie of Instelling,

belast met de bewerking der getijwaarnemingen, de door de Akademie reeds verzamelde waarnemingen en berekeningen ter verdere bewerking noodig mocht hebben, alsdan die waarnemingen en berekeningen tijdelijk af te staan.

5⁰. De berekening van de waarnemingen te Helder te doen staken, na afwerking van het thans onderhanden zijnde gedeelte.

6⁰. Aan Zijne Excellentie den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid, kennis te geven van het genomen besluit, met verzoek om de *origineele* opteekeningen van de peilschaal te Urk voortaan door den Waterstaat in ontvangst te doen nemen en bij de aanteekeningen van de overige peilschalen te doen bewaren. En, bijaldien de *Memoriën betrekkelijk het invoeren van een algemeen gelijk stelsel van Rijkspeilschalen, met de daarbij behoorende waterpassingen*, vroeger door den Minister voornoemd tijdelijk aan de Akademie afgestaan, nog bij de Akademie mochten berusten, deze aan zijne Excellentie in dank terug te zenden, met het verzoek om, wanneer de Akademie die memoriën en waterpassingen later noodig mocht hebben, ze alsdan nogmaals tijdelijk aan haar af te staan.

7⁰. Aan het bestuur der stad Amsterdam den dank der Akademie te betuigen voor de veeljarige medewerking, door het doen verzamelen en aan de Akademie doen verstrekken van de lijsten der waterwaarnemingen te Amsterdam; met verzoek die toezending voorshands te willen staken en, voor het geval de Akademie later de verdere waarnemingen mocht noodig hebben, haar alsdan tijdelijk in de gelegenheid te stellen daarvan gebruik te maken.

Omtrent punt 3 merken wij hier nog op, dat de bladen van de peilschaal te Urk ontrold en vlak gemaakt moeten worden en daarna dienen te worden gerangschikt en geïnventariseerd. Dit ontrollen en vlak maken moet ook geschieden met een gedeelte van de waterlijsten van Amsterdam. De laatsten zijn door ons nagezien en compleet bevonden, op 18 stuks dubbele staten na. Wellicht zullen er van de ontbrekende nog eenige tusschen de bladen van de peilschaal te Urk teruggevonden worden. Mocht dit niet met allen het geval

zijn, dan achten wij het wenschelijk om, te gelijk met het bovenstaand verzoek, van de stedelijke regeering van Amsterdam duplicaten van de ontbrekende lijsten te vragen.

De stukken, afkomstig uit de nalatenschap van den Heer STAMKART, die thans nog bij ons medelid den Secretaris berusten en betrekking hebben op de voormalige Commissie voor de daling van den bodem, zullen aan de Akademie gezonden worden, om die in het archief neder te leggen. Wij zullen daarbij tevens terugzenden de stukken, welke op deze zaak betrekking hebben en door de Akademie ter onzer beschikking waren gesteld.

De Rijks-Commissie voor Graadmeting en Waterpassing:

H. G. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN,
Voorzitter.

CH. M SCHOLS,
Secretaris.

VERSLAG

OMTRENT DE WERKZAAMHEDEN

VAN DE

COMMISSIE VOOR HET ONDERZOEK

NAAR DE

DALING VAN DEN BODEM VAN NEDERLAND.

(Aangeboden in de vergadering van 24 Februari 1883).

In de vergadering der Koninklijke Akademie van Wetenschappen van 29 Januari 1853 (zie Verslagen en Mededeelingen, Deel I, blz. 16—20), vestigde de Heer P. HARTING de aandacht der Akademie op de vraag, of de bodem van ons vaderland al of niet in een toestand van langzame daling verkeert. Ten einde daaromtrent zekerheid te verkrijgen stelde hij voor:

»1°. dat de Akademie eene Commissie benoeme, tot be»raming van een plan, om, door eene gedurende vele jaren »voortgezette reeks van waarnemingen, met zekerheid uit »te maken, of de bodem van ons vaderland thans nog daalt, »en zoo ja, hoe groot die daling is in een gegeven tijds»bestek; 2°. dat zij nu de taak doe afwerken, waarmede »ALEWIJN vroeger een aanvang heeft gemaakt, namelijk »de geheele berekening van de waarnemingen aan het Water»kantoor te Amsterdam, verrigt sedert 1700, en wier reeks »derhalve meer dan anderhalve eeuw omvat, om aldus tot »eene juistere kennis te geraken van de veranderingen, welke »in de hoogte van het IJ, in verhouding tot het nulpunt »der Amsterdamsche peilschaal zijn ontstaan."

In de daarop volgende vergadering van 26 Februari 1853

(zie Verslagen en Mededeelingen, Deel I, blz. 32) werd, na eene korte beraadslaging, waaraan de Heeren VAN BREDA, HARTING en STAMKART deel namen, eene Commissie benoemd, bestaande uit de Heeren F. W. CONRAD, P. HARTING en F. J. STAMKART, ten einde der Akademie op het tweeledig voorstel des Heeren HARTING van voorlichting en raad te dienen.

Deze Commissie bracht in de vergadering van 24 September 1853 verslag uit over hare werkzaamheden (zie het Proces-Verbaal der vergadering in de Verslagen en Mededeelingen, Deel I, blz. 166—170, en het verslag zelf in hetzelfde Deel, blz. 177—192). Om te kunnen beoordeelen of de bodem van Nederland al of niet daalt, geeft de Commissie de twee volgende middelen aan:

»1°. het vergelijken van meerdere vaste punten, zoo »nabij mogelijk bij de zee gelegen, door middel van water»passingen, met punten meer landwaarts in, op of bij de »grenzen van Duitschland gelegen, ten einde de afhelling »des bodems te bepalen, en 2°. het vergelijken van de hoogte »dier zelfde punten aan de kusten der zee, met de gemid»delde hoogte van het oppervlak des waters.

Naar aanleiding hiervan en van hare verdere beschouwingen, stelde de Commissie voor, als middelen waardoor de vraag omtrent de daling van den bodem voor het vervolg zoude kunnen worden opgelost:

»1°. het stellen van meerdere, wel bevestigde, merkteekens »in daartoe geschikte gebouwen, die op stevige fondamenten »rusten, of wel, indien de kosten niet te aanmerkelijk zijn, »expresselijk daartoe ingerigte merkteekens, die dan op diep »genoeg tot den vasten bodem reikende fondamenten be»hoorden gefundeerd te worden, en wel: *a*) op plaatsen langs »of nabij de kust der Noordzee, van Groningen langs de »eilanden, door Noord- en Zuid-Holland en Zeeland tot »Vlaanderen toe; *b*) volgens eene lijn langs de kust der »Zuiderzee, van Friesland tot in Holland, en tevens op het »eiland Urk; *c*) meerdere dergelijke merkteekens binnenslands »tot op de grenzen van Duitschland en België;

2°. het verbinden onderling van deze merkteekens door

»middel van waterpassingen, met alle bereikbare nauwkeu-
»righeid;

3°. »het herhalen dezer waterpassingen na ruime tijds-
»verloopen, bijv. om de 20 of 25 jaren;

4°. »het bepalen van het verschil in waterpas tusschen »de nulpunten der schalen, waar geregeld de watergetijden »der zee of van het IJ worden waargenomen, met een of »meer der genoemde merkteekens, zoo dikwijls dit noodig »geoordeeld zal worden, en het gaandeweg berekenen der »gedane waarnemingen aan die schalen op de wijze, zooals »hierboven is ontwikkeld, ten einde daaruit jaarlijks de ge- »middelde waterhoogte niet alleen, maar ook alle vorige »termen der uitdrukking gevonden worden, om langs dien »weg, zoo mogelijk, eenmaal tot de volkomen kennis der »watergetijden op onze kusten te geraken.".

Omtrent de berekening van de waarnemingen, te Amsterdam sedert 1700 aan het Stads-Waterkantoor gedaan, stelde de Commissie voor:

»dat de berekeningen naar hetzelfde plan worden gevoerd, »als hierboven is ontwikkeld, en wel in deze volgorde: te »weten dat eerst, met de vroegste waarnemingen te begin- »nen, *drie* achtereenvolgende jaren worden afgewerkt, waarbij »de gemiddelde hoogte van het water en de wetten van rij- »zing en daling gemiddeld gevonden worden. Dat daarop »19 jaren sedert het eerste jaar worden overgeslagen en »weder 3 jaren van waarnemingen bewerkt worden, en al- »dus worde voortgegaan, telkens met overspringing van 19 »jaren. Dat daarna weder een drietal jaren, volgende op »de drie eerste jaren, gekozen worden ter bewerking, en dat »aldus worde voortgegaan tot de geheele afwerking toe."

Nadat de Akademie de vraag van den voorzitter: of zij de door de Commissie voorgestelde maatregelen in die mate doeltreffend achtte, dat de wijze van uitvoering daarvan nader in overweging kon worden genomen, bevestigend beantwoord had, besloot zij tot het benoemen eener Commissie, die haar zou dienen van bericht, voorlichting en raad, omtrent de wijze, waarop de door de Commissie voorgedragen middelen konden worden ten uitvoer gebracht. Tot leden

van deze Commissie, de eigenlijke *Commissie voor het onderzoek naar de daling van den bodem van Nederland*, werden benoemd de heeren: F. W. CONRAD, F. J. STAMKART en J. P. DELPRAT.

In dezelfde vergadering diende de heer STAMKART eene verhandeling in: *Over het berekenen der gemiddelde waterhoogte en der watergetijden, uit gedane waarnemingen*, die in het eerste deel van de 4° verhandelingen der Akademie werd opgenomen en waarnaar later de waarnemingen te Helder berekend werden. In deze verhandeling is de wijze van berekening, waarop de Commissie in het hierbovengenoemde punt 4, en in het voorstel omtrent de waarnemingen aan het Stads-Waterkantoor te Amsterdam, doelde, uitvoerig beschreven.

In het uitvoerig verslag, in de vergadering van 24 December 1853 uitgebracht (zie het Proces-Verbaal in de Verslagen en Mededeelingen Deel I, blz. 302—304 en het verslag in hetzelfde deel blz. 346—358), stelde de Commissie voor, in de eerste plaats alles bijeen te verzamelen en te berekenen, wat uit de gedane waterpassingen en metingen van waterhoogten kon worden afgeleid; daarna, wanneer men een overzicht zou bekomen hebben van hetgeen reeds uit bestaande waarnemingen volgde of door bewerking daaruit zoude kunnen volgen, moesten nadere voorstellen aan de bevoegde magten gedaan worden om de nog ontbrekende waarnemingen te verkrijgen. Om hiertoe te geraken stelde de Commissie voor:

»*a*. eene officieele mededeeling van het eerste Rapport »aan het Gouvernement, met verzoek om ondersteuning van »het plan, in het belang der voor de wetenschap gewigtige »vraag, naar het al of niet dalen des bodems in Nederland; »ten andere, ter vermeerdering onzer nog onvolkomene ken»nis van de wetten der watergetijden op onze kusten. Al»zoo bepaaldelijk:

»1°. verzoek om met de Inspecteurs van den Waterstaat »officieel in overleg te mogen treden tot het bekomen der

»wetenschappelijke bescheiden van de H.H. Ingenieurs, die »de jongste waterpassingeu langs onze rivieren en elders »gedaan hebben, welke strekken kunnen om den graad van »juistheid van eenige hoofdpunten te beoordeelen;

»2º. dat, aan den Helder, aan de Gouvernementsgebouwen, »vaste merken mogen gesteld worden, ter verzekering van »het nulpunt van het A. P. aldaar, en voorts, dat er, tot »hetzelfde einde, op daartoe geschikte plaatsen langs onze »zeekusten, op de eilanden en binnenslands tot aan de gren-»zen, enkele vaste merken aan Rijks- of andere geschikte »gebouwen mogen gesteld worden;

»3º. dat langs de zeekusten en enkele zeeplaatsen, waar »zulks gevoegelijk geschieden kan, en op de eilanden, gere-»gelde waarnemingen mogen plaats hebben van de water-»hoogten, liefst om het uur, met opteekening daarvan in »een register, waarin tevens de rigtiug en sterkte van den »wind, desnoods bij schatting, wordt opgeteekend; en zulks »gedurende zulk eenen tijd, dat daaruit de *gemiddelde wa-»terhoogte* met eene voldoende nauwkeurigheid kan worden »opgemaakt, minstens gedurende één jaar op elk punt."

(De Commissie stelde zich voor, deze waarnemingen niet allen gelijktijdig te doen plaats hebben, maar in drie opvolgende tijdperken, telkens van een jaar. Het eerste jaar zouden de waarnemingen gedaan worden langs de Noordzee, van Vlaanderen tot het Nieuwediep; in het tweede jaar van het Nieuwediep tot Groningen, en in het derde aan de kusten der Zuiderzee en op Urk. Ten einde de waarnemingen in deze drie tijdvakken met elkaar in verband te brengen, zouden langer voortgezette waarnemingen gedaan worden op drie punten, namelijk in het aansluitingspunt in het Nieuwediep; en op de uiterste punten bij de zuidelijke en bij de oostelijke grens, op welke laatste punten zelfregistreerende peilschalen zouden moeten worden aangelegd. Hoewel in bovenstaand woordelijk overgenomen voorstel, voor de tusschenpunten alleen sprake is van waarnemingen aan gewone peilschalen, blijkt uit het verslag (zie blz. 351) en uit de briefwisseling der leden van de Commissie, dat zij ook voor die punten de voorkeur gaven aan zelfregistreerende peilschalen).

»4°. dat, bij voorkomende gelegenheden, de hoogten der »gestelde vaste merken in zeeplaatsen door nauwkeurige wa»terpassingen vergeleken mogen worden, zoo onderling als »met andere reeds bestaande of nog te stellen vaste merken »binnenslands."

Tot de uitvoering van het onder 2, 3 en 4 genoemde, wenschte men zich in betrekking te mogen stellen met de Hoofd-Ingenieurs van den Waterstaat, ten einde, onder latere goedkeuring van het Gouvernement, de bijzonderheden der voorgestelde werkzaamheden en de kosten daarvan nader te kunnen bepalen.

Wanneer na een 3- of 4-tal jaren de meeste waterpassingen, bij gelegenheid van andere opmetingen, volbracht waren, en er dan nog enkele waterpassingen ter verbinding van de vaste merken mochten ontbreken, wenschte men dat deze waterpassingen alsdan opzettelijk zouden verricht worden.

Behalve de bovengenoemde voorstellen aan de Regeering, stelde de Commissie nog voor:

b. »eene mededeeling van een en ander, hetzij gelijktij»dig, hetzij na de ontvangst van het antwoord van het Gou»vernement, aan het Koninklijk Instituut van Ingenieurs, »met verzoek om dit plan bij voorkomende gelegenheden »te willen bevorderen;"

c. »een schrijven aan de stedelijke Regeering der stad »Amsterdam, onder mededeeling van het plan, het hierboven »aangewezene inhoudende, en ten laatste ook nog het voor»stel, dat te Amsterdam, evenals aan den Helder, eene inrig»ting tot het graphisch opteekenen der waterhoogten mogt »gemaakt worden."

(Het hier bedoelde plan bevatte het verzamelen van de waarnemingen aan het Waterkantoor in maandelijksche staten, volgens de bovengenoemde verhandeling van den Heer Stamkart, en het doen berekenen van de vroegere waarnemingen, op dezelfde wijze als in het rapport van de vorige Commissie was aangegeven, met dit kleine verschil, dat men niet met de vroegste, maar met de laatste waarnemingen zou beginnen);

d. »een schrijven aan den Heer van der Sterr, met de

»uitnoodiging om aan de tabellen zijner waarnemingen (dat
»zijn die in den Helder) den vorm en inrigting te geven,
»als hierboven bedoeld is, onder bijvoeging tevens der eerste
»herleidingen van de middengetallen, dat is der getallen
»P en Q, volgens een door de Akademie bij te voegen
»model."

De Akademie besloot, de bovengenoemde voorstellen aan te nemen en daaraan het verlangde gevolg te geven, waaromtrent de Secretaris met de Commissie zich nader zou verstaan.

De voorbereiding der te ondernemen onderzoekingen was hiermede zoover gevorderd, dat men werkzaam kon optreden, om daaraan een begin van uitvoering te geven. Wat er gedaan is, om aan de besluiten der Vergadering uitvoering te geven, zal thans voor ieder onderwerp afzonderlijk worden nagegaan.

Het hierboven vermelde verzoek werd aan den Minister gedaan en vond aldaar een gunstig onthaal. Wat betreft het verzoek van de te doene waterpassingen en het stellen van vaste merken, dit werd door den Minister gereedelijk ingewilligd, als zijnde dit ook in de bedoeling van de algemeene invoering van Rijkspeilschalen. De volledige uitvoering van al de daarvoor noodige waterpassingen zou echter nog geruimen tijd vorderen. Voor een gedeelte waren die waterpassingen reeds uitgevoerd, en al dadelijk stelde de minister de Akademie in het tijdelijk bezit van een viertal onuitgegeven memoriën van den Heer L. J. A van der Kun: over het invoeren van een gelijk stelsel van 's Rijkspeilschalen langs de hoofdrivieren, met de bij die memoriën behoorende *tabellen van waterpassingen.* Deze memoriën en tabellen van waterpassingen, die voor het beoogde doel van het meeste belang waren, werden in handen gesteld van de Commissie voor de daling; of zij daarvan eenig gebruik gemaakt heeft, is niet gebleken. In September 1862 werden deze memoriën door den Minister tijdelijk teruggevraagd. Bij deze gelegenheid (zie het Proces-Verbaal van de verga-

dering van 27 September 1862 in Verslagen en Mededeelingen Deel XIV, blz. 410—412) deelde de Heer STAMKART mede, dat zij voor het vraagstuk van de daling zeer belangrijke gegevens bevatten en dat hij zich bezig hield met het onderzoek van de daarin voorkomende waterpassingen en de berekening van de middelbare fouten dier metingen. In November 1862 werden die memoriën terug ontvangen en in Januari 1863 daaraan nog een viertal dergelijke memoriën, met de daarbij behoorende *waterpassingen*, toegevoegd. Wat er van die memoriën geworden is, kon niet nagegaan worden. Of zij nog in het bezit der Akademie zijn of aan den Minister werden terugbezorgd, is ons onbekend. Een verslag werd er niet over uitgebracht, en onder de papieren van den Heer STAMKART, die ter onzer beschikking waren, konden wij er niets over vinden.

Tegen het doen opteekenen op verschillende plaatsen van de waterstanden om het uur, zag de Minister bezwaar, wegens de kosten voor het daarvoor benoodigde personeel. Hij gaf echter, op nader verzoek van de Akademie, machtiging, zich met de Hoofdingenieurs van den waterstaat in de onderscheidenen provinciën in betrekking te stellen, ten einde, onder latere goedkeuring van het Gouvernement, de bijzonderheden der voorgestelde werkzaamheden en de kosten nader te kunnen bepalen. De Akademie stelde zich daarop in betrekking met de Hoofdingenieurs in Zeeland, Zuid-Holland en Noord-Holland, om daardoor te komen in het bezit van de noodige gegevens tot de uitvoering van de waarnemingen, die gedaan zouden dienen te worden in het eerste tijdvak van waarnemingen, volgens het hierboven beschreven plan.

In overleg met genoemde Hoofdingenieurs, werden als de meest geschikte punten voor de waarneming geacht: Westkapelle in Zeeland, Katwijk in Zuid-Holland en Petten in Noord-Holland. Voor het maken van zelfregistreerende peilschalen, werden voor de eerste twee plaatsen globale begrootingen ingediend. Voor Petten zag de Hoofdingenieur on-

overkomelijke bezwaren voor het maken van een zelfregistreerende peilschaal.

In verband daarmede, stelde de Commissie in haar verslag, uitgebracht in de vergadering van 24 Februari 1855 (zie het Proces-Verbaal dier vergadering in de Verslagen en Mededeelingen, Deel III, blz. 249—257), voor, aan den Minister te verzoeken, te Westkapelle en te Katwijk zelfregistreerende peilschalen te laten maken, waarbij Katwijk als tusschenstation beschouwd zoude worden, waar de waarnemingen slechts gedurende een jaar behoefden te geschieden, en de toestel later overgebracht zoude kunnen worden naar een ander punt voorbij het Nieuwediep, en om bij Petten gedurende een jaar rechtstreeksche waarnemingen te laten doen van de hoog- en laagwaterstanden en van den agger.

Over deze voorstellen en het daarbij niet voorkomen van eene zelfregistreerende peilschaal te Urk, die volgens het oorspronkelijke plan eerst in het derde tijdvak van waarneming behoorde, werd eene langdurige discussie gevoerd tusschen de Heeren Harting, G. J. Mulder en Stamkart, waarna ten slotte besloten werd, aan den Minister te verzoeken, zelfregistreerende peilschalen te doen maken te Westkapelle, Katwijk en Urk, zonder daarbij te gewagen van het tijdelijke van de inrichting van het station Katwijk. Verder werd de Commissie uitgenoodigd, nadere gegevens te verzamelen omtrent de kosten, die vereischt zonden worden voor het maken van eene dergelijke inrichting te Petten.

Ter uitvoering van de besluiten der Vergadering, werd met den Hoofdingenieur in Noord-Holland in nader overleg getreden en de bovengenoemde voorstellen aan den Minister gedaan, met het gevolg, dat op het einde van 1856 door den Minister aan de Hoofdingenieurs in Zeeland, Zuid-Holland en Noord-Holland werd opgedragen, met de Akademie in overleg te treden voor het opmaken van ontwerpen van zelfregistreerende peilschalen te Westkapelle, Katwijk, Petten en Urk. De peilschaal te Urk is werkelijk tot stand gekomen. Het bestek daarvoor is goedgekeurd in Juli 1857. De zelfsregistreerende toestel is door den Heer Harri te Amsterdam vervaardigd en op 15 Juli 1858 op Urk opge-

steld. Op 16 December werden door den Hoofdingenieur de vijf eerste bladen aan de Akademie toegezonden.

Van de overige peilschalen is toen niets gekomen; met de betrokkene Hoofdingenieurs zijn daarover verdere onderhandelingen gevoerd, maar deze schijnen in het begin van 1858 plotseling gestaakt te zijn, zonder dat in de stukken ter onzer beschikking de reden daarvan te vinden is. Het laatste stuk, dat daarop betrekking heeft, is een brief van den Heer STAMKART aan den Secretaris, die in de vergadering van 23 April 1858 (zie het Proces-Verbaal dier vergadering in de Verslagen en Mededeelingen, Deel VIII, blz. 78—79) ter tafel gebracht werd en betrekking had op de peilschalen te Westkapelle en te Katwijk. Niets deed toen vermoeden, dat de Commissie voor de daling van den bodem verder het stilzwijgen zou bewaren. Ook van de verdere voorstellen om waarnemingen te doen langs de kusten, tusschen Helder en Groningen, en langs de kusten der Zuiderzee, waartoe de Akademie in hare vergadering van 24 December 1853 het besluit genomen had, werd verder niets vernomen. Het eenige teeken van leven, dat de Commissie sedert gegeven heeft, bestaat in eene korte mededeeling van den Heer STAMKART, in de vergadering van 28 Februari 1874, waarvan in het Proces-Verbaal dier vergadering met korte woorden is melding gemaakt.

Het besluit der Vergadering van 24 December 1853, om aan de stedelijke Regeering van Amsterdam te verzoeken, de waarnemingen aan het Stads-Waterkantoor (zoowel de nog te verrichten als de oudere waarnemingen) op stadskosten te doen berekenen, en eene zelfregistreerende peilschaal te doen maken, had ten gevolge eene onderhandeling met die Regeering, waarvan de uitkomst was, dat de stedelijke Regeering zich bij schrijven van 28 Maart 1855 bereid verklaarde: 1°. eene zelfregistreerende peilschaal te doen maken, 2°. de aanteekeningen der waterhoogten in maandelijksche tabellen te verzamelen, volgens een gegeven model, en 3°. zoo daar-

tegen geene overwegende bezwaren bleken te bestaan, dit ook te doen voor de vroegere waarnemingen, van 1700 af.

De zelfregistreerende peilschaal te Amsterdam is *niet* tot stand gekomen. De staten onder N⁰. 2 vermeld zijn geregeld maandelijks ingezonden, en bevatten de waterstanden, gerangschikt volgens de zons- en maans-uurhoeken, echter zonder de berekening van de getallen P Q P_1 enz., welke berekening van wege de Akademie zou worden verricht. Van deze berekening is echter niets tot stand gekomen; de tabellen zijn maandelijks door den Heer Stamkart in ontvangst genomen en opgeborgen. Van Augustus 1855 tot 1881 zijn deze staten op het Trippenhuis aanwezig, met uitzondering van de staten, betrekking hebbende op 18 maanden, over verschillende jaren verdeeld.

Van de berekening der vroegere waarnemingen schijnt ook niets gekomen te zijn; alleen zijn, ten behoeve van een tweetal verhandelingen des Heeren Stamkart, over het Amsterdamsche Peil, de gemiddelden over eenige jaren opgemaakt van de hoog- en laag-waterstanden. De eerste dezer verhandelingen: *Nota over de middelbare hoogte der zee met betrekking tot het Amsterdamsche Peil*, opgenomen in de Verslagen en Mededeelingen Deel XV, blz. 59—69, moest dienen tot antwoord op eene vraag van de Regeering van het Groot-Hertogdom Nassau omtrent het Amsterdamsche Peil (zie de Processen-Verbaal van de vergaderingen van 27 September 1862 en 25 October 1862 in de Verslagen en Mededeelingen Deel XIV, blz. 412—414 en Deel XV, blz. 49). De tweede verhandeling, ingekomen in de vergadering van 3 October 1863, heeft tot titel: *Over het Amsterdamsche Peil, het AP*, en is opgenomen in de Verslagen en Mededeelingen Deel XVII, blz. 261—303.

Het laatste besluit van de Vergadering van 24 December 1853 had betrekking op de opteekeningen van de bestaande zelfregistreerende peilschaal te Helder. Aldaar werd van den beginne af de meest mogelijke medewerking ondervonden. De Heer van der Sterr, opzichter van den Wa-

terstaat aldaar, verklaarde zich, met toestemming van den Hoofdingenieur, bereid, alle mogelijke hulp en inlichtingen te verleenen voor de uitvoering der berekening van de waarnemingen, onder zijn toezicht te Helder verricht volgens de voorschriften, door den Heer STAMKART in zijne hierboven vermelde verhandeling: *Over het berekenen der gemiddelde waterhoogte en der watergetijden uit gedane waarnemingen* gegeven. Hij kon echter, uit gebrek aan tijd, zelf de daarvoor noodige berekeningen niet uitvoeren; er werden daarom te Helder twee onderwijzers opgespoord, die zich met die berekening wilden belasten. Tegen vergoeding van *f* 15.— voor elke maand, namen de onderwijzers LEYER en UURBANUS deze berekening op zich De waarnemingen van primo Janurai 1854 tot ultimo Juni 1868 werden op dien voet door hen berekend. In 1880 waren de berekeningen niet verder gevorderd en bestond er dus een achterstand van ongeveer elf jaren. Door den Heer STAMKART werd alstoen een onderzoek daarnaar ingesteld, en bleek het dat die achterstand hoofdzakelijk het gevolg was van de geringe bezoldiging, die genoemde onderwijzers voor hun werk ontvingen. Op voorstel van den Heer STAMKART, werd hunne toelage vermeerderd en de berekening hervat, met de waarnemingen van 1 Januari 1880 af, en geregeld voortgezet. De staten dier berekeningen zijn alle aanwezig en loopen van 1 Januari 1854 tot heden, met uitzondering van de waarnemingen van 1 Juli 1868 tot ultimo December 1879. De waarnemingen over deze $11^1/_2$ jaar zijn nog niet berekend; ook is, voor zooverre ons bekend, nog niets gedaan om uit die berekening eenige uitkomst te trekken.

Vatten wij de uitkomst van ons onderzoek samen, dan zien wij dat van de uitvoerige voorstellen in 1853 door de Commissie voor het onderzoek naar de daling van den bodem, alleen tot stand gekomen zijn: de zelfregistreerende peilschaal te Urk, de rangschikking van de waarnemingen te Amsterdam, volgens de zons- en maans-uurhoeken, en de berekening van de waarnemingen te Helder.

Deze laatste waarnemingen, in 1851 begonnen en van 1854 af berekend, vormen thans de uitgebreidste reeks van waarnemingen in ons land, met zelfregistreerende peilschalen verricht. De peilschaal zelve is gelegen op een punt van onze kust, dat uit vele oogpunten als een van de hoofdpunten voor de waarneming der getijen mag gelden. Men vindt ze juist in het middelpunt van de uitgestrekte kusten, die wij aan de zee bezitten, ter plaatse waar de overgang plaats heeft tusschen de lang gestrekte kusten van Noord- en Zuid-Holland en de eilanden ten noorden van ons vaderland. Door de Commissie voor de daling van den bodem, die zich tevens zou bezighouden met het onderzoek van den loop der watergetijen, werd dit punt onmiddellijk aangewezen als een der hoofdpunten voor het geheele onderzoek, en wel als het voornaamste hoofdpunt, want het vormt het knooppunt van de drie reeksen van waarnemingen, die zij zich voorstelde achtereenvolgens te doen. De Akademie hechtte, door haar besluit van 24 December 1853, hare goedkeuring aan deze keuze. Het zou waarlijk te betreuren zijn, indien de waarnemingen aan deze peilschaal gestaakt moesten worden.

Is er van de uitvoerige voorstellen, in der tijd door de Commissie gedaan, weinig door hare directe bemiddeling tot stand gekomen, van de andere zijde is, tot geheel andere doeleinden, zeer veel verricht van hetgeen men voor het onderzoek naar de daling van den bodem noodzakelijk achtte. Wij mogen dit verslag niet besluiten zonder een kort overzicht dier werkzaamheden te geven. De Commissie, in Februari 1853 benoemd voor het onderzoek van het voorstel des Heeren Harting, gaf twee middelen aan om tot het beoogde doel te geraken. Het eerste dier middelen was: het verbinden van verschillende vaste punten, zoo na mogelijk bij de zee gelegen, door middel van waterpassingen, met punten meer landwaarts in, op of bij de grenzen van Duitschland; deze waterpassingen zouden om de 20 of 25 jaren herhaald moeten worden. Door den algemeenen dienst van den Waterstaat worden, met het doel om een gelijk

stel Rijkspeilschalen langs de rivieren in te voeren, uitgebreide waterpassingen langs die rivieren ondernomen. Deze waterpassingen, hoofdzakelijk tusschen de jaren 1846 en 1860 uitgevoerd, werden later in de overige deelen van ons land voortgezet. In het jaar 1875 ondernam wijlen Dr. L. Cohen Stuart, ten dienste der Europeesche Graadmeting, eene tweede uitgebreide waterpassing. Deze, die na het overlijden van den Heer Stuart door de in 1879 benoemde *Rijkscommissie voor Graadmeting en Waterpassing* werd voortgezet, overspant thans reeds een groot gedeelte van ons vaderland en gaat spoedig hare voltooiing te gemoet.

Het tweede hulpmiddel, in der tijd door de bovengenoemde Commissie voorgesteld, bestond in het vergelijken van de hoogte van dezelfde vaste punten aan de kusten der zee, met de gemiddelde hoogte van het oppervlak des waters. Hiertoe waren waarnemingen met zeer korte tijdsruimten noodzakelijk. De Commissie, benoemd om die middelen in praktijk te brengen, zag in de zelfregistreerende peilschalen het meest geschikte middel om daartoe te geraken. Eene dergelijke peilschaal was aan onze kust in werking en al dadelijk werd van deze zeer gunstige gelegenheid gebruik gemaakt. Eene tweede dergelijke peilschaal kwam, door bemiddeling der Commissie, in 1858 op Urk tot stand. Later werden meer dergelijke peilschalen aangelegd. Katwijk, vroeger door de Commissie als de plaats voor eene dier peilschalen aangewezen, verkreeg in 1874, door de zorg van het waterschap van Rijnland, eene dergelijke inrichting. Omtrent dienzelfden tijd werden, door den Waterstaat, wegens het groote nut der zelfregistreerende peilschalen voor de kennis van het verloop der watergetijen, een groot aantal dier peilschalen langs onze kusten en benedenrivieren aangelegd. Tengevolge daarvan, zijn op dit oogenblik niet minder dan drie-en-vijftig (53) dergelijke peilschalen in ons land geregeld in werking, terwijl nog een zevental zich in aanbouw bevinden. Al deze peilschalen zijn voor het hier beoogde doel niet geschikt, omdat vele daarvan zich aan de rivieren bevinden. Het aantal, dat zich langs de kusten der zee bevindt, is echter niet gering. In het eerste

kustvak, tusschen de zuidelijke grens en Helder, bevinden zich zelfregistreerende getijmeters aan de Wielingen, te Vlissingen, Brouwershaven en Katwijk, terwijl dergelijke inrichtingen bij den Hoek van Holland en te IJmuiden in aanbouw zijn en er ook een ontwerp bestaat voor een getijmeter te Petten. In het tweede kustvak vinden wij tusschen Helder en de oostelijke grens van ons Vaderland, behalve de zelfregistreerende peilschaal van Helder, nog andere dergelijke inrichtingen op Vlieland, te Harlingen, Zoutkamp en Delfzijl. Langs de kusten der Zuiderzee en in de Zuiderzee zelve vinden wij eindelijk, behalve op Urk, ook zelfregistreerende peilschalen te Stavoren, Enkhuizen, Durgerdam, Nijkerk, Elburg, Kraggenburg en op Schokland.

Zijn aldus vele zelfregistreerende getijmeters aan onze zeekusten in werking, en worden dus voortdurend vele waarnemingen verzameld — met de bewerking daarvan is het minder gunstig gesteld, niettegenstaande de pogingen daartoe door de Akademie aangewend. In October 1873 werd namelijk door het lid der Akademie, den Heer J. R. T. Oertt, het voorstel gedaan, dat van de aanteekeningen der zelfregistreerende getijmeters kopieën op verkleinde schaal gemaakt en aan de Akademie bewaard zouden worden, ten einde daardoor te voorkomen, dat die waarnemingen door brand als anderszins verloren zouden gaan, en zij aldaar voor wetenschappelijk onderzoek toegankelijk zouden zijn. De Akademie keurde dit voorstel goed en wendde zich voor de uitvoering daarvan tot den Minister, die er echter bezwaar in zag: niet alleen wegens den grooten omvang van het werk en de daaraan verbonden financieele bezwaren, maar ook wegens de onnauwkeurigheden en fouten, die bij het kopieeren konden insluipen, waardoor die kopieën toch weinig wetenschappelijke waarde zouden bezitten.

In hare vergadering van 24 December 1873, benoemde de Akademie eene Commissie, bestaande uit de Heeren Oertt, Buys Ballot en Stamkart, om advies uit te brengen over nader te doene pogingen in deze zaak. Na verder bekomen inlichtingen, stelde de Akademie, bij schrijven van 30 Maart 1874, aan den Minister voor, de opteekeningen van de zelf-

registreerende getijmeters te doen berekenen op de wijze als omschreven is in de meermalen genoemde verhandeling van den Heer STAMKART, of, zoo daartegen bezwaren bestonden, de macrograafbladen tijdelijk aan de Akademie af te staan, om die berekening van wege de Akademie te laten uitvoeren. Bij missive van 6 Maart 1875 deelde de Minister aan de Akademie mede, dat de macrograafbladen bij den algemeenen dienst van den Waterstaat zouden worden bewerkt en de uitkomsten daarvan van wege het departement in druk zouden worden uitgegeven.

Het doel der Akademie was hiermede volkomen bereikt; de tot nu in druk verschenen uitkomsten bevatten echter niet wat de Akademie wenschte, en wat voor de juiste kennis van het verloop der watergetijen noodzakelijk is. Daarin toch komen alleen voor de tijdstippen van hoog- en laagwater, met de daarbij waargenomen waterhoogten, benevens de waterstanden des voormiddags te 8 uren. Van eene berekening, zooals door de Akademie in haar voorstel van 30 Maart 1874 aan den Minister gedaan werd, is tot heden niets in druk verschenen.

Namens de Rijks-Commissie voor Graadmeting en Waterpassing,

de Secretaris

CH. M. SCHOLS.

VERSLAG

OVER HET ANTWOORD, AAN DEN

MINISTER VAN BINNENLANDSCHE ZAKEN

TE GEVEN OP VIER VRAGEN, BETREKKELIJK DE

VIVISECTIE.

(Uitgebracht in de vergadering van 24 Februari 1883)

In onze handen werden gesteld:

1°. Een missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken, waarin de voorlichting en het advies der Afdeeling gevraagd worden over een adres, door het Bestuur der Nederlandsche Vereeniging tot Bescherming van Dieren tot Z. M. den Koning gericht, waarin de indiening van een wetsontwerp verzocht wordt om het misbruik, dat van de vivisectie gemaakt kan worden, tegen te gaan en tevens de hoofdbepalingen worden aangegeven, die, naar het bescheiden oordeel der Vereeniging, daarin zouden behooren te worden aangetroffen. De Minister stelt in bedoelden brief vier vragen, die hij door de Afdeeling gaarne beantwoord zoude zien.

2°. Het adres van het Bestuur der bovengenoemde Vereeniging zelf, met de daaraan toegevoegde Memorie van Toelichting.

De Commissie volgt bij haar advies den door den Minister aangegeven weg. Bij de beantwoording der door hem gestelde vragen, komen geleidelijk alle door de Vereeniging in het wetsontwerp verlangde bepalingen ter sprake.

Kan vivisectie bij wetenschappelijk onderzoek en bij hooger onderwijs nagelaten worden? Zoo luidt de eerste vraag des Ministers.

Wie niet geheel onbekend is gebleven met den vooruitgang, dien de biologische wetenschappen en de daartoe behoorende geneeskunde in onze dagen ondervonden hebben, weet, dat hij voor een groot deel aan de experimenteele methode te danken is, en dat proefnemingen op dieren, die volstrekt niet altijd met vivisectie behoeven gepaard te gaan, voor den vooruitgang onzer kennis der normale en abnormale levensverschijnselen onmisbaar zijn gebleken. Honderden voorbeelden kunnen ten bewijze dezer stelling worden aangevoerd en zijn herhaaldelijk aan de Vereeniging tot bescherming van dieren onder het oog gebracht. Wij behoeven ze hier niet te herhalen, en wel des te minder, omdat het bestuur dier Vereeniging, na eerst te hebben betoogd, dat door verschillende autoriteiten op wetenschappelijk gebied het nut der vivisectie ernstig betwijfeld wordt, ten slotte toch zelf »de vivisectie ter bereiking van een wetenschappelijk doel, waarbij nieuwe ontdekkingen bewijs behoeven" wil toelaten.

Maar ook bij het *onderwijs* kunnen deze proeven niet geheel worden gemist. De kennis, die door de beschrijving eener proef verkregen wordt, is van een geheel ander gehalte als die, welke door waarneming der proef zelve ontstaat. De groote voordeelen van het aanschouwelijk onderwijs worden in alle andere natuurwetenschappen gereedelijk toegegeven en algemeen erkend, maar bij de studie der levensverschijnselen, de meest samengestelde op het gebied der natuurkundige wetenschappen, wenscht het bestuur der Vereeniging die voordeelen prijsgegeven te zien, en tot rechtvaardiging van dien eisch wordt de uitspraak van een ongenoemde, maar volgens genoemd bestuur een der meest bekwame Nederlandsche hoogleeraren aangevoerd, die op den 3den Februari 1876 verklaard heeft, dat dergelijke proeven dierenmarteling moeten worden genoemd, ter opsiering van een voorlezing of les. Tegenover het gevoelen van dezen ongenoemden hoogleeraar, kan dat van dozijnen andere worden

gesteld, die meenen, dat het voor onze studenten in de geneeskunde niet slechts wenschelijk, maar inderdaad noodig is, dat zij, die later de meest ingewikkelde ziekelijke processen zullen hebben op te sporen en tot hunne oorzaken zullen moeten trachten terug te brengen, reeds vroeg in de gelegenheid worden gesteld om waarnemingen op het levend lichaam te doen. Die overtuiging riep de laboratoriën voor experimenteele physiologie, pathologie, pharmacodynamie en toxicologie in het leven. Men make zich evenwel geen overdreven voorstelling van het aantal dieren, dat in Nederland voor het *onderwijs* wordt opgeofferd. Slechts *enkele* dergelijke experimenten, waarbij het vooral te doen is om de studenten een indruk van de methode van onderzoek te geven, worden in een jaarlijkschen cursus op de lessen der hoogleeraren verricht. Die te verbieden, omdat zij niet worden gedaan »ter bereiking van een wetenschappelijk doel, waarbij nieuwe ontdekkingen bewijs behoeven", zou schadelijk zijn voor het onderwijs.

Wat het *hooger onderwijs* betreft, acht de Commissie door het medegedeelde de eerste vraag van den Minister beantwoord. Tot *oefening* worden in Nederland geen proeven op dieren gedaan. Operatieve chirurgie wordt op het lijk geleerd. In het adres der Vereeniging komen echter ook de oefeningen ter sprake, die in operatieve chirurgie aan de veeartsenijschool te Utrecht op het levend dier plaats hebben. De Vereeniging wenscht die geheel verboden te zien. De Commissie meent dus ook dit punt in haar rapport te moeten behandelen.

Bij het veeartsenijkundig onderwijs te Utrecht hebben eenmaal per week, 's maandags van 8—10 uren, oefeningen in operatieve chirurgie plaats. Na aftrekking van de examen- en vacantieweken, en van de weken waarin geen dier beschikbaar is, blijven er gemiddeld 25 weken per jaar over, waarin oefeningsoperatiën op het levend dier plaats vinden. Volgens den Directeur, Dr. Wirtz, zijn deze oefeningen noodig, omdat alleen op deze wijze eene voldoende praktische vorming van den veearts verkregen kan worden. Bij tal van gevallen, in de dagelijksche veeartsenijkundige prak-

tijk voorkomend, is de goede afloop — niet alleen voor het dier, maar ook voor den veearts en zijne helpers — voor een zeer groot deel daarvan afhankelijk, dat de veearts uit eigen ervaring ten volle bekend zij met de bezwaren en gevaren, die het zich verweerende dier bij verschillende operatiën op verschillende wijzen veroorzaakt en dat hij deze met beleid, door goede oefening verkregen, wete te ontgaan.

Is het gebleken, dat hier te lande van vivisectie misbruik wordt gemaakt? is de tweede vraag. Proeven op dieren geschieden in Nederland alleen in de laboratoriën aan de universiteiten en aan de veeartsenijschool. Daarbuiten kunnen zij moeielijk worden gedaan, omdat voor de waarneming der verschijnselen veelal instrumenten worden vereischt, die alleen in de genoemde inrichtingen worden aangetroffen. Met het beheer der laboratoriën aan de universiteiten zijn de hoogleeraren belast en aan het hoofd der veerartsenijschool staat de Heer Wirtz, die van den Utrechtschen senaat den doctorstitel honoris causa verkreeg. Wanneer, bij uitzondering, buiten genoemde inrichtingen op levende dieren wordt geëxperimenteerd, geschiedt dit steeds door personen, die den academischen graad in de medicijnen bezitten of daarmede in bevoegdheid gelijk zijn gesteld. Feitelijk wordt dus aan den wensch van het bestuur der Vereeniging, dat alleen zij, die een academischen graad in de medicijnen bezitten, vivisectiën zullen mogen doen, zoo goed als voldaan.

Maar de dieren moeten bij deze proeven steeds »gechloroformeerd" zijn en 't gebruik van »curare" moet daarbij, volgens de Vereeniging, verboden worden.

Wat de veeartsenijkunde betreft, ziet de Vereeniging over 't hoofd, dat de toediening van chloroform of andere anaesthetica in tallooze gevallen der dagelijksche praktijk volslagen onmogelijk is, en zelfs dáár, waar zij mogelijk zijn zou, geen aanbeveling zou verdienen, om de eenvoudige reden, dat het leed, hetwelk men het dier zou moeten aandoen, veel grooter zou wezen dan dat, door de handig uitgevoerde operatie veroorzaakt.

Wat de experimenteele biologische wetenschappen betreft, wordt curare alleen gebezigd, indien voor het experiment de opheffing van alle spierbeweging gevorderd wordt. Wie eischt, dat curare nooit zal worden aangewend, bewijst, dat hij onbekend is gebleven met den grooten vooruitgang in kennis, die wij omtrent de functie van zeer belangrijke organen van het lichaam aan 't gebruik van curare te danken hebben, en hoogstwaarschijnlijk, door het voortgezet onderzoek met deze en andere stoffen, waardoor bepaalde gedeelten van het zenuwstelsel in hunne werking gewijzigd worden, nog zullen verkrijgen. Voor het overige worden anaesthetica steeds aangewend, waar 't mogelijk is.

Altijd worden bovendien, zoowel bij de studie der geneeskundige vakken als bij het onderwijs in de operatieve chirurgie aan de veeartsenijschool te Utrecht, de dieren, waarop geëxperimenteerd of geopereerd is, terstond na de proef gedood. Het dier wordt alleen dán in het leven gehouden, als het proces, dat door den operateur werd in het leven geroepen, in zijn loop moet worden bestudeerd.

Hiermede nu heeft de Vereeniging tot bescherming van dieren volstrekt geen vrede en bij hare bestrijding van deze punten komt het duidelijk uit — wat uit den door haar gestelden eisch, dat alleen voor nieuwe ontdekkingen, die bewijs behoeven, de vivisectie geoorloofd is, eigenlijk reeds volgde — dat zij, hoewel zij voorgeeft alleen het misbruik te willen tegengaan, eigenlijk de vivisectie geheel en al wenscht afgeschaft te zien. Immers, wat eenmaal ontdekt is, behoeft geen bewijs meer, en het experiment op dieren moet juist dienen om tot de ontdekking te komen. Werd dus de door de Vereeniging geformuleerde bepaling in een wet opgenomen, dan zou geen vivisectie meer mogelijk zijn en de Vereeniging zou daarmede volkomen vrede hebben. In de Memorie van Toelichting toch lezen wij 't volgende: »doch bovenal vermeent het bestuur, dat waarachtige beschaving zich kenmerkt door den regel, dat het heil der menschen nooit bevorderd wordt door bloedige offers, en dat het een gelukkig teeken des tijds zijn zal, wanneer de mensch zal gruwen van de zonde om in koelen bloede de

vreeselijkste folteringen op onschuldige dieren te verrichten, eeniglijk met het doel daartoe *wellicht* zijn lichamelijk heil te bevorderen".

De klemtoon wordt hier op het woord »wellicht" gelegd. Het is blijkbaar aan het bestuur der Vereeniging tot bescherming van dieren niet onbekend gebleven, dat aan vele proeven, in vroeger tijd genomen, thans geen bewijskracht meer wordt toegekend, ja zelfs, dat er proeven op levende dieren genomen zijn, waarvan het ons thans duidelijk is, dat zij geen goede uitkomst konden opleveren. Het experiment in de biologische wetenschappen heeft met elk ander experiment dit gemeen, dat dwalingen met betrekking tot de daaruit af te leiden gevolgtrekkingen volstrekt niet zeldzaam zijn, en daar nu de levensverschijnselen van den meest samengestelden aard zijn, is dwaling in de biologische wetenschappen nog veelvuldiger dan elders. Magendie en zijn leerlingen stelden zich de levensverschijnselen te eenvoudig voor, en meenden veelal alleen door waarneming van de door vivisectie blootgelegde organen verder te kunnen komen, dan wij nu oordeelen dat mogelijk is. Zouden wij, die op hunne schouders staan en dus verder zien dan zij, daarom nu Magendie en zijne leerlingen mogen veroordeelen, en hen voor minder beschaafd mogen houden dan ons zelven? Zoo oordeelt blijkbaar het bestuur der Vereeniging tot bescherming van dieren. Het vindt daarin een reden om van verdere pogingen tot vooruitgang, door experimenten op levende dieren, af te zien en het zou, naar zijne meening, een kenmerk van »waarachtige" beschaving zijn, als er geen »zondige" vivisectie op »onschuldige" dieren meer plaats vond.

De Commissie concludeert anders. De moeielijkheid om in de biologische wetenschappen de feiten en hun samenhang met juistheid te leeren kennen, moet aansporen tot het overwinnen der bezwaren, wat zonder herhaalde proefneming op levende dieren onmogelijk is. Met de beschaving staat de kwestie der vivisectie, naar hare meening, in hoegenaamd geen verband. Sentimentaliteit tegenover dieren heeft het sterkst geheerscht, zooals onlangs in onze volksvertegen-

woordiging werd opgemerkt, in een maatschappij, op wier zedelijkheid wel wat was af te dingen: de Fransche in het laatst der vorige eeuw. Toen werden er maaltijden aangericht, waar alleen plantaardig voedsel genuttigd werd, om geen dierenmoord op zijn geweten te hebben, en velen, die aan die manie leden, hebben later gedurende de revolutie getoond, tegenover hunne medemenschen met minder sentimentaliteit te zijn vervuld geweest.

Hiermede zijn wij tot het eigenlijke, principieele punt van verschil gekomen, dat er tusschen de Vereeniging tot bescherming van dieren en de beoefenaren der biologische wetenschappen bestaat. Door ervaring bekend met het onuitsprekekelijk leed, dat ziekten onder het menschdom te weeg brengen, hebben de geneeskundigen ten allen tijde getracht, den aard der ziekten en hare oorzaken op te sporen, om haar met vrucht te kunnen bestrijden, of, 't geen nog beter is, te voorkomen. Nauwkeurige waarneming aan het ziekbed is daarvoor een eerste vereischte; maar alleen bleek zij niet voldoende. Waarneming onder bepaalde, willekeurig in het leven geroepen omstandigheden: het experiment, in één woord, scheen hier, zooals bij andere natuurkundige wetenschappen, een krachtige hefboom tot vooruitgang te kunnen zijn. Zoo werden de experimententeele physiologie, pathologie, geneesmiddelleer en toxicologie in het leven geroepen. Liefde tot de menschen gaf haar het aanzijn, en, dat de geneeskunde in onzen tijd meer dan vroeger in staat is om menschelijk leed te verzachten, is aan haar te danken.

Door de Vereeniging tot bescherming van dieren wordt het menschelijk lijden op den achtergrond geschoven, en het leed, aan dieren berokkend, met overdreven schelle kleuren in het licht gesteld. Bij de beoefenaren der biologische wetenschappen weegt het leed der menschen zwaarder. Zij zien er dus geen bezwaar in enkele, ja zelfs vele, dieren leed te doen, wanneer daardoor het menschdom kan worden gebaat, en gevoelen geen gewetenswroeging, indien later blijkt, dat zij zich hebben vergist en het dier te vergeefs hebben opgeofferd, omdat zij zich bewust zijn,

als eerlijke lieden naar hun beste weten te hebben gehandeld.

Uit het medegedeelde blijkt voldoende, dat de Commissie de derde vraag des Ministers: is het noodig door wettelijke voorziening vivisectie te verbieden of te beperken? ontkennend beantwoordt. Elke beperking acht zij onnoodig en zelfs schadelijk. Zoo heeft men het ook in andere landen begrepen. In Duitschland leed onlangs een ten tweeden male door de dierenbeschermers in het werk gestelde poging om eene wettelijke regeling der vivisectie te verkrijgen, schipbreuk, en in Engeland, waar zij werd ingevoerd, wordt haar bestaan betreurd, omdat men haar schadelijk acht voor de wetenschap en voor de maatschappij, en zelfs het gerechtelijk onderzoek bij moord door vergiftiging daardoor bemoeielijkt wordt.

De vierde vraag: zijn de door den adressant bedoelde verordeningen uitvoerbaar en doeltreffend? Welke zijn in deze materie de rechtmatige eischen der wetenschap? behoeft, wat de eerste alinea betreft, na het medegedeelde geen beantwoording meer; alleen omtrent de laatste alinea nog een enkel woord.

Naar het oordeel der Commissie, zijn de rechtmatige eischen der wetenschap in deze materie eenvoudig deze: dat aan den beoefenaar der biologische wetenschappen, zooals aan alle andere wetenschappelijke mannen, de vrijheid verleend blijve, die in Nederland ten alle tijde heeft bestaan, om te streven naar vooruitgang op het gebied zijner wetenschap, zóóals hij zelf oordeelt dat dit goed en oorbaar is. Al had er in Magendie's tijd een wet bestaan, in den geest als het bestuur der Vereeniging tot bescherming van dieren die nu wenscht ontworpen te zien, zij zou de vivisectiën, die Magendie verricht heeft, niet hebben tegengegaan, en zonder eenig politietoezicht is het aantal vivisectiën in onzen tijd tot het strikt noodzakelijke beperkt geworden. Men spreke het »zondig" niet uit over personen, die geacht kunnen worden op dezelfde hoogte van beschaving

en zedelijkheid te staan als het bestuur der Vereeniging tot bescherming van dieren, maar die als beoefenaren der biologische wetenschappen, waaraan zij hun leven hebben toegewijd, en dus als deskundigen, een andere overtuiging hebben omtrent de beteekenis en de resultaten van de experimenteele methode bij de studie der levensverschijnselen.

A. HEYNSIUS.

W. KOSTER.

B. J. STOKVIS.

BIJDRAGE

TOT DE

KENNIS VAN NORMAAL CYAANZUUR.

DOOR

E. MULDER.

VIERDE GEDEELTE *).

Als vervolg op onze laatste onderzoekingen werd een poging gedaan nader na te gaan, in hoeverre het geuit vermoeden, dat het ruwe product in hoofdzaak is: $x\,(NC\,.\,OC_2H_5\,,\ C_2H_6O)$ en het lichaam van CLOËZ: $NC\,.\,OC_2H_5\,,\ x\,(N_3C_3\,,\ 3\,OC_2H_5)$, kan geacht worden meer of min waarschijnlijk te zijn. Daartoe werd zoowel het ruwe product als het lichaam van CLOËZ aan een herhaald onderzoek onderworpen. Alvorens echter over te gaan tot nieuwe reeksen van waarnemingen, is nog een aanhangsel mede te deelen van proeven, wier uitkomst vroeger slechts ten deele kon worden opgegeven †). In een dezer, namelijk Proef I, was uitgegaan van 0,5825 gr., in Proef II van 0,343 gr. en in Proef III van 0,4805 gr. normaal cyanuurzuur aethyl, terwijl in Proef IV was genomen 0,526 gr. van het lichaam van CLOËZ; deze stoffen werden opgelost in broom, de overmaat van broom liet men daarna verdampen, en vervolgens de broomverbinding dissocieëren. Deze proeven aangevangen in een koud jaargetijde,

*) Zie *Verslagen en Mededeelingen* der K. Akad. v. Wetenschappen, 2de Reeks, Deel XVIII, p. 137 (1882) (verkort: B III).

†) B. III, 143, 162.

werden in voorjaar en zomer voortgezet. A stelt voor de *toename* in gewicht; B het gehalte aan broom, berekend naar A, op 100 gew.d. der verbinding; C het aantal weken sints de vorige bepaling, met uitzondering der eerste opgave betrekking hebbende op het totale aantal weken van af het begin der betreffende proef.

I. A.	I. B.	I. C.	II. A.	II. B.	II. C.	III. A.	III. B.	III. C.	IV. A.	IV. B.	IV. C.
0,5325 gr.	47,7 p. c.	11 w.	0,305 gr.	47,0 p. c.	8 w.	0,4724 gr.	49,5 p. c.	8 w.	0,612 gr.	53,7 p. c.	2 w.
3,822 ″	39,6 ″	2 ″	0,178 ″	34,1 ″	2 ″	0,3939 ″	45,0 ″	2 ″	0,4665 ″	47,0 ″	2 ″
0,3345 ″	36,4 ″	2 ″	0,106 ″	23,6 ″	2 ″	0,3154 ″	39,6 ″	2 ″	0,36 ″	40,6 ″	2 ″
0,2795 ″	32,4 ″	2 ″	0,076 ″	18,1 ″	2 ″	0,2344 ″	32,7 ″	2 ″	0,283 ″	34,9 ″	2 ″
0,166 ″	22,2 ″	2 ″	0,037 ″	9,7 ″	2 ″	0,1514 ″	23,9 ″	9 ″	0,185 ″	26,0 ″	2 ″
0,087 ″	13,0 ″	2 ″	0,013 ″	3,6 ″	2 ″	0,1094 ″	18,5 ″	2 ″	0,136 ″	20,5 ″	2 ″
0,006 ″	1,0 ″	2 ″	— 0,015 ″	—	2 ″	0,0564 ″	10,5 ″	2 ″	0,096 ″	15,4 ″	2 ″
— 0,0445 ″	—	2 ″	— 0,017 ″	—	2 ″	0,0044 ″	0,9 ″	2 ″	0,06 ″	10,2 ″	2 ″
— 0,03 ″	—	2 ″	— 0,012 ″	—	2 ″	— 0,019 ″	—	2 ″	0,038 ″	6,7 ″	2 ″
— 0,015 ″	—	2 ″	— 0,0085 ″	—	2 ″	— 0,02 ″	—	2 ″	0,0165 ″	3,0 ″	2 ″
— 0,0085 ″	—	2 ″	— 0,006 ″	—	2 ″	— 0,012 ″	—	2 ″	0,002 ″	0,37 ″	2 ″
— 0,002 ″	—	2 ″	— 0,0015 ″	—	2 ″	— 0,006 ″	—	2 ″	— 0,008 ″	—	2 ″
0 ″	—	2 ″	— 0,001 ″	—	2 ″	— 0,003 ″	—	2 ″	— 0,007 ″	—	2 ″
0 ″	—	2 ″	— 0,0007 ″	—	2 ″	— 0,0015 ″	—	2 ″	— 0,004 ″	—	2 ″
—	—	—	0 ″	—	2 ″	— 0,0005 ″	—	2 ″	— 0,003 ″	—	2 ″

Normaal cyaanzuur aethyl gaat bij gewone temperatuur niet over in damp; 0,5965 gr. was na twee maanden 0,5945, terwijl dit geringe verlies wel aan water is toe schrijven. De terugblijvende massa bij gemelde proeven

is een afgeleide van *iso*cyanuurzuur, dat thans wordt voorbijgegaan. Slechts wordt er op gewezen, hoe het broom onder deze omstandigheden ruimschoots tijd en gelegenheid heeft gedeeltelijk substitueerend op te treden, terwijl gevormd broomwaterstof aanleiding kan geven tot het doen ontstaan der keten van *iso*cyanuurzuur.

Het product van n. cyanuurzuur aethyl uit de oplossing in broom teruggebleven, vormt een samenhangende schijnbaar amorphe massa, en de dissociatie van het aanvankelijke additie-product heeft ook dientengevolge langzaam plaats. In zooverre kan het krystallijne product, erlangd met broom*water*, onder overigens gelijke omstandigheden, gemakkelijker ontleed worden. Dit laatste zou wellicht geschikt wezen, om het gehalte van versch ruw product en anderen te bepalen aan n. cyanuurzuur aethyl, waartoe de volgende proeven strekken. Zij werden genomen zooveel mogelijk onder dezelfde invloeden, en vergeleken met een oplossing van n. cyanuurzuur aethyl. Hierbij werd uitgegaan van de onderstelling, dat versch ruw product in hoofdzaak bestaat uit $x(NC \,.\, OC_2H_5, C_2H_6O)$, en bij n. cyanuurzuur aethyl zooveel *alkohol* gedaan als overeenkomt met de verhouding: $3\,N_3C_3 \,.\, 3\,O\,C_2H_5, 3\,C_2H_6O$. Op 100 C.C. water werd genomen (de alkohol niet medegerekend) 0,6 gr. stof (beschouwd te zijn: $x(NC \,.\, OC_2H_5)$. Van ruw product *na staan* werd verondersteld, dat het genoegzaam geheel bestaat uit $x\,NC \,.\, OC_2H_5$, en dus hiervan evenveel genomen als van n. cyanuurzuur aethyl.

Op 25 C.C. oplossing werden gedaan 10,5 C.C. broomwater; alles in breede glazen buizen, gesloten met aan den hals toegesmolten glazen trechters. Na nêerslaan met broomwater liet men het geheel een dag of twee en meer dagen (bij afsluiting van het licht) staan, om dan het krystallijne afzetsel te brengen op een (gewogen) schaaltje, dat werd geplaatst onder een exsiccator met zwavelzuur. Zoodra de massa op 't oog droog was, werd gewogen en dit na een dag herhaald; vervolgens werd het schaaltje geplaatst onder een exsiccator met kalk, en nu en dan gewogen, totdat het gewicht niet merkbaar meer veranderde *).

*) Zie B. III. 161.

I. A. Aan versch ruw product werd genomen 0,9553 gr., dit opgelost in 97 C. C. water, en van deze oplossing 72 C. C. genomen voor de proef;

B. van hetzelfde product werd 1,0105 gr. opgelost in 103 C. C. water en alles aangewend voor de bepaling;

II. van ruw product *na staan* (namelijk onder een exsiccator met zwavelzuur zie vroeger), werd 0,7855 gr. genomen en hierbij gedaan 0,546 gr. alkohol, welk mengsel werd opgelost in 130 C. C. water, waarvan 25 C, C. werden afgezonderd voor de bepaling;

III. A. van n. cyanuurzuur aethyl werd 0,5955 gr. met 0,4375 gr. alkohol in 100 C. C. water opgelost, en hiervan 25 C. C neêrgeslagen met broomwater. Bij de moederloog werd andermaal broomwater gedaan, maar niets meer afgezet;

B heeft betrekking op dezelfde oplossing;

IV. Een hoeveelheid van ruw product I werd in een toegesmolten buis bij 100° ongeveer 65 uren verhit, daarna hiervan 0,944 gr. opgelost in 96 C. C. water en hiervan 25 C C. genomen;

V. De laatste proef werd herhaald, alleen verhit bij 150° gedurende 48 uur, en uitgaande van nagenoeg eenzelfde hoeveelheid stof de geheele oplossing aangewend.

Het gewicht aan afzetsel, aanvankelijk en na staan, bedroeg, berekend op 25 C. C. der oplossing of 0,15 gr. stof:

I. A.		I. B.		II.		III. A		III. B.		IV.	V.
ew.	Aantal dagen.	gew.	dagen.	gew.	dagen.	gew.	dagen.	gew.	dagen		
034 gr.		0,032 gr.		0,0405 gr.		0,3515 gr.		0,295 gr.		Zeer weinig afgezet en wel krystallen met vloeistof.	Werd niets afgezet.
033 "	1	0,031 "	1	0,0365 "	1	0,151 "	1	0,1375 "	1		
032 "	20	0,03 "	14	0,024 "	20	0,14 "	18	0,13 "	4		
028 "	35	0,029 "	35	0,012 "	35	0,1165 "	35	0,119 "	31		
027 "	49	0,027 "	49	0,0075 "	49	0,107 "	49	0,114 "	49		
								0,11 "	58		

Duidelijk volgt uit IV en V, dat verwarming onder gemelde omstandigheden *niet* leidt tot omzetting van aethyl-

normaalcyanaat, wellicht aanwezig, in aethylnormaalcyanuraat.

Voor alle zekerheid werd proef I herhaald met een nieuwe bereiding van versch product, en wel 2,05 gr., opgelost in 209 C.C. water, terwijl de geheele oplossing werd neêrgeslagen met broomwater. Het gew. aan afzetsel bedroeg op 25 C.C. oplossing of 0, 15 gr. stof (na aftrek van den alcohol, zie vroeger):

VI.

gew.	Aantal dagen.
0,032 gr.	
0,031 »	1
0,025 »	30
0,022 »	49
0,021 »	58.

De overeenkomst tusschen I (A en B) en VI is zeer groot.

In 't voorbijgaan worde medegedeeld, dat het product van laatstgenoemde bereiding (hieronder aangegeven door 1) en twee andere bereidingen (2 en 3) bij staan aldus afnamen in gewicht:

1.			2.			3.		
gew:	Aantal. dagen.	Verschil.	gew.	dagen.	Verschil.	gew.	dagen.	Verschil.
76,3 gr.		12,3	50,3 gr.			49,3		
64,0 »	1	7,4	40,8 »	1	9,5	32,7	7	6,6
56,6 »	1	6,4	32,9 »	6	7,9	29,4	14	3,3
50,2 »	5	2,6	30,4 »	7	2,5	27,7	33	1,7
47,6 »	7	1,2	28,9 »	7	1,5			
46,4 »	7	1,2	28,0 »	7	0,9			
45,2 »	7	0,9	27,0 »	14	1,0			
44,3 »	7	0,6	26,4 »	32	0,6			
43,7 »	7	0,9						
42,8 »	14	1,0						
41,8 »	32							

De verschillen van twee elkander opvolgende wegingen zijn in de eerste periode veel grooter dan in de laatste, waarin zij voor eenzelfden tijd nagenoeg gelijk zijn. Het verlies, toeschrijvende in de eerste periode aan alcohol, en nemende hiervoor de verschillen:

1	2	3
76,3—45,2	50,3—28,9	49,3—29,4

geeft dit berekend op 100 gew. — d. *versch* ruw product aan alkohol:

1	2	3	*x* ($NC . OC_2 H_5, C_2 H_6 O$) eischt:
40,7	40,5	40,3	39,3 p.c..

In verband met analysen vroeger *) medegedeeld van versch ruw product, schijnt het dus, dat er inderdaad een losse verbinding bestaat met alkohol. Het kan duidelijk zijn, dat het bestaan dezer verbinding niet met genoegzame zekerheid is aan te geven, al ware het alleen, dat in gemeld product wat voorkomt van amido-verbinding en n. cyanuurzuur aethyl, terwijl het nog altijd een vraagstuk blijft, of daarin wel $NC . OC_2 H_5$ aanwezig is, en tevens of het vluchtige †) bestanddeel aan dit laatste is toe te schrijven.

Over polymerisatie van normaal aethylcyanaat. Tot nog toe wordt aangenomen, dat het lichaam van Cloëz is $NC . OC_2 H_5$ (en dat gemaakt met methylalkohol: $NC . OC H_3$, enz.), en dit bij staan wordt gepolymeriseerd tot *normaal* cyanuurzuur aethyl. Maar noch het eerste noch het laatste is echter bewezen. Het vast worden bij staan van het lichaam van Cloëz sluit niet in, dat hier polymerisatie plaats heeft, zeer wel kan reeds aanwezig n. cyanuurzuur aethyl worden afgezet. Trachten we een en ander na te gaan. Indien mocht kunnen bewezen worden, dat polymerisatie in gemelden zin plaats heeft, zou daaruit, met 't oog op de analytische gegevens in de eerste plaats, met genoegzame waarschijnlijkheid volgen, dat $NC . OC_2 H_5$ kan bestaan, zij het

*) B III, 157.

†) B I 10.

dan ook in verbinding met aethylcyanuraat. Daartoe vooraf eenige voorloopige beschouwingen.

Versch ruw product levert bij neêrslaan en wasschen met water, ongeveer $\frac{1}{3}$ in gewicht aan het lichaam van Cloëz en dit laatste aan *ruw* n. cyaanuurzuur aethyl — dat echter nog wat vloeibare deelen zal bevatten (het ruwe vaste product wordt van de vloeibare deelen slechts bevrijd door filtreerpapier) — nagenoeg $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{4}$ (meer naderende tot $\frac{1}{3}$): nemen we hiervoor $\frac{1}{4}$ in gewicht.

Een hoeveelheid van 273 gr. versch ruw product gaf een praecipiteer- en waschwater, dat (na indampen grootendeels onder een exsiccator bij gewone temperatuur) opleverde een krystallijn afzetsel, hetwelk opgelost in water bij lage temperatuur gaf (krystalwater-houdend) n. cyanuurzuur aethyl. na staan onder een exsiccator 2,84 gr. bedragende.

Laten we gemelde hoeveelheid *ruw* n. cyanuurzuur aethyl aannemen te zijn *zuiver*, dan zou 0,6 gr. *versch* ruw product bevatten: $\frac{0,6}{3 \times 4} = 0,05$ gr. n. cyanuurzuur aethyl, en daarenboven $(273 : 0,6 = 2,84 : x)$ praecipiteer- en waschwater medegerekend: 0,056 gr.. Berekend op $\frac{0,6}{4} = 0,15$ gr. (of 25 C. C. oplossing, zie vroeger) zou versch ruw product bevatten aan n. cyanuurzuur aethyl: $\frac{0,056}{4} = 0,014$ gr.. Nemen we het gemiddelde van I (A en B) en VI, dan bedraagt het afzetsel 0,032 gr. van 0,15 gr. versch ruw product *na aftrek* van het gehalte aan alkohol, in welk afzetsel (beschouwd als $C_3 N_3 . 3 OC_2 H_5, 6 Br$) zou wezen 0,01 gr. n. cyanuurzuur aethyl, en berekend op versch ruw product als zoodanig (zonder aftrek van alkohol) dan 0,0062 gr.. dat nog al verschilt van 0,014 gr. (zie beneden).

Uit de vroeger medegedeelde opgaven (I, II, III en VI) blijkt, dat het additie-product behalve broom nog wat anders verliest, voor een deel is dit broomwaterstof. Steeds werd genomen het gewicht der eerste weging (na drogen boven zwavelzuur) van het afzetsel. Amido-verbinding geeft met broomwater eveneens een afzetsel (zie ook later), in

rekening gebracht als additie-product van n. cyanuurzuur aethyl. Op te merken is, dat het afzetsel met het ruwe product erlangd en het lichaam van Cloëz zich wat anders verhoudt dan dat met n. cyanuurzuur aethyl, in zoo verre als het niet zoo snel afneemt in gewicht bij staan. Vooralsnog werd hierin geen aanleiding gevonden verschil in samenstelling aan te nemen.

De quantitatieve bepalingen met broomwater hebben slechts een *betrekkelijke* waarde, dat ook duidelijk blijkt uit het volgende. In drie proeven met n. cyanuurzuur aethyl werd verkregen aan afzetsel:

III		
A	B	B III, 161
0,3515	0,2915	0,279 gr.

overeenkomende met een hoeveelheid n. cyanuurzuur aethyl:

III		
A	B	B III, 161
0,108	0,09	0,085 gr.

terwijl ingeval de oorspronkelijke hoeveelheid ware bekomen, deze zoû moeten bedragen 0,15 $\left(=\frac{0,6}{4}\right)$, dus is het verlies gemiddeld: 0,15 — 0,094 = 0,056 gr.. De uitkomst, zoo straks verkregen van 0,0062 gr., is derhalve te laag, en ter vergelijking met 0,014 gr. zou een betrekkelijke groote correctie zijn aan te brengen en daarmede worden 0,0098 gr.; dat verschil duidt op polymerisatie.

Product eener bereiding van het lichaam van Cloëz, vroeger *) geanalyseerd en vrij wel overeenstemmende met de formule: $x\,(NC\,.\,OC_2\,H_5)$, had onder een exsiccator niet minder dan 130 dagen gestaan. Hierbij was zeer weinig afgezet van amido-verbinding. Geven we de cijfers van 't begin af:

---

*) B III, 159

aanvankelijk	5,836 gr.	
na 2 dagen	5,8332 »	
na afnemen voor een proef met broomwater	5,2175 »	
na 15 dagen. , . .	5,198 »	
» 130 »	5,1835 »	
overgedaan op een schaaltje	4,8097 »	door toevallige omstandigheden had het lichaam na overschenken twee dagen gestaan aan de open lucht.
na 14 dagen	4,7036 »	

Gemelde proef had gegeven *) aan afzetsel 0, 0873 gr. berekend op 0,15 gr. stof. Een bepaling gedaan met het product na al die maanden te hebben gestaan, gaf van 0,738 gr. stof aan afzetsel: 0,675 gr., dus 0,13 gr. (op 0,15 gr. stof). Na twee weken te hebben gestaan onder een exsiccator met kalk was het afzetsel herleid tot 0,117 gr. Het bleek ook hierbij, dat reeds voor de eerste weging na staan met zwavelzuur eenig broomwaterstof ontstaat.

Gemelde bepalingen maken het niet onwaarschijnlijk, dat er toename plaats heeft aan n. cyanuurzuur aethyl, noodwendig te verklaren door aan te nemen, dat aanvankelijk voorhanden is n. cyaanzuur aethyl: $NC . OC_2 H_5$, hetzij vrij, hetzij in verbinding met n. cyanuurzuur aethyl (zie later).

Er werd thans een poging gedaan, de methode ter bepaling van het gehalte aan n. cyanuurzuur aethyl beter in te richten. Zoo is het niet wel mogelijk, met genoegzame nauwkeurigheid te bepalen, wanneer het afzetsel met broomwater droog is, en voorzichtigheidshalve werd daarom niet later gewogen, dan zeker noodig was. Uit het medegedeelde volgt genoegzaam, dat men niet kan wachten tot al het broom er uit is, in zooverre als het broom meer en meer substitueerend inwerkt, afhankelijk zeker van verschillende

*) B III, 161.

omstandigheden. Met het doel om te trachten eenige verbetering aan te brengen, liet men het afzetsel (met broomwater erlangd) drogen met zwavelzuur en plaatste er bij een buisje met broom. Maar nu deed zich het verschijnsel voor, dat dit broom zich verzamelde in het schaaltje met het vochtige afzetsel, waarmede het beoogde doel was mislukt, omdat de proef nu die was geworden, vroeger gedaan met een overmaat van broom, dat niet leidde tot een genoegzaam constant gewicht.

Met het product eener nieuwe bereiding van het lichaam van Cloëz (had 24 uur gestaan in een luchtverdunde ruimte met zwavelzuur) werd nog een bepaling gedaan met broomwater. Een hoeveelheid stof van 0,674 gr. (opgelost in 112 C. C. water) werd neêrgeslagen en aan afzetsel verkregen 0,637 gr., dus op 0,15 gr. stof (of 25 C. C. oplossing) 0,142 gr.. Na twee dagen was het afzetsel herleid tot 0,613 gr , maar, als bij vroegere proeven, eenig broomwaterstof gevormd, waarom, als werd medegedeeld, de eerste weging wordt genomen. Toevallig had het afzetsel met broomwater wat langer (namelijk 4 dagen) gestaan, en de proef werd dus herhaald. Nu gaf 0,6792 gr. stof aan afzetsel 0,663 gr. of op 0,15 gr stof aan afzetsel 0,146 gr., dat genoegzaam met het vorige overeenkomt (na drie dagen was het herleid tot 0,628 gr).

Het product van laatstgemelde bereiding werd nagenoeg te gelijker tijd vast met dat van een vroegere bereiding (p. 432), hetwelk maanden had gestaan en toen gaf 0,13 gr. aan afzetsel, maar aanvankelijk 0,0873 gr.. Tot nog toe is het niet meer mogen gelukken, alhoewel schijnbaar werkende onder dezelfde omstandigheden, om het lichaam van Cloëz te maken met zulk een betrekkelijk laag gehalte aan n. cyanuurzuur aethyl; in zooverre heeft dus de bepaling met 0,0873 gr. aan afzetsel een betrekkelijke waarde.

Vergelijkt men het gewicht aan afzetsel verkregen met n. cyanuurzuur aethyl bedragende op 0,15 gr. stof een hoeveelheid van 0,307 gr. (namelijk het gemiddelde van 0,279, 0,2915 en 0,3515 gr.) met dat van het lichaam van Cloëz, dan komt het product eener bereiding met 0,0873 gr. aftreksel ongeveer overeen met de formule:

$N_3 C_3 . 3 (OC_2 H_5), 6 NCO C_2 H_5$, en dat der andere bereiding met $N_3 C_3 . 3 (OC_2 H_5), 3 NCO C_2 H_5$. Ter contrôle werd het lichaam van CLOËZ op nieuw gemaakt op de gewone wijze, en dus ook geplaatst in een luchtledige ruimte. Al zeer spoedig (gedeeltelijk reeds bij staan in vacuo) ving de massa aan met vast te worden en werd verhit in een luchtbad tot ongeveer 30^0, om deze homogeen te maken. Een hoeveelheid van 0,631 gr. stof gaf aan afzetsel 0,616 gr., dus op 0,15 gr. stof een hoeveelheid van 0,146 gr. (na drie dagen herleid tot 0,61 gr.). Het product dezer bereiding van het lichaam van CLOËZ bestaat dus als het vorige voor ongeveer *de helft aan n. cyanuurzuur aethyl*, en de eerste bereiding (zie vroeger) voor nagenoeg een derde gedeelte.

Ten einde den invloed te leeren kennen der aanwezigheid van amido-verbinding bij alle vorige bepalingen met het lichaam van CLOËZ, versch ruw product en dit laatste bij staan, werd het afzetsel bij staan van versch ruw product (welk afzetsel blijkbaar een mengsel is van mono- en diamido-verbinding) neêrgeslagen met broomwater op de gewone wijze. Een hoeveelheid van 0,5505 gr. stof gaf aan afzetsel (schijnbaar droog) 1,0119 gr. (nagenoeg kleurloos), na drie dagen herleid tot 0,555 gr. (kleurloos), en dit na drie dagen tot 0,306 gr. (zie vroegere bepalingen met n. cyanuurzuur aethyl); broomwaterstof werd niet waargenomen, maar zal toch wel zijn gevormd. Het afzetsel was aanvankelijk vrij volumineus en moest 12 dagen staan alvorens op 't oog te zijn gedroogd, niet het geval met dat van n. cyanuurzuur aethyl.

Het product eener nieuwe bereiding van het lichaam van CLOËZ gaf 0,144 gr. afzetsel op 0,15 gr. stof. Na ongeveer 8 weken te hebben gestaan, waarbij de vloeibare massa vast was geworden en alzoo het grootste gedeelte van dezen tijd had gestaan, werd verkregen 0,161 gr. aan afzetsel. Maar de oorspronkelijke hoeveelheid stof 6,797 gr. was bij staan herleid tot 6,3455 gr., alzoo 0,4515 gr. afgenomen, dat een verandering maakt van 0,161 gr. tot 0,149 gr. afzetsel (bij een vroegere bepaling was de vermindering in gewicht betrekkelijk gering en werd daarom niet in rekening

gebracht). Het vast worden had alzoo geen noemenswaardige verandering doen plaats hebben aan n. cyanuurzuur aethyl (0,149 — 0,144 = 0,005 gr.). Zonder ver te zijn verwijderd van de waarheid, kan men dus zeggen, dat het vast worden slechts schijnbaar bestaat in een gepolymeriseerd worden van $NC . OC_2 H_5$, aangenomen, dat dit laatste aanwezig is (zie later).

Uit de vorige proef zou als waarschijnlijk kunnen afgeleid worden, dat bij het vast worden betrekkelijk meer vervluchtigt. Dit schijnt echter niet het geval te zijn, daar van de oudste bereiding van CLOËZ (zie vroeger); (na aftrek der hoeveelheid, verbruikt ter analyse) bedragende een hoeveelheid van 3,9146 gr., na 92 dagen een gewicht had van 3,8561 gr., dus was verminderd met 0,0583 gr., dat betrekkelijk niet veel is te noemen.

In 't voorbijgaan moge het volgende worden medegedeeld. Van een ruw product, dat 5 maanden had gestaan, gaf 0,7375 gr. stof aan afzetsel 0,6625 gr. (na twee dagen staans met zwavelzuur: 0,6475). Berekend op ruw product versch (49,3 gr. stof werden herleid tot 26,494 gr.) is 0,7375 gr. terug te brengen tot 1,372 gr. (49,3 : x = 26,494 : 0,7375), en na aftrek thans van den alkohol tot 0,832 gr. stof, die dan geeft 0,6625 gr. afzetsel en dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel: 0,119 gr. afzetsel, welke uitkomst duidt op polymerisatie (met het versche ruwe product was geen bepaling gedaan met broomwater).

Over wijzigingen in de methode ter bereiding van het lichaam van CLOËZ. Ten einde te weten, of in het ruwe product (versch) betrekkelijk veel amido-verbinding voorkomt, werd uitgegaan van niet minder dan 76,3 gr. na staan gedurende 90 dagen onder een exsiccator herleid tot 41,8 gr., medegerekend het afzetsel aan amido-verbinding. Dit laatste bedroeg, na tusschen filtreerpapier te zijn bevrijd van de vloeibare deelen 1,585 gr, dus ongeveer 2 p. c. van het ruwe product (versch). Men mag dus aannemen, dat van amido-verbinding aanwezig is in het ruwe product (zie later). Het vloeibare deel, afgeschonken van amido-verbinding, bedroeg 37,3 gr.. Viermaal achtereenvolgens gewasschen (van

een neêrslaan is hier geen sprake) met 25 C. C. water, bleef terug 25,2 gr. (na een paar dagen te hebben gestaan onder een exsiccator). Hiervan werd wat afgenomen voor een bepaling met broomwater (zie later), terwijl overbleef 24,2 gr., dat zich bij staan verhield als volgt:

na staan onder een exsiccator	1 dag	24,1 gr.
» » » » »	9 dagen	24,1 »
» » in vacuo	2 dagen	24,1 »

Een hoeveelheid van 0,5305 gr. stof gaf aan kooldioxyde 0,9351 gr. en 0,3253 gr. water; 0,4116 gr. stof gaf bij 14,5° en 756,2 mm. (gecorr.) 75,5 C. C. stikstof. Op 100 gew. — *d.*:

koolstof	48,0
waterstof . . .	6,8
stikstof	21,4.

Blijkbaar is het gehalte aan amido-verbinding grooter dan bij het volgen der gewone bereidingswijze van het lichaam van Cloëz, zoodat gemelde wijziging geen verbetering is te achten. De proef met broomwater leverde het volgende resultaat op. Een hoeveelheid van 0,8842 gr. stof (na weken staan) gaf aan afzetsel 0,753 gr. (na staan met kalk gedurende 8 dagen 0,724 gr. en na 36 dagen 0,63 gr) berekend op 0,15 gr. st. of overeenkomende met 0,128 gr.. Geeft 0,8842 gr. stof aan afzetsel 0,753 gr., dan is dit van 25,2 gr. alzoo 21,4 gr. aan broomafzetsel, welke 25,2 gr. afkomstig waren van 76,3 gr. *versch* ruw product, of, alkohol niet medegerekend, van 46,3 gr. stof. Aangenomen eens, dat deze 46,3 gr. stof geen n. cyanuurzuur aethyl, noch amido-verbinding inhielden, behalve dat aanwezig in gemelde 25,2 gr. (lichaam van Cloëz gemaakt naar de gewijzigde methode), zouden dan deze 46,3 gr. stof geven 21,4 gr. afzetsel (noodwendig te laag berekend), dus 0,15 gr. stof aan broomafzetsel: 0,069 gr., terwijl versch ruw product (na aftrek van alkohol) gemiddeld gaf 0,032 gr. afzetsel. Er kan dus hier zeer wel polymerisatie ingetreden zijn, maar

van het ruw product (versch) was geen bepaling gedaan met broomwater.

Het product, gemaakt naar gemelde methode, werd vast zoodra het koude jaargetijde intrad. Na 10 weken staans (waarvan eenige na vast worden) gaf 0,7397 gr. stof met broomwater aan afzetsel 0,751 gr., dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,152 gr. (vroeger 0,128 gr.); hier zou echter een correctie zijn aan te brengen ten gevolge der vermindering in gewicht der stof bij staan (in de laatste 8 dagen werd dit alleen bepaald en bedroeg toen op ongeveer 20 gr. stof 0,039 gr.).

Niet zonder belang was het te weten, of het eenig verschil maakt, wanneer bij de bereiding de oplossing van $C_2 H_5 O Na$ wordt gedaan bij die van Br C N of omgekeerd, zooals tot nog toe geschiedde; de mogelijkheid toch bestaat, dat in het laatste geval polymerisatie wordt bevorderd. Een hoeveelheid van 2,0795 gr. (versch) ruw product gaf, op de bekende wijze te werk gaande, aan afzetsel 0,763 gr. (na twee dagen 0,751 gr.); als vroeger was het gehalte van ruw product (versch) aan alkohol afgetrokken, en op 0,15 gr. stof (gedacht vrij van alkohol) alzoo aan afzetsel 0,089 gr., veel meer dan vroeger werd verkregen, waaruit in ieder geval genoegzaam volgt, dat althans onder gemelde omstandigheden natrium-aethylaat niet medewerkt tot polymerisatie. De bereidingswijze behoeft alzoo in dezen zin niet te worden veranderd.

De aetherische oplossing van Br C N werd bij wijze van proef niet meer gedaan in een burette, maar uit een kolf langzaam gevoegd bij de andere oplossing. Een hoeveelheid stof van 2,012 gr. gaf aan afzetsel 0,543 gr. (na drie dagen: 0,538), dus 0,15 gr. stof (of 25 C. C.), alkohol als altijd niet medegerekend: 0,066 gr.; ook deze wijziging schijnt dus niet wenschelijk.

Versch ruw product nader beschouwd. Na 5 maanden te hebben gestaan, werd 49,3 gr. versch ruw product herleid tot 26,494 gr. (zie vroeger), dat langzamerhand aan amidoverbinding afzette en wel 1,43 gr. (dus 2,9 p. c. van het versche ruwe product). Zoodra zich aanving n. cyanuurzuur

aethyl af te zetten, gemakkelijk waar te nemen, was de vloeistof afgeschonken van amido-verbinding, terwijl deze vloeistof weldra krystalliseerde naar de wijze van het lichaam van CLOËZ.

Scheiding door waterdamp. Versch ruw product met water overgehaald geeft als eerste product een gemakkelijk brandbare vloeistof alkohol), volgt een aangenaam riekende olieachtige vloeistof, die wordt neêrgeslagen met broomwater. Normaal cyanuurzuur aethyl gaat betrekkelijk gemakkelijk over met waterdamp, dus heeft men daarin in ieder geval geen eenvoudig scheidingsmiddel.

Ruw product, het lichaam van CLOËZ *en n. cyanuurzuur aethyl tegenover sublimaat.* De vraag werd gesteld, of, ingeval het lichaam van CLOËZ mocht zijn: $N_3 C_3 . 3 OC_2 H_5, x NCO C_2 H_5$, deze verbinding niet zou kunnen ontleed worden in aethylcyanaat en aethylcyanuraat, b. v. met sublimaat, dat zich wellicht met dit laatste vereenigt. Bij wijze van een voorloopige proef werd uitgegaan van een ruw product *na staan*, en voor de samenstelling aangenomen: $N_3 C_3 3 OC_2 H_5, 3 NCO C_2 H_5$, terwijl $N_3 C_3 . 3 OC_2 H_5$ zich wellicht verbindt met $Hg Cl_2$, derhalve op 426 gew.-d. van het product aan sublimaat 171. gew.-d.; genomen werd echter op 1 gew.-d. product aan sublimaat 0,5 gew.-d.. Bij de volgende proeven was de druk 30—40 mm., terwijl werd verwarmd. Het sublimaat was, langzaam in temperatuur stijgende, bij ongeveer 110° opgelost, en de massa ving aan te schuimen. In een andere proef werd tweemaal meer sublimaat genomen met schijnbaar dezelfde uitkomst. Verhittende tot ongeveer 220°, ging schijnbaar niets over behalve zeer weinig van een krystallijne stof en vloeistof (welke laatste krystalliseerde en blijkbaar was n. cyanuurzuur aethyl). Een volgende proef toonde aan, dat 2,825 gr. ruw product, na staan behandeld naar de laatstgemelde wijze, 0,803 gr. in gewicht was afgenomen. Werkende zonder kwikpomp en onder afkoeling van het overgaande, bleek een kleine hoeveelheid van een vloeistof te worden verdicht. Een hoeveelheid van 0,1567 gr. stof gaf aan chloorzilver: 0,3334 gr., overeenkomende met 52,6 p.c. chloor; blijkbaar aethylchloride, zooals tevens volgde uit het kookpunt. Het lichaam

van Cloëz verhoudt zich op genoegzaam overeenkomstige wijze. Dit schijnt, ten minste niet in die mate, het geval te wezen met n. cyanuurzuur aethyl (de proef werd genomen zonder luchtpomp), in zooverre als slechts zeer weinig gasontwikkeling, en, onder afkoeling, geen destillaat werd verkregen (er werd evenwel met weinig stof gewerkt); dit zou dan eenigzins spreken voor de volgende reactie:



$$2\,(NC\,.\,OC_2H_5) + Hg\,Cl_2 = 2\,C_2H_5\,Cl + (NCO)_2\,Hg.$$

Ruw product bij verwarming in een luchtverdunde ruimte. Van ruw product werden 10 gr, in een luchtverdunde ruimte (30—40^{mm}) verhit; bij 90—110^0 ging over 2—3 gr. (A), bij 130^0—150^0 ongeveer 5 gr. (B), terwijl in de retort terug bleef een gekleurde taaie massa, die na weken *niet* vast werd. Vloeistof A (meerendeels alkohol) verdampte spoedig nagenoeg geheel onder een exsiccator, bevatte naar 't scheen wat n. cyanuurzuur aethyl; vloeistof B (als A) geschud met water gaf (ook bij verwarming) een troebeling. Na staan krystalliseerde uit B eerst isocyanuurzuur aethyl, en later *normaal* cyanuurzuur aethyl. Ruw product *na staan* (en wel ongeveer drie maanden) gaf onder genoegzaam dezelfde omstandigheden reeds onder 100^0 aanvankelijk iets af van een krystallijne stof, en eerst bij 245^0—250^0 destilleerde wat over van een vloeistof met aangenamen reuk; 0,5 gr. gaf met broomwater aan afzetsel 0,1975 gr. (tweede weging 0,194), dus op 0,15 gr. aan afzetsel 0,06 gr.; blijkbaar was het meerendeels isocyanuurzuur aethyl. In de retort bleef terug een gedeeltelijk vaste, gedeeltelijk dik vloeibare massa. Bij deze proef gaf 2 gr. stof ongeveer 0,5 gr. destillaat. In een andere proef werd *sneller* verhit en ving reeds bij 160^0 iets vloeibaars over te gaan, terwijl verhit tot 230^0, destilleerde van 2 gr. stof 1,2 gr., en in een derde proef werd erlangd 1,3 gr. van een lijvige vloeistof.

Het verzeepen van n. cyanuurzuur aethyl en ruw product. Ten einde het verzeepen van n. cyanuurzuur aethyl enz. te bevorderen, werd aanvankelijk genomen een oplossing van K O H in abs. alkohol, maar de vorming van gekleurde stoffen belette hiermede voort te gaan, tevens het geval,

alhoewel in mindere mate met alkohol van 82 p.c.. Dientengevolge werd genomen potassa in water en gewerkt met een oplossing van 1,34 S.g. (27 pc.); op 0,1 gr. n. cyanuurzuur aethyl werd genomen 3 gr. dezer loog (waarvan dus 1 gr, bevat 0,27 gr. kaliumhydroxyde. Zelfs bij 130° gaat het verzeepen (in een toegesmolten buis) zeer langzaam. Ruw product (versch) werd bij 100° zeer langzaam, bij 120° vrij snel verzeept Drijft niets op de oppervlakte na de proef, dan is veelal alles verzeept Na verzeepen, openen der buis, uitnemen en spoelen van den inhoud, neutraliseeren met zoutzuur, een halven dag laten staan, het afzetsel (indien gevormd) doen op een gewogen filtrum enz., bepaalde men het isocyanuurzuur als $C_3 H_2 KN_3 O_3$. Ter contrôle van de methode diende isocyanuurzuur in bepaalde hoeveelheid gedaan bij gemelde loog. Ruw product (versch) gaf een duidelijk afzetsel van $C_3 H_2 KN_3 O_3$, tevens na aanvankelijk verhitten bij 150°, *niet* bij aanvankelijk verhitten bij 250°, in welk laatste geval n. cyanuurzuur aethyl zeker werd overgezet in isocyanuurzuur aethyl, welk laatste met KOH *geen* isocyanuurzuur geeft; op de loog dreef dan ook bij de laatste proef een vloeistof (zeker $NH_2 . C_2 H_5$). Later zullen quantitatieve verzeepingsproeven worden medegedeeld, gedaan in een platinabuis (geplaatst in een glazen buis), daar het glas bij 120° en vooral bij 150° te veel door deze loog wordt aangetast.

Theoretisch kookpunt van normaal aethyl cyanaat; het lichaam van Cloëz *nader beschouwd.* Van OCN $C_2 H_5$ is het kookpunt ongeveer 60°, en niet onwaarschijnlijk zal dat van NCO $C_2 H_5$ daartoe betrekkelijk naderen, lettende b. v. op SCN $C_2 H_5$ (k. 134°) en NCS $C_2 H_5$ (k. nagenoeg 146°), en en CN $C_2 H_5$ (k. 78°) en NC $C_2 H_5$ (k. 98°), en het kookpunt van NCO $C_2 H_5$ wat hooger zijn dan dat van OCN $C_2 H_5$, b. v. bedragen 70—80°. Het kookpunt van SCN $C_2 H_5$ is ongeveer 146° en dat van OCN $C_2 H_5$ 60°, maar dat van $C_2 H_3$ O . SH b. v. is 95° en van $C_2 H_7$ O . OH ongeveer 118° (van $C_2 H_5$. OH nagenoeg 78° en $C_2 H_5$. SH 36°), en zoo zou het mogelijk kunnen zijn, dat het kookpunt van NC . O $C_2 H_5$ hooger was dan dat van NC . S $C_2 H_5$ (zie boven k. nagenoeg

146^0). Slechts het kleinste verschil nemende, namelijk dat van 25^0 (tusschen de k. van $C_2H_3O.OH$ en $C_2H_3O.SH$), zou men dan (gemeld k. van $NC.SC_2H_5$ als juist aannemende) komen tot een kookpunt voor $NCO\,C_2H_5$ van ongeveer 146^0 · $25^0 = 171^0$. Dan zou de verbinding $NCO\,C_2H_5$ een verschil hebben in kookpunt met $OCN\,C_2H_5$ van 171^0— $60 = 110^0$, waartegen zonder twijfel zeker niet weinig bezwaren zijn aan te voeren, zoo b. v. het verschil in kookpunt van $SCN\,C_2H_5$ en $NCS\,C_2H_5$, $CN\,C_2H_5$ en $NC\,C_2H_5$. Neemt men als waarschijnlijk aan, dat het kookpunt van $NCO\,C_2H_5$ is gelegen onder 100^0, dan laten zich de samenstelling en eigenschappen van het lichaam van CLOËZ, aangenomen dat hierin $NCO\,C_2H_5$ aanwezig is, naar 't schijnt slechts verklaren door een aannemen der verbinding: C_3N_3. $3\,OC_2H_5$, $x\,NCO\,C_2H_5$. Immers ware $NCO\,C_2H_5$ in vrijen staat aanwezig, dan zou er meer vervluchtigen; en ingeval de betrekkelijk groote hoeveelheid aan n. cyanuurzuur aethyl slechts in oplossing verkeerde zou toch al ligt bij behandeling met water iets blijken van eenige scheiding, van welk laatste tot nog toe alleen werd waargenomen bij een gehalte aan gemeld lichaam van meer dan een derde gedeelte.

Het betrekkelijk groot S. g. van het lichaam van CLOËZ is noodwendig te verklaren door het groote gehalte aan n. cyanuurzuur aethyl, welk laatste zwaarder is dan water.

Aanhangsel. Normaal cyanuurzuur aethyl is gemakkelijk oplosbaar in zwavelkoolstof en chloroform, waaruit het kan krystalliseeren. Wordt bij deze oplossing broom gedaan, dan ontstaat geen afzetsel; bij verdampen blijft het additie-product terug, echter gedeeltelijk ontleed, zelfs in een atmospheer van broom. In aetherische oplossing wordt n. cyanuurzuur aethyl *niet* neêrgeslagen door een oplossing van sublimaat in aether. Het reagens van NESSLER geeft met n. cyanuurzuur aethyl een kleurloos volumineus amorph neêrslag, zoo ook amido-verbinding. Isocyanuurzuur vormt daarmede een kleurloos, niet volumineus neêrslag; het cyanuurzuur methyl, gemaakt door isocyanuurzuur methyl, een geelgekleurd niet volumineus neêrslag; dat met urethaan geeft een neêrslag, gekleurd als dat met ammoniak.

Urethaan en amido-verbinding zijn onoplosbaar in zwavelkoolstof en chloroform. Ruw product (na staan) geeft met zwavelkoolstof en chloroform een troebeling, bij staan een (betrekkelijk gering) vloeibaar afzetsel vormende, na eenigen tijd overgaande in vasten staat.

Ruw product als zoodanig, en na staan, geeft met het reagens van NESSLER een overeenkomstig neêrslag als met n. cyanuurzuur aethyl en amido-verbinding; zoo ook het waschwater van het ruwe product (na staan), bij gedeeltelijk indampen.

Besluit. Het vervolg onzer bijdrage schijnt te leiden tot deze uitkomsten:

1. Normaal cyanuurzuur aethyl is gemakkelijk oplosbaar in zwavelkoolstof en chloroform; zoo ook het broomadditieproduct (dit laatste wordt echter bij verdampen van het oplossingsmiddel gedeeltelijk ontleed). De waterige oplossing van n. cyanuurzuar aethyl geeft een kleurloos volumineus neêrslag met het reagens van NESSLER en zoo ook het lichaam van CLOËZ en ruw product. N. cyanuurzuur aethyl wordt betrekkelijk gemakkelijk met waterdamp medegevoerd.

2. Het gehalte van het lichaam van CLOËZ en ruw product aan n. cyanuurzuur aethyl (met inbegrip van amidoverbinding) kan door middel van broomwater met een tamelijke mate van nauwkeurigheid worden bepaald. Het lichaam van CLOËZ schijnt als minimum te bevatten ongeveer een derde gedeelte in gewicht aan n. cyanuurzuur aethyl. Aangenomen, met 't oog op de analysen betreffende het lichaam van CLOËZ, dat het overige (een weinig amido-verbinding niet medegerekend) is NCO $C_2 H_5$, zou dit, in formule teruggegeven, genoegzaam overeenkomen met $C_3 N_3 . 3 O C_2 H_5$, 6 NCO $C_2 H_5$. In den regel schijnt evenwel gemeld lichaam voor ongeveer de helft te bestaan uit n. cyanuurzuur aethyl, in formule gebracht dan $C_3 N_3 . 3 O C_2 H_5$, 3 NCO $C_2 H_5$. Later zal moeten blijken, of een dezer verbindingen of beiden inderdaad bestaan.

3. Het lichaam van CLOËZ met dit groote gehalte aan n. cyanuurzuur aethyl vangt, bij een betrekkelijk lage temperatuur, weldra aan om van dit laatste af te zetten. Hierbij

heeft geen noemenswaardige polymerisatie plaats Slechts wordt afgezet van reeds voorhanden n. cyanuurzuur aethyl; toch wordt de geheele massa schijnbaar vast. Tusschen filtreerpapier geplaatst, blijft $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{4}$ in gewicht der massa terug aan n. cyanuurzuur aethyl, dat nog een weinig vloeibare deelen insluit. Derhalve is het mogelijk, dat $C_3 N_3 . 3 O C_2 H_5, 3 NCO C_2 H_5$, de helft verliezende aan n. cyanuurzuur aethyl, dus overgaande in $\frac{1}{2}$ $C_3 N_3 . 3 O C_2 H_5, 3 NCO C_2 H_5$ (gelijkstaande met een productie van $\frac{1}{4}$ der massa van n. cyanuurzuur aethyl), derhalve wordt: $C_3 N_3 . 3 O C_2 H_5, 6 NCO C_2 H_5$. Ook dit kan slechts blijken door een voortgezet onderzoek.

4. Nog nader is niet onwaarschijnlijk geworden, dat het ruwe product (versch) in hoofdzaak is: $x [NCO C_2 H_5, C_2 H_6 O]$.

5. In vele handboeken *) over scheikunde staat, dat aethylnormaalcyanaat (en zoo methylnormaalcyanaat enz.) bij staan overgaat in n. cyanuurzuur aethyl en *amido*-cyanuurzuur aethyl (resp. methyl enz.). Dit is een vergissing, wat betreft *amido*-verbinding, zooals uit het vroeger medegedeelde duidelijk kan volgen, terwijl de vorming van n. cyanuurzuur aethyl bloot een veronderstelling was, evenwel gemakkelijk te verklaren. Onze onderzoekingen leiden er wel toe aan te nemen, dat deze omzetting van $NCO C_2 H_5$ in $N_3 C_3 . 3 O C_2 H_5$, alhoewel zeer langzaam, geschiedt, maar nader dient te worden bevestigd, of het aanwezige $N_3 C_3 . 3 O C_2 H_5$ wel gedeeltelijk ontstaat bij bewaren.

5. De uitspraak van Gal †), dat het lichaam van Cloëz met potassa geeft alkohol en kaliumcyanaat, welk laatste: »ne tarde pas à se transformer en cyanurate" zal zeker vooral haren grond daarin hebben, dat het lichaam van Cloëz (versch) veelal voor de helft schijnt te bestaan uit n. cyanuurzuur aethyl, terwijl Gal geen methode kende ter

*) Zie b. v. Handb. der org. Chem. van Beilstein. S. 691. (1882).

†) Compt. rend. T. 61,520; Beilstein, l. c. 691.

bepaling van het gehalte van het lichaam van Cloëz aan deze verbinding.

In een volgende verhandeling zullen nadere onderzoekingen worden medegedeeld over cyanuurzuur aethyl, het lichaam van Cloëz en ruw product.

Utrecht,
24 Februari 1883.

ERRATA.

Blz. 401	regel 12 v.b.	*staat:*	vorige,	*lees:*	overige
〃 406	〃 1 〃	〃	in,	*lees:*	in de
〃 411	〃 1 v.o.	〃	worden,	*lees:*	werden
〃 414	〃 4 en 7 v.b.	〃	macrograafbladen,	*lees:*	mareograafbladen